

UVOD U MATEMATIKU

Treći rok - 31. kolovoza 2026.

Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Svaki zadatak nosi 20 bodova.

Usmeni ispit kod prof. Muića održat će se u utorak, 1. 9., u 10 sati u njegovom uredu.

1. (a) Dokažite da za sve skupove A , B i C vrijedi

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$$

- (b) Na skupu $\mathbb{Z}$ zadana je relacija ρ s

$$m \rho n \iff 5 \mid (m^2 - n^2).$$

Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije te odredite klase $[0]$, $[1]$ i $[2]$.

2. Zadana je funkcija

$$f(x) = \log_2 \left(\frac{x-2}{x+1} \right).$$

- (a) Odredite prirodnu domenu i sliku funkcije f .
(b) Dokažite da je funkcija f injekcija na svojoj domeni.
(c) Odredite inverznu funkciju f^{-1} .

3. Dokažite matematičkom indukcijom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}.$$

4. (a) Odredite najveću zajedničku mjeru M brojeva 1512 i 1050 te pronađite cijele brojeve x i y takve da vrijedi

$$M = 1512x + 1050y.$$

- (b) Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma

$$x^{2026} - 2025x + 2026$$

polinomom $(x-1)^2$.

5. (a) U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu

$$z^3 = 8i.$$

- (b) Rastavite na parcijalne razlomke izraz

$$\frac{x^2 + 4x - 1}{(x-1)(x^2+1)}.$$