

# Uvod u matematiku

## Vježbe

Akadska godina 2025./2026.

Zadnja izmjena: 22. studenoga 2025.

# Sadržaj

|   |                         |    |
|---|-------------------------|----|
| 1 | Relacije                | 3  |
| 2 | Funkcije                | 11 |
| 3 | Jednadžbe i nejednadžbe | 17 |

# 1 Relacije

Neka su  $A$  i  $B$  skupovi. **Relacija** je podskup Kartezijevog produkta  $A \times B$ .

Relacija  $\rho \subseteq A \times A$  se zove **binarna relacija**. Kažemo da je  $\rho$  relacija na  $A$ .  $(x, y) \in \rho$  ćemo pisati i  $x\rho y$ , a  $(x, y) \notin \rho$  ćemo pisati i  $x\not\rho y$ .

npr. relacije  $\leq$ ,  $<$  na skupovima brojeva, paralelnost pravaca u ravnini,  $\subseteq$  na partitivnom skupu nekog skupa, djeljivost na skupu cijelih brojeva

Neka je  $\rho$  relacija na  $A$ . Kažemo da je  $\rho$ :

- **refleksivna** ako  $(\forall a \in A)(a\rho a)$
- **simetrična** ako  $(\forall a, b \in A)(a\rho b \Rightarrow b\rho a)$
- **tranzitivna** ako  $(\forall a, b, c \in A)(a\rho b \text{ i } b\rho c \Rightarrow a\rho c)$
- **antisimetrična** ako  $(\forall a, b \in A)(a\rho b \text{ i } b\rho a \Rightarrow a = b)$
- **irefleksivna** ako  $(\forall a \in A)(a\not\rho a)$

**Zadatak 1.** Ispitajte svojstva sljedećih relacija:

- (a) paralelnost pravaca u ravnini
- (b) okomitost pravaca u ravnini
- (c)  $\leq$  na  $\mathbb{N}$
- (d)  $<$  na  $\mathbb{R}$
- (e)  $\subseteq$  na  $\mathcal{P}(S)$

*Rješenje.*

- (a) Refleksivnost: Svaki pravac je paralelan sam sa sobom, pa je relacija refleksivna.

Simetričnost: Ako je  $p_1 \parallel p_2$ , tada je očito i  $p_2 \parallel p_1$ , dakle relacija je simetrična.

Tranzitivnost: Iz  $p_1 \parallel p_2$  i  $p_2 \parallel p_3$  slijedi  $p_1 \parallel p_3$ , pa je relacija tranzitivna.

Antisimetričnost: Iz  $p_1 \parallel p_2$  i  $p_2 \parallel p_1$  ne slijedi nužno  $p_1 = p_2$ . Primjerice ako je  $y = x$  jednadžba od  $p_1$  i  $y = x + 1$  jednadžba od  $p_2$ .

Irefleksivnost: Relacija je refleksivna, dakle ne može biti i irefleksivna (to je moguće samo za relacije na praznom skupu).

- (b) Refleksivnost: Niti jedan pravac nije okomit sam na sebe, pa relacija nije refleksivna.

Simetričnost: Ako je  $p_1 \perp p_2$ , tada je očito i  $p_2 \perp p_1$ , dakle relacija je simetrična.

Tranzitivnost: Iz  $p_1 \perp p_2$  i  $p_2 \perp p_3$  ne slijedi nužno  $p_1 \perp p_3$ . Primjerice ako su  $p_1$  i  $p_3$  paralelni. Relacija nije tranzitivna.

Antisimetričnost: Iz  $p_1 \perp p_2$  i  $p_2 \perp p_1$  ne slijedi  $p_1 = p_2$ , pa relacija nije antisimetrična.

Irefleksivnost: Relacija je irefleksivna jer niti jedan pravac nije okomit sam na sebe.

- (c) Očito je relacija refleksivna, tranzitivna i antisimetrična. Nije simetrična jer  $1 \leq 2$  i  $2 \not\leq 1$ . Nije ni irefleksivna jer je  $1 \leq 1$ .
- (d) Relacija je očito irefleksivna i tranzitivna. Nije refleksivna jer  $1 \not\leq 1$ , nije simetrična jer  $1 < 2$  i  $2 \not< 1$ . Relacija je antisimetrična jer za realne brojeve  $x$  i  $y$ ,  $x < y$  i  $y < x$  ne mogu istovremeno vrijediti, pa je premisa implikacije u definiciji antisimetričnosti uvijek neistinita, dakle implikacija je istinita.
- (e) Relacija je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna (predavanja). Nije simetrična ako je  $S \neq \emptyset$  jer tada  $\emptyset \subseteq S$  i  $S \not\subseteq \emptyset$ . Relacija nije irefleksivna jer  $\emptyset \subseteq \emptyset$ .

□

Binarna relacija koja je

- refleksivna, simetrična i tranzitivna naziva se **relacija ekvivalencije**;
- refleksivna, tranzitivna i antisimetrična naziva se **parcijalni uređaj**.

**Zadatak 2.** Na skupu  $\{1, 2, 3, 4\}$  dana je binarna relacija

$$\rho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 3), (2, 4), (4, 4), (1, 4)\}.$$

Ispitajte svojstva relacije  $\rho$ .

*Rješenje.*

Danu relaciju možemo prikazati tablicom desno iz koje nam je lakše povjeriti neka svojstva. Primjerice, kad bi  $\rho$  bila refleksivna, imali bismo sivu dijagonalu, što ovdje nije slučaj. Irefleksivna relacija bi trebala imati bijelu dijagonalu, što vidimo da ovdje opet nije slučaj. Također, simetrične relacije imaju tablicu koja je simetrična s obzirom na dijagonalu, što ovdje također ne vrijedi. Konkretno,  $\rho$  nije refleksivna jer  $1 \not\rho 1$ , nije simetrična jer  $1 \rho 2$  i  $2 \not\rho 1$ , a nije irefleksivna jer  $4 \rho 4$ .

|   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |
| 4 |   |   |   |   |

Antisimetrične relacije imaju svojstvo da ne postoje dva siva polja izvan dijagonale koja su simetrična s obzirom na dijagonalu, vidimo da zadana relacija ima to svojstvo.

Tranzitivnost je teže pročitati iz tablice, pa ispišimo sve mogućnosti. Pritom uočimo da ako vrijedi  $x \rho y$  i  $y \rho z$ , te je  $x = y$  ili  $y = z$ , tada sigurno vrijedi  $x \rho z$ , pa treba provjeriti samo za parove gdje je  $x \neq y$  i  $y \neq z$ .

- $1 \rho 2, 2 \rho 3: 1 \rho 3$
- $1 \rho 2, 2 \rho 4: 1 \rho 4$
- $1 \rho 3, 3 \rho 4: 1 \rho 4$
- $2 \rho 3, 3 \rho 4: 2 \rho 4$

Dakle, relacija je tranzitivna. □

**Zadatak 3.** Za svaku od sljedećih relacija na  $\mathbb{R}$  odredite njena svojstva:

- (a)  $x \rho_1 y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \cdot y = 0$
- (b)  $x \rho_2 y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \cdot y \neq 0$
- (c)  $x \rho_3 y \stackrel{\text{def}}{\iff} |x - y| < 5$
- (d)  $x \rho_4 y \stackrel{\text{def}}{\iff} x^2 + y^2 = 1$
- (e)  $x \rho_5 y \stackrel{\text{def}}{\iff} x^2 + y^2 = 0$

*Rješenje.*

- (a) Refleksivnost: Pitamo se da li  $(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot x = 0)$ ?

Ovo očito ne vrijedi npr. za  $x = 1$ , pa relacija nije refleksivna.

Simetričnost: Pitamo se da li  $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \cdot y = 0 \implies y \cdot x = 0)$ ?

Ovo vrijedi jer je  $x \cdot y = y \cdot x$  (tj. množenje na  $\mathbb{R}$  je komutativno). Dakle, relacija je simetrična.

Tranzitivnost: Pitamo se da li  $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})((x \cdot y = 0 \text{ i } y \cdot z = 0) \implies x \cdot z = 0)$ ?

Implikacija ne vrijedi primjerice za  $x = z = 1$  i  $y = 0$ , pa relacija nije tranzitivna.

Antisimetričnost: Pitamo se da li  $(\forall x, y \in \mathbb{R})((x \cdot y = 0 \text{ i } y \cdot x = 0) \implies x = y)$ ?

Kontraprimjer za ovo je  $x = 1, y = 0$ , pa relacija nije ni antisimetrična.

Irefleksivnost: Pitamo se da li  $(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot x \neq 0)$ ?

Ovo ne vrijedi jer za  $x = 0$  imamo  $x \cdot x = 0$ , pa relacija nije irefleksivna.

(b) Refleksivnost: Pitamo se da li  $(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot x \neq 0)$ ?

Ovo očito ne vrijedi npr. za  $x = 0$ , pa relacija nije refleksivna.

Simetričnost: Pitamo se da li  $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \cdot y \neq 0 \implies y \cdot x \neq 0)$ ?

Ovo vrijedi ponovno zbog komutativnosti množenja. Dakle, relacija je simetrična.

Tranzitivnost: Pitamo se da li  $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})((x \cdot y \neq 0 \text{ i } y \cdot z \neq 0) \implies x \cdot z \neq 0)$ ?

Ako su  $x, y, z \in \mathbb{R}$  takvi da  $x \cdot y \neq 0$  i  $y \cdot z \neq 0$ , tada  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  i  $z \neq 0$ , pa onda i  $x \cdot z \neq 0$ . Iz ovoga slijedi da je relacija tranzitivna.

Antisimetričnost: Pitamo se da li  $(\forall x, y \in \mathbb{R})((x \cdot y \neq 0 \text{ i } y \cdot x \neq 0) \implies x = y)$ ?

Kontraprimjer za ovo je  $x = 1$ ,  $y = 2$ , pa relacija nije antisimetrična.

Irefleksivnost: Pitamo se da li  $(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot x = 0)$ ?

Ovo ne vrijedi jer za  $x = 1$  imamo  $x \cdot x \neq 0$ , pa relacija nije irefleksivna.

(c) Refleksivnost: Pitamo se da li  $(\forall x \in \mathbb{R})(|x - x| < 5)$ ?

Kako je  $|x - x| = 0$ , tvrdnja vrijedi. Relacija je refleksivna.

Simetričnost: Pitamo se da li  $(\forall x, y \in \mathbb{R})(|x - y| < 5 \implies |y - x| < 5)$ ?

Ovo vrijedi jer je  $|x - y| = |y - x|$ . Dakle, relacija je simetrična.

Tranzitivnost: Pitamo se da li  $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})((|x - y| < 5 \text{ i } |y - z| < 5) \implies |x - z| < 5)$ ?

Ako je  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,  $z = 5$ , imamo  $|x - y| = 2 < 5$  i  $|y - z| = 3 < 5$ , no  $|x - z| = 5$ , pa relacija nije tranzitivna.

Antisimetričnost: Pitamo se da li  $(\forall x, y \in \mathbb{R})((|x - y| < 5 \text{ i } |y - x| < 5) \implies x = y)$ ?

Kontraprimjer za ovo je  $x = 1$ ,  $y = 2$ , pa relacija nije antisimetrična.

Irefleksivnost: Pitamo se da li  $(\forall x \in \mathbb{R})(|x - x| \geq 5)$ ?

Ovo ne vrijedi jer  $|x - x| = 0$ , pa relacija nije irefleksivna.

(d) Refleksivnost: Pitamo se da li  $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x^2 = 1)$ ?

Jednakost  $x^2 + x^2 = 1$  ne vrijedi za  $x = 2$ , pa relacija nije refleksivna.

Simetričnost: Pitamo se da li  $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x^2 + y^2 = 1 \implies y^2 + x^2 = 1)$ ?

Ovo vrijedi jer je  $x^2 + y^2 = y^2 + x^2$ . Dakle, relacija je simetrična.

Tranzitivnost: Pitamo se da li  $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})((x^2 + y^2 = 1 \text{ i } y^2 + z^2 = 1) \implies x^2 + z^2 = 1)$ ?

Ako je  $x = z = 1, y = 0$  imamo  $x^2 + y^2 = 1$  i  $y^2 + z^2 = 1$ , no  $x^2 + z^2 = 2$ , pa relacija nije tranzitivna.

Antisimetričnost: Pitamo se da li  $(\forall x, y \in \mathbb{R})((x^2 + y^2 = 1 \text{ i } y^2 + x^2 = 1) \implies x = y)$ ?

Kontraprimjer za ovo je  $x = 1, y = 0$ , pa relacija nije antisimetrična.

Irefleksivnost: Pitamo se da li  $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x^2 \neq 1)$ ?

Za  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  imamo  $x^2 + x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ , pa relacija nije irefleksivna.

- (e) Kako  $x^2 + y^2 = 0$  vrijedi samo za  $x = y = 0$ , vidimo da je  $\rho_5 = \{(0, 0)\}$ . Ova relacija je simetrična, tranzitivna i antisimetrična, a nije refleksivna ni irefleksivna.

□

**Suprotna relacija** relacije  $\rho$  je relacija  $\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}$ . Drugim riječima:

$$(y, x) \in \rho^{-1} \iff (x, y) \in \rho$$

**Zadatak 4.** Neka je  $\rho$  relacija na  $A$ . Dokažite:

- (1)  $\rho = \rho^{-1} \iff \rho$  je simetrična
- (2)  $\rho$  je tranzitivna  $\iff \rho^{-1}$  je tranzitivna
- (3)  $\rho$  je antisimetrična  $\iff \rho \cap \rho^{-1} \subseteq \{(x, x) \mid x \in A\}$

*Rješenje.*

- (1)  $\implies$  Pretpostavimo da je  $\rho = \rho^{-1}$ .  
Neka su  $x, y \in A$  takvi da je  $(x, y) \in \rho$ . Tada po definiciji  $\rho^{-1}$  imamo  $(y, x) \in \rho^{-1}$ , a zbog  $\rho = \rho^{-1}$  vidimo  $(y, x) \in \rho$ . Dakle, za sve  $x, y \in A$  takve da je  $(x, y) \in \rho$  vrijedi  $(y, x) \in \rho$ , pa je  $\rho$  simetrična.
- $\impliedby$  Pretpostavimo da je  $\rho$  simetrična.  
Dokažimo da je  $\rho = \rho^{-1}$ . Treba dokazati dvije inkluzije:
  - $\subseteq$  Neka je  $(x, y) \in \rho$ . Tada zbog simetričnosti od  $\rho$  vrijedi  $(y, x) \in \rho$ , a onda po definiciji  $\rho^{-1}$  slijedi  $(x, y) \in \rho^{-1}$ . Dakle  $\rho \subseteq \rho^{-1}$ .
  - $\supseteq$  Neka je  $(x, y) \in \rho^{-1}$ . Tada po definiciji  $\rho^{-1}$  slijedi  $(y, x) \in \rho$ , a zbog simetričnosti od  $\rho$  vrijedi  $(x, y) \in \rho$ . Dakle  $\rho^{-1} \subseteq \rho$ .
- (2)  $\implies$  Neka je  $\rho$  tranzitivna.  
Pretpostavimo da su  $x, y, z \in A$  takvi da je  $(x, y), (y, z) \in \rho^{-1}$ . Tada po definiciji  $\rho^{-1}$  imamo

$(y, x), (z, y) \in \rho$ . Zbog tranzitivnosti od  $\rho$  vrijedi  $(z, x) \in \rho$ , a onda  $(x, z) \in \rho^{-1}$ . Zaključujemo da je  $\rho^{-1}$  tranzitivna.

⇐ Drugi smjer se dokazuje potpuno isto kao prvi uz zamjenu  $\rho$  i  $\rho^{-1}$ .

(3) ⇒ Pretpostavimo da je  $\rho$  antisimetrična.

Da bismo dokazali inkluziju  $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \{(x, x) \mid x \in A\}$ , uzmimo  $(x, y) \in \rho \cap \rho^{-1}$ . Imamo  $(x, y) \in \rho$ , a zbog  $(x, y) \in \rho^{-1}$  vrijedi i  $(y, x) \in \rho$ . Kako je  $(x, y) \in \rho$  i  $(y, x) \in \rho$ , zbog antisimetričnosti od  $\rho$  slijedi  $x = y$ , što upravo znači da je  $(x, y) \in \{(x, x) \mid x \in A\}$ .

⇐ Pretpostavimo da je  $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \{(x, x) \mid x \in A\}$ .

Kako bi dokazali antisimetričnost od  $\rho$ , neka su  $x, y \in A$  takvi da je  $(x, y), (y, x) \in \rho$ . Iz  $(y, x) \in \rho$  slijedi  $(x, y) \in \rho^{-1}$ , a onda imamo  $(x, y) \in \rho \cap \rho^{-1}$ . Sada po pretpostavci vrijedi

$$(x, y) \in \{(x, x) \mid x \in A\},$$

pa je  $x = y$ . Dakle,  $\rho$  je antisimetrična.

□

**Particija skupa**  $S$  je skup međusobno disjunktnih nepraznih podskupova od  $S$  koji u uniji daju  $S$ . Odnosno,  $\mathcal{F} = \{S_i \mid i \in I\}$  je particija skupa  $S$  ako:

- $\emptyset \neq S_i \subseteq S$ , za svaki  $i \in I$
- $S_i \cap S_j = \emptyset$ , za sve  $i, j \in I$  takve da je  $i \neq j$
- $\bigcup_{i \in I} S_i = S$

**Zadatak 5.** Odredite sve particije skupa  $\{1, 2, 3\}$ .

*Rješenje.*  $\{\{1, 2, 3\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

□

**Zadatak 6.** Koliko ima particija skupa  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  na dva skupa?

*Rješenje.*  $\{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}\}, \{\{2\}, \{1, 3, 4, 5\}\}, \dots, \{\{5\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$   
 $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}, \dots, \{\{4, 5\}, \{1, 2, 3\}\}$

Ukupno ih je 15.

□

Neka je  $\sim$  relacija ekvivalencije na skupu  $S$  i  $x \in S$ . Skup

$$[x] = \{y \in S \mid x \sim y\}$$

nazivamo **klasa ekvivalencije** određena elementom  $x$ . Skup

$$S/\sim = \{[x] \mid x \in S\}$$

naziva se **kvocijentni skup** skupa  $S$  obzirom na relaciju  $\sim$ .

Vrijedi:



- $x \in [x]$ , za svaki  $x \in S$
- $x \sim y \implies [x] = [y]$
- $x \not\sim y \implies [x] \cap [y] = \emptyset$

Iz ovoga vidimo da je  $S/\sim$  particija skupa  $S$ . Dakle svaka relacija ekvivalencije određuje jednu particiju skupa  $S$ . Vrijedi i obratno, svaka particija određuje jednu relaciju ekvivalencije na skupu  $S$ . To ćemo dokazati u sljedećem zadatku.

**Zadatak 7.** Neka je  $\mathcal{F} = \{S_i \mid i \in I\}$  particija skupa  $S$ . Definiramo relaciju  $\sim$  na  $S$  ovako:

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists i \in I) x, y \in S_i$$

Dokažite da je  $\sim$  relacija ekvivalencije na  $S$  čiji kvocijentni skup je  $\mathcal{F}$ .

*Rješenje.* Dokazujemo refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost relacije  $\sim$ .

Refleksivnost: Kako je  $\bigcup_{i \in I} S_i = S$ , za svaki  $x \in S$  postoji  $i \in I$  takav da je  $x \in S_i$ , a onda  $x \sim x$ .

Simetričnost: Očito je iz definicije da je  $\sim$  simetrična.

Tranzitivnost: Neka je  $x \sim y$  i  $y \sim z$ . To znači da postoje  $i, j \in I$  takvi da  $x, y \in S_i$  i  $y, z \in S_j$ . Kako je  $y \in S_i \cap S_j$ , vidimo da mora biti  $i = j$ , jer su različiti skupovi iz  $\mathcal{F}$  međusobno disjunktne. Dakle imamo  $x, z \in S_i$ , pa  $x \sim z$ .

Sada vidimo da je  $\sim$  relacija ekvivalencije.

Dokažimo sada da za sve  $x \in S$ ,  $i \in I$  vrijedi:

$$x \in S_i \iff [x] = S_i$$

$\implies$  Pretpostavimo da je  $x \in S_i$ . Dokazujemo dvije inkluzije:

$\subseteq$  Neka je  $y \in [x]$ . Tada imamo  $y \sim x$ , pa postoji  $j \in I$  t.d.  $x, y \in S_j$ . Kako već znamo  $x \in S_i$ , mora biti  $i = j$  jer inače  $x \in S_i \cap S_j$ . Dakle  $y \in S_i$ .

$\supseteq$  Neka je sada  $y \in S_i$ . Tada imamo  $x, y \in S_i$ , pa  $x \sim y$ , tj.  $y \in [x]$ .

$\impliedby$  Pretpostavimo  $[x] = S_i$ . Kako je  $x \in [x]$ , mora biti  $x \in S_i$ .

Iz dokazane ekvivalencije imamo da je svaka klasa ekvivalencije element particije  $\mathcal{F}$  i obrnuto.  $\square$

**Zadatak 8.** Na skupu  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  zadana je relacija

$$\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 4)\}.$$

Dokažite da je  $\rho$  relacija ekvivalencije i odredite klase ekvivalencije s obzirom na  $\rho$ .

*Rješenje.* Za domaću zadaću provjerite da je relacija ekvivalencije.

Klase su:  $[1] = \{1, 3\} = [3]$ ,  $[2] = \{2\}$ ,  $[4] = \{4, 5\} = [5]$

**Zadatak 9.** Definirajte relaciju ekvivalencije  $\rho$  na skupu  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  čije su klase ekvivalencije  $\{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}\}$ .

*Rješenje.*

$$\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1), (4, 5), (5, 4), (2, 3), (3, 2)\}$$

**Zadatak 10.** Ispišite klase ekvivalencije relacije

$$\rho = \{(1, 1), (1, 5), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (5, 7), (6, 6), (7, 1), (7, 5), (7, 7)\}.$$

Ako prikazemo  $\rho$  tablicom u kojoj poredamo elemente tako da su susjedni elementi koji su u relaciji, kako izgleda tablica od  $\rho$ ?

*Rješenje.* Klase su:

$$[1] = \{1, 5, 7\} = [5] = [7]$$

$$[2] = \{2, 4\} = [4]$$

$$[3] = \{3\}$$

$$[6] = \{6\}$$

|   | 1 | 5 | 7 | 2 | 4 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |   |   |   |   |
| 5 |   |   |   |   |   |   |   |
| 7 |   |   |   |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |   |   |   |
| 4 |   |   |   |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |   |   |   |
| 6 |   |   |   |   |   |   |   |

## 2 Funkcije

**Funkcija**  $f : A \rightarrow B$  je relacija  $f \subseteq A \times B$  takva da za svaki  $x \in A$  postoji jedinstveni  $y \in B$  takav da je  $(x, y) \in f$ .

$(x, y) \in f$  pišemo  $y = f(x)$ , skup  $A$  zovemo **domena** funkcije  $f$ , a skup  $B$  **kodomena** funkcije  $f$ .

Neki primjeri funkcija:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 5x - 2$
- $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, h(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \text{ paran} \\ 3x + 1, & x \text{ neparan} \end{cases}$

**Slika** funkcije  $f : A \rightarrow B$  je skup  $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$ .

Funkcija  $f : A \rightarrow B$  je

- **injekcija** ako  $f(x_1) = f(x_2)$  povlači  $x_1 = x_2$ .
- **surjekcija** ako je  $\text{Im}(f) = B$ , odnosno ako za svaki  $y \in B$  postoji  $x \in A$  takav da je  $y = f(x)$ .
- **bijekcija** ako je injekcija i surjekcija, odnosno ako za svaki  $y \in B$  postoji jedinstveni  $x \in A$  takav da je  $y = f(x)$ .

**Slika skupa**  $A' \subseteq A$  je skup  $f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}$ .

**Praslika skupa**  $B' \subseteq B$  je skup  $f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$ .

**Zadatak 1.** Ispitajte injektivnost, surjektivnost i bijektivnost funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$  i  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |x|$ .

*Rješenje.*

Injektivnost: Ispitujemo vrijedi li implikacija

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2,$$

odnosno,

$$x_1^2 = x_2^2 \implies x_1 = x_2,$$

za sve  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Ovo očito ne vrijedi primjerice za  $x_1 = 1, x_2 = -1$ , pa  $f$  nije injekcija.

Za  $g$  ispitujemo istinitost implikacije

$$|x_1| = |x_2| \implies x_1 = x_2.$$

Ovo također ne vrijedi - možemo uzeti isti kontraprimjer  $x_1 = 1, x_2 = -1$ , pa zaključujemo da ni  $g$  nije injekcija.

Surjektivnost: Za surjektivnost od  $f$  pitamo se da li za svaki  $y \in \mathbb{R}^+$  postoji  $x \in \mathbb{R}$  takav da je  $y = x^2$ . Uočimo da je zbog  $y \geq 0$  dobro definiran  $\sqrt{y}$ , pa za  $x = \sqrt{y}$  imamo  $x^2 = y$ . Dakle,  $f$  je surjekcija.

Za surjektivnost od  $g$  provjeravamo da li za svaki  $y \in \mathbb{R}$  postoji  $x \in \mathbb{R}$  takav da je  $y = |x|$ . Budući da je  $|x| \geq 0$ , za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , vidimo da primjerice za  $y = -1$  takav  $x$  ne postoji. Stoga  $g$  nije surjekcija.

Uočimo vrijedi:

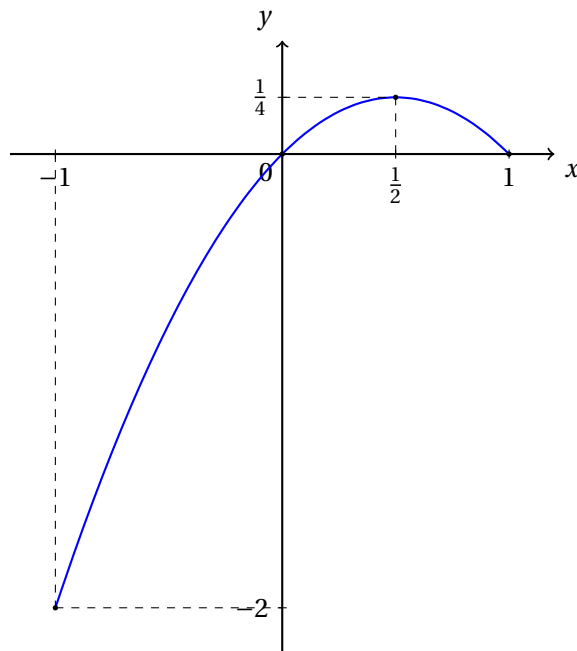
- $f|_{\mathbb{R}^+}$  je bijekcija
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  je surjekcija
- $g|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  je bijekcija

□

**Zadatak 2.** Zadana je funkcija  $f : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle -2, 2 \rangle$ ,  $f(x) = x - x^2$ . Odredite  $B \subseteq \langle -2, 2 \rangle$  takav da  $g : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow B$ , zadana istim pravilom kao  $f$ , bude surjekcija. Zatim odredite  $A \subseteq \langle -1, 1 \rangle$  t.d.  $h : A \rightarrow B$ , zadana istim pravilom, bude bijekcija.

*Rješenje.*  $f(x) = -x^2 + x$  je kvadratna funkcija, pa je njen graf parabola.

Nultočke su joj 0 i 1, a tjeme  $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ . Nadalje kako  $a = -1 < 0$ , parabola je otvorom okrenuta prema dolje, te je  $f(-1) = -2$ . Iz svega navedenog možemo skicirati graf funkcije:



Iz grafa vidimo da je slika funkcije  $f$  interval  $\langle -2, \frac{1}{4} \rangle$ , pa je to traženi  $B$ . Nadalje, vidimo da je slika intervala  $\langle -1, \frac{1}{2} \rangle$  jednaka  $B$ . Osim toga, na tom intervalu svi pravci paralelni s  $x$ -osi sijeku graf u točno jednoj točki, pa je na tom intervalu funkcija injektivna. Dakle,  $A = \langle -1, \frac{1}{2} \rangle$ .  $\square$

**Zadatak 3.** Odredite maksimalne skupove  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  takve da je s

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

zadana bijekcija  $f : A \rightarrow B$ .

*Rješenje.* Da bi izraz  $f(x)$  bio dobro definiran, vidimo da mora biti  $x \neq 2$ . Dakle, svakako  $2 \notin A$ . Prvo odredimo najveći skup na kojem je  $f$  injektivna, odnosno odredimo za koji skup  $A$  vrijedi:

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2).$$

Računamo:

$$\begin{aligned} \frac{x_1+1}{x_1-2} &= \frac{x_2+1}{x_2-2} \\ x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 2 &= x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 2 \\ 3x_2 &= 3x_1 \\ x_2 &= x_1 \end{aligned}$$

Slijedi da gornja implikacija vrijedi za sve  $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ , dakle  $A = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Sada odredimo sliku te funkcije, tj. skup  $B$  takav da vrijedi

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)y = f(x).$$

Računamo:

$$\begin{aligned}y &= \frac{x+1}{x-2} \\xy - 2y &= x+1 \\x(y-1) &= 2y+1 \\x &= \frac{2y+1}{y-1}, \text{ za } y \neq 1\end{aligned}$$

Uočimo da je  $\frac{2y+1}{y-1} \neq 2$ , pa za  $y \neq 1$  postoji  $x \in A$  t.d.  $y = f(x)$ . Dakle,  $B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

□

**Prirodna domena** funkcije  $f$  je najveći skup na kojem možemo odrediti vrijednost  $f(x)$ . Označavamo je s  $D_f$ .

**Zadatak 4.** Odredite prirodnu domenu i sliku funkcije  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ . Je li  $f$  injekcija na prirodnoj domeni? Odredite  $f(\langle 1, +\infty \rangle)$  i  $f(\langle -1, 0 \rangle)$ .

**Zadatak 5.** Ako je  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$  odredite  $D_f$  i  $f^{-1}(\langle -\infty, -2 \rangle)$ .

**Zadatak 6.** Skicirajte grafove funkcija te odredite  $f(A)$  i  $f^{-1}(B)$  ako je:

(a)  $f(x) = x - 5$ ,  $A = [0, 1]$ ,  $B = \langle -3, -1 \rangle$

(b)  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $A = \langle -1, 1 \rangle$ ,  $B = [4, 5]$

Neka su  $f: A \rightarrow B$  i  $g: B \rightarrow C$  funkcije.

**Kompozicija** funkcija  $f$  i  $g$  je funkcija  $g \circ f: A \rightarrow C$  definirana s  $g \circ f(x) = g(f(x))$ .

**Zadatak 7.** Neka su  $f: A \rightarrow B$  i  $g: B \rightarrow C$  funkcije. Dokažite:

- (i) Ako su  $f$  i  $g$  injekcije, tada je i  $g \circ f$  injekcija.
- (ii) Ako su  $f$  i  $g$  surjekcije, tada je i  $g \circ f$  surjekcija.
- (iii) Ako je  $g \circ f$  injekcija, tada je i  $f$  injekcija.
- (iv) Ako je  $g \circ f$  surjekcija, tada je i  $g$  surjekcija.

**Zadatak 8.** Neka su  $f: A \rightarrow B$  i  $g: B \rightarrow C$  funkcije. Dokažite:

- (i)  $(g \circ f)(S) = g(f(S))$ , za svaki  $S \subseteq A$ .
- (ii)  $(g \circ f)^{-1}(T) = f^{-1}(g^{-1}(T))$ , za svaki  $T \subseteq C$ .

*Rješenje.*

- (i)  $\subseteq$  Neka je  $y \in (g \circ f)(S)$ . To znači da postoji  $x \in S$  takav da je  $y = g \circ f(x) = g(f(x))$ . Kako je  $f(x) \in f(S)$ , vidimo da je  $y \in g(f(S))$ .
- $\supseteq$  Neka je  $y \in g(f(S))$ . Tada je  $y = g(z)$ , za neki  $z \in f(S)$ . Dalje vidimo da je  $z = f(x)$ , za neki  $x \in S$ . Slijedi da je  $y = g(f(x)) = g \circ f(x)$ , pa je  $y \in (g \circ f)(S)$ .
- (ii)  $\subseteq$  Neka je  $x \in (g \circ f)^{-1}(T)$ . To znači da je  $g \circ f(x) \in T$ , odnosno  $g(f(x)) \in T$ . Iz ovoga slijedi da je  $f(x) \in g^{-1}(T)$ , a onda  $x \in f^{-1}(g^{-1}(T))$ .
- $\supseteq$  Neka je  $x \in f^{-1}(g^{-1}(T))$ . To znači da je  $f(x) \in g^{-1}(T)$ , a onda  $g(f(x)) \in T$ , odnosno  $g \circ f(x) \in T$ . Iz ovoga slijedi  $x \in (g \circ f)^{-1}(T)$ .

**Zadatak 9.** Zadanoj funkciji odredite sliku tako da ju prikazete kao kompoziciju funkcija.

- (a)  $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 + 5x^2 + 6$
- (b)  $f: \langle -1, 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 3|x| + 1$

**Zadatak 10.** Neka je  $f(x) = 4^x - 2^{x+1} - 3$ . Odredite  $f([0, 2))$  i  $f^{-1}(\langle 5, 45 \rangle)$ .

**Inverzna funkcija** funkcije  $f: A \rightarrow B$  je funkcija  $f^{-1}: B \rightarrow A$  takva da je  $f \circ f^{-1} = id_B$  i  $f^{-1} \circ f = id_A$ .

Inverzna funkcija postoji ako i samo ako je  $f$  bijekcija.

Za funkciju  $f: A \rightarrow B$  kažemo da je:

- **strogo rastuća** ako  $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$
- **rastuća** ako  $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2))$
- **strogo padajuća** ako  $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2))$
- **padajuća** ako  $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2))$

Uočite da je svaka strogo monotona funkcija injekcija!

**Zadatak 11.** Ispitajte je li funkcija  $f(x) = x^4 - 4x^2 - 5$  injekcija na zadanom intervalu i ako jest, odredite joj sliku i inverz.

- (a)  $[2, 3)$
- (b)  $[1, 2]$

**Zadatak 12.** Odredite intervale monotonosti sljedećih funkcija:

(a)  $f(x) = 2^{2x+4}$

(b)  $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 + 1)$

(c)  $f(x) = |2^x - 4|$

**Zadatak 13.** Ispitajte omeđenost sljedećih funkcija na njihovoj prirodnoj domeni.

(a)  $f(x) = 5 \sin(\pi x + \sqrt{2})$

(d)  $f(x) = -3^{-x+2}$

(b)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

(e)  $f(x) = \log\left(\frac{3x+2}{2-3x}\right)$

(c)  $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+4}$

(f)  $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+2}{x-1}\right) + \sqrt{1-x^2}$



### 3 Jednadžbe i nejednadžbe

**Zadatak 1.** Riješite jednadžbu:

$$\frac{7}{x^2-1} + \frac{8}{x^2-2x+1} = \frac{25-9x}{x^3-x^2-x+1}$$

*Rješenje.* Uočimo da je  $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$  i

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2-1),$$

pa da bi svi izrazi u jednadžbi bili dobro definirani, mora biti  $x \neq \pm 1$ . Pomnožimo jednadžbu s  $(x-1)^2(x+1) = (x-1)(x^2-1)$ , pa dobivamo:

$$7(x-1) + 8(x+1) = 25-9x$$

$$15x+1 = 25-9x$$

$$x = 1$$

Kako smo već prije zaključili  $x \neq 1$ , jednadžba nema rješenja.

**Zadatak 2.** Riješite jednadžbu u ovisnosti o parametrima  $a$  i  $b$ :

$$x(a-x) + (b-x)^2 = a + b^2 - 4$$

*Rješenje.* Imamo:

$$ax - \cancel{x^2} + \cancel{b^2} - 2bx + \cancel{x^2} = a + \cancel{b^2} - 4$$

$$x(a-2b) = a-4$$

Imamo dva slučaja:

- $a-2b \neq 0$

Tada smijemo jednadžbu podijeliti s  $a-2b$ , pa je rješenje  $x = \frac{a-4}{a-2b}$ .

- $a-2b = 0$

Tada je lijeva strana posljednje jednadžbe jednaka 0, pa postojanje rješenja ovisi o  $a-4$ . Ako je  $a-4 \neq 0$ , onda rješenje ne postoji, a ako je  $a-4 = 0$ , tj.  $a = 4$ , tada je rješenje proizvoljan  $x \in \mathbb{R}$ .

**Zaključak:** za  $a \neq 2b$ , imamo jedinstveno rješenje  $x = \frac{a-4}{a-2b}$ , za  $a = 2b$  nema rješenja, osim u slučaju kad je  $a = 4$ ,  $b = 2$  kada su svi realni brojevi rješenja.

**Zadatak 3.** Riješite jednađbu:

$$\left| x + \left| \frac{1}{2}x + \left| \frac{1}{3}x - 1 \right| \right| \right| = 1$$

*Rješenje.* Označimo

$$f(x) = \left| x + \left| \frac{1}{2}x + \left| \frac{1}{3}x - 1 \right| \right| \right|.$$

Kako bismo pojednostavnili izraz, pogledajmo prvo slučajeve prema vrijednosti  $\left| \frac{1}{3}x - 1 \right|$ .

- $\frac{1}{3}x - 1 \geq 0$ , tj.  $x \geq 3$

U ovom slučaju imamo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left| x + \left| \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x - 1 \right| \right| \\ &= \left| x + \left| \frac{5}{6}x - 1 \right| \right| \end{aligned}$$

Kako je  $x \geq 3$ ,  $\frac{5}{6}x \geq \frac{5}{2} > 1$ , pa je

$$\left| \frac{5}{6}x - 1 \right| = \frac{5}{6}x - 1,$$

a onda

$$f(x) = \left| \frac{11}{6}x - 1 \right|.$$

Ponovno zbog  $x \geq 3$ , vrijedi

$$f(x) = \frac{11}{6}x - 1,$$

pa je jednađba  $f(x) = 1$  zapravo jednađba

$$\frac{11}{6}x - 1 = 1,$$

čije jedino rješenje u  $\mathbb{R}$  je  $x = \frac{12}{11} < 3$ . No ovo nije rješenje jer smo do ove jednađbe došli pretpostavkom da je  $x \geq 3$ . Dakle, nema rješenja  $\geq 3$ .

- $\frac{1}{3}x - 1 < 0$ , tj.  $x < 3$

U ovom slučaju je

$$\begin{aligned} f(x) &= \left| x + \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x + 1 \right| \right| \\ &= \left| x + \left| \frac{1}{6}x + 1 \right| \right| \end{aligned}$$

Ponovno imamo slučajeve:

- $\frac{1}{6}x + 1 \geq 0$ , tj.  $x \geq -6$

Tada je

$$f(x) = \left| \frac{7}{6}x + 1 \right|.$$

Pa je  $f(x) = 1$  ako vrijedi  $\frac{7}{6}x + 1 = 1$  ili  $\frac{7}{6}x + 1 = -1$ , odnosno ako je  $x = 0$  ili  $x = -\frac{12}{7}$ . Oba rješenja su  $< 3$  i  $\geq -6$ , pa su to rješenja jednađbe.

- $\frac{1}{6}x + 1 < 0$ , tj.  $x < -6$

Tada je

$$f(x) = \left| \frac{5}{6}x - 1 \right|.$$

Tražimo  $x$  takve da  $\frac{5}{6}x - 1 = 1$  ili  $\frac{5}{6}x - 1 = -1$ , a to su  $x = \frac{12}{5}$  i  $x = 0$ . Nijedno od tih rješenja nije  $< -6$ , pa nisu rješenja u ovom slučaju.

Dakle, rješenja jednadžbe su  $x = 0$  i  $x = -\frac{12}{7}$ .

**Zadatak 4.** Riješite nejednadžbu:

$$\sqrt{4-x^2} > 2-2x$$

*Rješenje.* Da bi korijen bio dobro definiran, mora biti  $4-x^2 \geq 0$ , odnosno  $x \in [-2, 2]$ .

Kako bi se riješili korijena, htjeli bi kvadrirati obje strane nejednadžbe, no to ne možemo ukoliko nismo sigurni da su obje strane istog predznaka. Stoga razlikujemo slučajeve:

- $2-2x \geq 0$ , tj.  $x \leq 1$

Kako rješenja moraju biti u  $[-2, 2]$ , imamo da u ovom slučaju promatramo  $x \in [-2, 1]$ . Tada su lijeva i desna strana nejednakosti  $\geq 0$ , pa kvadriranjem dobivamo da mora biti

$$\begin{aligned} 4-x^2 &> (2-2x)^2 = 4-8x+4x^2 \\ 0 &> 5x^2-8x = x(5x-8), \end{aligned}$$

što vrijedi za  $x \in \langle 0, \frac{8}{5} \rangle$ . Kako je i  $x \in [-2, 1]$ , zaključujemo da su u ovom slučaju rješenja  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ .

- $2-2x < 0$ , tj.  $x > 1$

U ovom slučaju je  $x \in \langle 1, 2 \rangle$  i vidimo da je svaki takav  $x$  rješenje jer je

$$\sqrt{4-x^2} \geq 0 > 2-2x.$$

Rješenja nejednadžbe su  $x \in \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle = \langle 0, 2 \rangle$ .

**Zadatak 5.** Riješite nejednadžbu:

$$|x^3-x^2| < |x^2+x|$$

*Rješenje.* Razlikujemo 4 slučaja u ovisnosti o predznacima vrijednosti pod apsolutnim vrijednostima. Slučajeve pročitamo iz tablice:

|            | -1 |   | 0 |   | 1 |   |
|------------|----|---|---|---|---|---|
| $x$        | -  | - | • | + | + | + |
| $x-1$      | -  | - | - | - | • | + |
| $x+1$      | -  | • | + | + | + | + |
| $x^2(x-1)$ | -  | - | • | - | • | + |
| $x(x+1)$   | +  | • | - | • | + | + |

Imamo slučajeve:

- $x < -1$

Rješavamo nejednadžbu:

$$-x^3 + x^2 < x^2 + x$$

$$x^3 + x > 0$$

$$x(x^2 + 1) > 0$$

Kako je  $x^2 + 1 > 0$ , a  $x < 0$ , ovo je nemoguće.

- $x \in [-1, 0)$

Imamo:

$$-x^3 + x^2 < -x^2 - x$$

$$x^3 - 2x^2 - x > 0$$

$$x(x^2 - 2x - 1) > 0$$

Kako je u ovom slučaju  $x < 0$ , ovo vrijedi za  $x^2 - 2x - 1 < 0$ , a to vrijedi za  $x \in \langle 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \rangle$ . U ovom slučaju rješenja su  $x \in \langle 1 - \sqrt{2}, 0 \rangle$

- $x \in [0, 1)$

Imamo:

$$-x^3 + x^2 < -x^2 + x$$

$$x(x^2 + 1) > 0$$

Zbog  $x^2 + 1 > 0$ , mora biti  $x > 0$ , dakle rješenja su  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ .

- $x \geq 1$

Imamo:

$$x^3 - x^2 < x^2 + x$$

$$x(x^2 - 2x - 1) < 0$$

Zbog  $x > 0$ , ovo vrijedi za  $x^2 - 2x - 1 < 0$ , odnosno  $x \in \langle 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \rangle$ . U ovom slučaju rješenja su  $x \in [1, 1 + \sqrt{2})$ .

Zaključujemo da su rješenja

$$x \in \langle 1 - \sqrt{2}, 0 \rangle \cup \langle 0, 1 \rangle \cup [1, 1 + \sqrt{2}) = \langle 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \rangle \setminus \{0\}.$$

**Zadatak 6.** Riješite nejednadžbu:

$$\frac{1}{\log_{x-3}(x+1)} + \frac{1}{\log_x(x^2+2x+1)} < 1$$

*Rješenje.* Da bi svi izrazi bili definirani, mora biti:

- $x - 3 > 0$ ,  $x - 3 \neq 1$ ,  $x > 0$ ,  $x \neq 1$
- $x + 1 > 0$ ,  $x + 1 \neq 1$  (da bi prvi nazivnik bio  $\neq 0$ ),  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 > 0$ ,  $(x + 1)^2 \neq 1$

Vidimo da je sve ovo zadovoljeno za  $x > 3$  i  $x \neq 4$ . Za takve  $x$  imamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_{x-3}(x+1)} + \frac{1}{2\log_x(x+1)} &< 1 \\ \log_{x+1}(x-3) + \frac{1}{2}\log_{x+1}x &< 1 \\ \log_{x+1}(\sqrt{x}(x-3)) &< 1 = \log_{x+1}(x+1) \end{aligned}$$

Kako je  $x > 3$ ,  $x + 1 > 1$ , pa je  $\log_{x+1}$  rastuća funkcija, dakle možemo zaključiti

$$\sqrt{x}(x-3) < x+1.$$

Kako su obje strane pozitivne, smijemo kvadrirati, pa sređivanjem dobivamo

$$(x-1)(x^2-6x+1) < 0.$$

Kako je  $x-1 > 3-1 > 0$ , mora biti  $x^2-6x+1 < 0$ , a to vrijedi za  $x \in \langle 3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2} \rangle$ . Zaključujemo da su rješenja

$$x \in \langle 3, 3+2\sqrt{2} \rangle \setminus \{4\}.$$

**Zadatak 7.** Riješite u ovisnosti o  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$$

**Zadatak 8.** Riješite jednadžbe:

$$(a) \quad 9^x - 15^x - 2 \cdot 25^x = 0$$

$$(b) \quad 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

*Rješenje.*

(a) Jednadžbu možemo zapisati ovako:

$$(3^x)^2 - 3^x \cdot 5^x - 2 \cdot (5^x)^2 = 0$$

Dijeljenjem s  $(5^x)^2$  dobivamo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{5}\right)^x - 2 = 0$$

Uz supstituciju:  $t = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ , imamo kvadratnu jednadžbu:

$$t^2 - t - 2 = 0$$

Rješenja su  $t = -1$  i  $t = 2$ . Kako  $\left(\frac{3}{5}\right)^x > 0$ , vidimo da mora biti

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = t = 2,$$

pa je rješenje  $x = \log_{\frac{3}{5}} 2$ .

(b) Pokušajmo jednadžbu svesti na oblik  $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ .

$$\begin{aligned} 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} &= 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \\ 4^x - 3^x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} &= 3^x \cdot \sqrt{3} - 4^x \cdot \frac{1}{2} \\ 4^x \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) &= 3^x \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ 4^x \cdot \frac{3}{2} &= 3^x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 4^x \cdot \frac{1}{8} &= 3^x \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ 4^{x-\frac{3}{2}} &= 3^{x-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da je  $x - \frac{3}{2} = 0$ , odnosno  $x = \frac{3}{2}$ .

**Zadatak 9.** Riješite nejednadžbe:

(a)  $2 \sin^2 x - \sin x \leq 1$

(b)  $0.2^{\cos 2x} - \frac{1}{25^{\cos^2 x}} < 4 \cdot 125^{-\frac{1}{2}}$

*Rješenje.*

(a) Uz supstituciju  $t = \sin x$ , imamo

$$2t^2 - t - 1 \leq 0,$$

što vrijedi za  $t \in [-\frac{1}{2}, 1]$ . Dakle rješenja su svi brojevi  $x \in \mathbb{R}$  takvi da

$$-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1.$$

Ovo vrijedi za

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right].$$

(b) Vrijedi  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$ , pa jednadžbu transformiramo ovako:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{5}\right)^{2 \cos^2 x - 1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{2 \cos^2 x} &< 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \\ (5 - 1) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2 \cos^2 x} &< 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{2 \cos^2 x} &< \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Kako je  $x \mapsto \left(\frac{1}{5}\right)^x$  padajuća funkcija, zaključujemo:

$$2 \cos^2 x > \frac{3}{2},$$

odnosno  $\cos^2 x > \frac{3}{4}$ , što vrijedi za  $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$  i  $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Dakle rješenja su:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( \left\langle -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right\rangle$$

**Zadatak 10.** Riješite jednađbe:

(a)  $8 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3$

(b)  $3 \sin x - 4 \cos x = 2$

(c)  $2 \sin x = 5x^2 + 2x + 3$

*Rješenje.*

(a) Zapišimo jednađbu ovako:

$$\begin{aligned} 8 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x &= 3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x \\ 5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x &= 0 \end{aligned}$$

Sada bismo htjeli podijeliti s  $\cos^2 x$  kako bismo dobili kvadratnu jednađbu u  $\operatorname{tg} x$ , no prvo provjerimo jesu li  $x \in \mathbb{R}$  takvi da je  $\cos x = 0$  moguća rješenja.

Ako je  $\cos x = 0$ , onda je  $\sin x = \pm 1$ , pa imamo da mora vrijediti

$$5 = 5 \sin^2 x = 0,$$

što je očito nemoguće. Dakle  $\cos x \neq 0$ , pa smijemo jednađbu podijeliti s  $\cos^2 x$ . Dobivamo da je

$$5 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0,$$

pa je  $\operatorname{tg} x = 1$  ili  $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{5}$ . Dakle, rješenja su:

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{5}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(b) Koristimo univerzlnu supstituciju  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Tada je

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Kad to uvrstimo u jednađbu, dobivamo:

$$3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - 4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2$$

Kako je  $1+t^2 \neq 0$ , pomnožimo s  $1+t^2$  i sređivanjem dobivamo kvadratnu jednađbu

$$t^2 + 3t - 3 = 0,$$

čija su rješenja  $\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$ . Dakle, imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{x}{2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \\ \frac{x}{2} &= \operatorname{arctg} \left( \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x &= 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

(c) Označimo  $f(x) = 2 \sin x$  i  $g(x) = 5x^2 + 2x + 3$ . Uočimo da  $g$  ima tjeme u  $(-\frac{1}{5}, \frac{14}{5})$ . Dakle

$$g(x) \geq \frac{14}{5} > 2 \geq 2 \sin x = f(x).$$

Zaključujemo da jednačina  $f(x) = g(x)$  nema rješenje.

**Zadatak 11.** (1. kolokvij 2023.) Odredite sve vrijednosti parametra  $a \in \mathbb{R}$  za koje nejednakost

$$a \cdot 3^{2x} + (a-1) \cdot 3^{x+1} \cdot 2^x + a \cdot 4^x > 2^{2x}$$

vrijedi za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

*Rješenje.* Prvo sredimo nejednakost na sljedeći način:

$$\begin{aligned}a \cdot 3^{2x} + 3(a-1) \cdot 3^x \cdot 2^x + (a-1) \cdot 2^{2x} &> 0 \quad / : 2^{2x} \\ a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 3(a-1) \left(\frac{3}{2}\right)^x + (a-1) &> 0 \\ at^2 + 3(a-1)t + (a-1) &> 0, \quad \text{za } t = \left(\frac{3}{2}\right)^x\end{aligned}$$

Kako je slika funkcije  $x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$  jednaka  $\langle 0, +\infty \rangle$ , zapravo se pitamo kada je

$$at^2 + 3(a-1)t + (a-1) > 0, \quad \forall t > 0.$$

Definiramo funkciju  $f(t) = at^2 + 3(a-1)t + (a-1)$ . Ako je  $a \neq 0$ , tada se radi o kvadratnoj funkciji. Provjerimo je li moguće  $a = 0$ . Tada je  $f(t) = -3t - 1$ , što je  $< 0$  za npr.  $t = 1$ , dakle  $a \neq 0$ . Sada razlikujemo 2 slučaja s obzirom na graf od  $f$ :

- $a < 0$

U ovom slučaju je graf od  $f$  parabola otvorom okrenuta prema dolje. Takva parabola je ili potpuno ispod  $x$ -osi ili siječe  $x$ -os u jednoj ili dvije točke. Dakle, ili je  $f(t) \leq 0$ , za sve  $t \in \mathbb{R}$  ili je  $f(t) > 0$  samo za  $t \in \langle x_1, x_2 \rangle$ , gdje su  $x_1$  i  $x_2$  nultočke od  $f$ . Dakle, u ovom slučaju ne može biti  $f(t) > 0$ , za sve  $t > 0$ .

- $a > 0$

U ovom slučaju je graf parabola otvorom okrenuta prema gore. Takva parabola je ili potpuno iznad  $x$ -osi ili siječe  $x$ -os u jednoj ili dvije točke. Dakle  $f(t) > 0$  za sve  $t \in \mathbb{R}$  ili  $f(t) > 0$  za  $t \in \langle -\infty, x_1 \rangle \cup \langle x_2, +\infty \rangle$ , gdje su  $x_1$  i  $x_2$  nultočke od  $f$  (moguće jednake).



Da bi vrijedio  $f(t) > 0$ , za sve  $t > 0$ , mora vrijediti ili  $D < 0$  (gdje je  $D$  diskriminanta od  $f$ ) ili  $\langle 0, +\infty \rangle \subseteq \langle x_2, +\infty \rangle$ , što vrijedi akko su nultočke od  $f$  manje ili jednake 0. Analizirajmo navedene slučajeve:

–  $D < 0$

Vrijedi:

$$D = (3(a-1))^2 - 4a(a-1) = 9a^2 - 18a + 9 - 4a^2 + 4a = 5a^2 - 14a + 9$$

Mora biti  $5a^2 - 14a + 9 < 0$ , a to vrijedi za  $a \in \langle 1, \frac{9}{5} \rangle$ .

–  $D \geq 0, x_1, x_2 \leq 0$

Da bi vrijedilo  $D \geq 0$ , mora biti  $a \leq 1$  ili  $a \geq \frac{9}{5}$ .

Osim toga, imamo:

$$x_1 = \frac{-3(a-1) - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-3(a-1) + \sqrt{D}}{2a}$$

Kako je  $x_2 \geq x_1$ , tražimo  $a$  t.d.  $x_2 \leq 0$ , odnosno

$$\sqrt{D} \leq 3(a-1)$$

Kako je lijeva strana nenegativna, mora biti  $3(a-1) \geq 0$ , odnosno  $a \geq 1$ . Kvadriranjem dobivamo nejednakost:

$$5a^2 - 14a + 9 \leq 9a^2 - 18a + 9,$$

odnosno

$$4a^2 - 4a \geq 0$$

Kako je  $a \geq 1$ , ova nejednakost vrijedi. Uočimo da smo već prije zaključili da je  $a \leq 1$  ili  $a \geq \frac{9}{5}$ , pa su u ovom slučaju rješenja  $a = 1$  ili  $a \geq \frac{9}{5}$ .

Kada napravimo uniju mogućnosti za  $a$  iz navedena dva slučaja, dobivamo da su rješenja  $a \in [1, +\infty)$ .