



Sud ili izjava je malo razumljivo rečenicu čiju istinitost možemo proveriti (tj. za koju možemo proveriti da li je istina ili lažna).

Dan 11.9.2012 je petak.

1.) Danas je petak.

SUD (ISTINA)

2.) Broj 13 je jednak broju 7.

SUD (LAŽ)

3.) $4 + 1 + 1 = 2$

SUD (LAŽ)

4.) $x + 1 = 2$

NIJE SUD

5.) Laku noć!

NIJE SUD

6.) Koje je vreme?

NIJE SUD

7.) Broj $\sqrt{2}$ možemo izdati na decimalnom prikazu broja $\sqrt{2}$ malaziti se 9.

SUD

8.) Izračunajte $15.3^2 + \sqrt{17}$!

NIJE SUD

neke rečenice nisu sudovi. Rečenice su kojima nešto navodimo ili su sudovi. Svaka izjava je istinita ili lažna. Nema izjava koja istinita i lažna i ne postoji izjava koja nije istinita niti lažna.

32. izjava P & $T(P)$ označavamo od P .

$T(P) = 0$ ako je izjava P LAŽ

$T(P) = 1$ ako je izjava P ISTINA

Sudove možemo označavati slovima $P, Q, R, \dots$ ili $x, y, z, \dots$

Od jednostavnih sudova gradimo složene sudove pomoću logičkih veznika.

1) KONJUNKCIJA: $P \wedge Q$, $P \& Q$, $P \cdot Q$

Izjava $P \wedge Q$ je istinita ako i samo ako su obje izjave (i P i Q) istinite.

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

P... Pariz je u Francuskoj

Q... $2+2=5$

$\mathcal{T}(P)=1$

$\mathcal{T}(P \wedge Q)=0$

$\mathcal{T}(Q)=0$

2) DISJUNKCIJA: $P \vee Q$, $P + Q$

Izjava $P \vee Q$ je istinita kad god je barem jedna od izjava P, Q istinita

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

P... Pariz je u Francuskoj

Q... $2+2=5$

$\mathcal{T}(P)=1$

$\mathcal{T}(P \vee Q)=1$

$\mathcal{T}(Q)=0$

3) NEGACIJA: $\neg P$, ne P, $\bar{P}$

$\neg P$ je istinito ako je P lažno i obratno.

P	$\neg P$
1	0
0	1

P = Pariz je u Francuskoj

$\neg P$ = Pariz nije u Francuskoj

T
F

4) IMPLIKACIJA: ako P onda Q, $P \Rightarrow Q$, P povlači Q

$P \Rightarrow Q$ je lažno točno onako kad god je P istina i Q laž.

!

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

P = Danas je ponedjeljak. Pariz je u Engleskoj

Q = Sutra je subota.

~~Ja sam glava~~
 $2+2=5$

$\mathcal{T}(P)=0$

$\mathcal{T}(P \Rightarrow Q)=1$

$\mathcal{T}(Q)=0$

! Druge, $P \Rightarrow Q$ znači:
ako je P istina, onda je Q istina
(za P laž, Q može biti bilo što!)

Ako bismo od
pretpostavili da
laž, možemo
izračunati znači
dobiti i laž:

Ako bismo od istine, ... možemo dobiti

ISTINITOST
IMPLIKACIJE

EKVIVALENCIJA: $P \Leftrightarrow Q$, P ako i samo ako Q, P ako i samo ako Q

Pojma $P \Leftrightarrow Q$ je istinita onda kada su P i Q obje istinite ili obje lažne.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Pariz je u Brazilu $\Leftrightarrow 2+3=6$
~~Danas je snijeda $\Leftrightarrow$ sutra je četvrtak~~

Gornja izjava je istina.

$P \Rightarrow Q$ $(P \Rightarrow Q) \& (Q \Rightarrow P)$

P = hladno je

Q = pada kiša

~~P = hladno je~~, ~~Q = pada kiša~~

Izkažite sljedeće izjave:

- 1.) $\neg P$ = nije hladno
- 2.) $P \wedge Q$ = hladno je i pada kiša
- 3.) $P \vee Q$ = hladno je ili pada kiša
- 4.) $P \Leftrightarrow Q$ = hladno je ako i samo ako pada kiša
- 5.) $P \Rightarrow \neg Q$ = hladno je onda ne pada kiša
- 6.) $Q \vee \neg P$ = pada kiša ili nije hladno $\Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
- 7.) $\neg P \wedge \neg Q$ = nije hladno i ne pada kiša
- 8.) $P \Leftrightarrow \neg Q$ = hladno je ako i samo ako ne pada kiša
- 9.) $\neg(\neg Q)$ = nije istina da ne pada kiša
- 10.) $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow P$ = ako je hladno i ne pada kiša, onda je hladno

od 2. Odredite istinitost sljedećih sudova:

1.) Ako je $3+2=7$, onda je $4+4=8$

$\tau(P)=0, \tau(Q)=1, \tau(P \Rightarrow Q)=1$ ISTINA

2.) Nije istina da je $2+2=5$ ako je $4+4=10$.

$\tau(P)=0, \tau(Q)=0$
 $\tau(P \Leftrightarrow Q)=1, \tau(\neg(P \Leftrightarrow Q))=0$ LAŽ

3.) "Pariz je u Njemačkoj ili je London u Francuskoj"

$\tau(P)=0, \tau(Q)=0, \tau(P \vee Q)=0$ LAŽ

4.) Nije istina da je ($\underbrace{1+1=3}_P$ ili $\underbrace{2+1=3}_Q$)

$$\tau(P)=0$$

$$\tau(Q)=1$$

$$\tau(P \vee Q)=1$$

$$\tau(\neg(P \vee Q))=0$$

LAŽ je

5.) Nije istina ~~da~~ ali je Pariz u Njemačkoj ~~da~~ je, tada London u Francuskoj
 slijedeće:

$$\tau(\neg(P \Rightarrow Q))=?$$

ako je P istina, onda je Q istina
 ako je P neistina, onda je Q neistina

$$\tau(P)=0$$

$$\tau(P \Rightarrow Q)=1, \tau(\neg(P \Rightarrow Q))=0$$

LAŽ

$$\tau(Q)=0$$

zad 3. Provjerite zakone asocijativnosti i distributivnosti za konjunktiju i disjunktiju.

matrice
 tablice
 tablice

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$$

asocijativnost

$$P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

distributivnost

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

tablica

Različita formula
 $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
 i uvijek zasb uvijek

$$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$$

$$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$$

zad 4.: Dokažite da je izjava ~~$(x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y$~~ tautologija,

ti. da je istinita za sve vrednosti x i y

x	y	$x \Rightarrow y$	$x \wedge (x \Rightarrow y)$	$(x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

tablica

↑
 A B
 A ⇒ B
 B

MODUS
 POPELANS

od 5: Dokažite da je izjava $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x)$ istinita

iz opk) za sve vrednosti x i y, tj. da je tautologija.

izjavu bjez uvjeta istinita bez obzira

✓

x	y	$x \Rightarrow y$	$\neg y$	$\neg x$	$\neg y \Rightarrow \neg x$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

ne istinita sastavljeni sudova

"ako je x, onda je y" je ekvivalentno tvrdnji "ako nije y, onda nije x"

od 6: Dokažite da je implikacija tranzitivna, tj. da za bilo koje tri izjave x, y, z izjava

$$\frac{A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$$

$$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$$

je istinita.

g: isprava
nepravilno

x	y	z	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow z$	$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)$	$x \Rightarrow z$	$((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

A, B!

od 7: Dokažite identitete /* prije nego negirane složeni izjave */

negacija složeni izjave treba tablicom

- a) $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow \neg x \vee y$
- b) $\neg(x \wedge y) \Leftrightarrow \neg x \vee \neg y$
- c) $\neg(x \vee y) \Leftrightarrow \neg x \wedge \neg y$
- d) $\neg(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow x \wedge \neg y$
- e) $\neg(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$
- f) $\neg(\neg x) \Leftrightarrow x$

NEGACIJA IMPLIKACIJE
DEBAT PO KONTRADIKTOR

g:

x	y	$x \Rightarrow y$	$\neg x$	$\neg x \vee y$	$\neg y$	$\neg x \vee \neg y$	$x \wedge y$	$\neg(x \wedge y)$	$x \vee y$	$\neg(x \vee y)$	$\neg x \wedge \neg y$
1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1

a) b) c)

~~czelno d) $\neg(x \Rightarrow y) \stackrel{a)}{=} \neg(\neg x \vee y) \stackrel{b)}{=} \neg(\neg x) \wedge \neg y \stackrel{c)}{=} x \wedge \neg y$~~

~~$\neg(x \Leftrightarrow y) = \neg((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)) = \neg(x \Rightarrow y) \vee \neg(y \Rightarrow x) =$~~

~~$\stackrel{a)}{=} (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x) = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$~~

$\uparrow$ d)

$\uparrow$ ow perzodk' zoda, to je kraj 7. zdatko w zlyedejg strunice.

giraufje složenih izjawa

~~BROJ 3 JE PROST I PARAN
Dana je utonak i pada kiše.~~

~~P Q~~

Negacija: Danoz nije utonak ili ne pada kiše

Broj 3 je prost ili je paran

P Q

Neg: Broj 3 nije prost i nije paran

Ako pada kiša, onda su ulice mokre.

P Q

Neg: Pada kiša i ulice nisu mokre

BROJ JE PROST AKO I SAMO AKO JE PARAN

~~Dana je utonak ako i samo ako je jučer bio ponedjeljak~~

~~P 17.9.2012 je utonak ako i samo ako je 16.9.2012 ponedjeljak.~~

~~Q~~

Neg: Danoz je utonak, a jučer nije bio ponedjeljak

nije utonak, a jučer je bio ponedjeljak

$\neg(P \Leftrightarrow Q) = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

Primer: Danoz je utonak, a jučer nije bio ponedjeljak

"injeđi $A \Rightarrow B$:
Vrjeddi li obrat:
Danoz čemu A :
"obratom počinje"

Sud $B \Rightarrow A$ zove se **obrat** suda $A \Rightarrow B$.

Sud $\neg B \Rightarrow \neg A$ zove se **obrat po kontrapoziciji** suda $A \Rightarrow B$.

Obrat ne injeđi: Primer: Ako je broj djeljiv 4, onda je djeljiv 2. Ako je djeljiv 2, to mora biti djeljiv 4! & čini

Napomena: Izjave $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$ nisu jednake.

$A \Rightarrow B \neq B \Rightarrow A$

EKVIVALENTNO $\Leftrightarrow$

Obrat po kontr. je ekvivalentan:

to je broj djeljiv 4, 7, onda je djeljiv 2.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

to je broj djeljiv 4, 7, onda je djeljiv 2.

$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$

$\uparrow$ otefni.

Kvantifikatori (tauci grom ouc.)

Univerzalni kvantifikator: "za svaki" $\forall$

Ekzistencijalni kvantifikator: "postoji" $\exists$

Primer ① Svaki prirodni broj n djeljiv je ± 1 .

$(\forall n \in \mathbb{N})$ n je djeljiv ± 1 $(\forall n \in \mathbb{N})$ $1|n$

② Postoji realan broj koji nije racionalan.

$(\exists x \in \mathbb{R})$ x nije racionalan $(\exists x \in \mathbb{R})$ $x \notin \mathbb{Q}$

Zad 8. Zapišite pomoću simbola sljedeće izjave:

a) Za svaki realan broj postoji prirodan broj koji je veći od njega.

b) Postoji prirodan broj koji je djeljitelj nekog prirodnog broja.

ri: a) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists n \in \mathbb{N})$ $n > x$

b) $(\exists n \in \mathbb{N}) (\forall m \in \mathbb{N})$ n dijeli m

Zad 9. Pokažite nječima i provjerite istinitost:

ist. redosljed) a) $(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists m \in \mathbb{N})$: $n < m$

Za svaki prirodan broj postoji prirodan broj koji je veći od njega. (ISTINA)

b) $(\exists m \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N})$: $n < m$

Postoji prirodan broj koji je veći veći od nekog prirodnog broja. (LAŽ)

Napomena Iz gornjeg zadatka vidimo da je važan redosljed kvantifikatora.

BITAN JE
REDOSLJED!

Zad 10.7 Odredite istinitost sljedećih sudova:

- $(\forall x \in \mathbb{R})(x = x^2)$
- $(\exists x \in \mathbb{R})(x = x^2)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(x+1 > x)$
- $(\exists x \in \mathbb{R})(x+2 = x)$
- $(\exists x \in \mathbb{R})(|x| = 0)$
- $(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N}) \quad y \geq x$
- $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) \quad y \geq x$
- $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad y \geq x$
- $(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\exists x \in \mathbb{R}^+) \quad xy = 1$

$\perp$ $\nearrow$ postojanje x
 $\top$ $\searrow$ $\exists$ egzistencija / barem jedno
 $\top$ dokaz $\forall x$

 $\perp$ kad $\exists$ pitao smo bi...
 $\top$ $\nearrow$ kontradikcija

 $\top$
 $\top$ (primjer takozvan je $x=1$)
 $\perp$ (ne postoji najmanji realni broj)
 $\top$ ($x = \frac{1}{y}$)
 (Malo diskutovati samo izgleda dođe...


 $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

~~XXXXXXXXXX~~

Zad 11 Zapišite formulama sljedeće izjave:

- Svaki prirodan broj manji je od nekog prirodnog broja.
- Postoji prirodan broj veći od svakog prirodnog broja.
- Svaki prirodan broj koji je kvadrat parnog broja je djeljiv s 4.
- Svaki prirodan broj koji je djeljiv s 14 je djeljiv s 2 i s 7.
- Ako je produkt dvaju prirodnih brojeva djeljiv prostim brojem, onda je tim brojem djeljiv barem jedan od tih dvaju brojeva.

y: a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) \quad n < m$

b) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) \quad n > m$

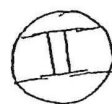
c) $(\forall n \in \mathbb{N})(2 \mid n \Rightarrow 4 \mid n^2)$

d) $(\forall n \in \mathbb{N})(14 \mid n \Rightarrow (2 \mid n \wedge 7 \mid n))$

e) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) ((p \text{ prost} \wedge p \mid n \cdot m) \Rightarrow (p \mid n \vee p \mid m))$

$\Downarrow$
 ili $(\forall n \in \mathbb{N}) ((\exists a \in \mathbb{N})(n = a^2 \wedge 2 \mid a)) \Rightarrow (\exists b \in \mathbb{N})(n = b^2)$

Negirajuće izjave koje sadrže kvantifikatore



- 1) Svaki prirodan broj je paran $(\forall n \in \mathbb{N})$ n je paran
Negacija: Postoji prirodan broj koji nije paran $(\exists n \in \mathbb{N})$ n nije par.
- 2) Postoji prirodan broj koji je negativan $(\exists n \in \mathbb{N})$ $n < 0$
Negacija: Svaki prirodan broj je nenegativan $(\forall n \in \mathbb{N})$ $n \geq 0$
- 3) $(\forall x > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) \frac{1}{n} < x$

$$\forall x (P(x)) \equiv \exists x (\neg P(x))$$

Negacija: $(\exists x > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{n} \geq x$

Napomena: Pri tome negirajuće $\forall$ prelazi u $\exists$ i obrnuto.

od 12. Negirajte slijedeće sudove:

a) $(\exists x \in \mathbb{N}) (x+1=8)$

T

~~$x=7$~~

b) $(\forall x \in \mathbb{N}) (x < 8)$

$\perp$

c) $(\exists x \in \mathbb{N}) (x+1 > 4)$

T

d) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) x^2 + y^2 \geq 4$

T

~~$y=2$~~

e) $(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) x^2 + y < y^2$

$\perp$

~~mpz $22 = 0$~~

f) $(\forall r \in \mathbb{R}) (r > 0 \vee r < 0)$

$\perp$

~~$r=0$~~

g) $(\forall x \in \mathbb{Q}) (x \cdot 0 = 0 \wedge x \cdot 1 = x)$

T

h) $(\exists a \in \mathbb{R}^+) (a \neq -1 \Rightarrow a = -2)$

~~$\perp$~~

~~mpz $a = -1$~~

i) $(\forall a \in \mathbb{Q}) (\forall b \in \mathbb{Q}) (\frac{a}{b} \in \mathbb{Q})$

$\perp$

~~$a=0$~~

j) $(\exists n \in \mathbb{N}) (n+1=n \vee n-1=n)$

$\perp$

k) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\sqrt{x} \in \mathbb{R})$

$\perp$

~~mpz $x=-1$~~

l) $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq 0 \vee x \geq 1))$

T

Šešnje: a) $(\forall x \in \mathbb{N}) (x+1 \neq 8)$

b) $(\exists x \in \mathbb{N}) (x \geq 8)$



- c) $(\forall x \in \mathbb{N}) (x+1 \leq 4)$
 d) $(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) (x^2 + y^2 < 4)$
 e) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) (x^2 + y \geq y^2)$
 f) $(\exists r \in \mathbb{R}) (r \leq 0 \wedge r \geq 0)$
 g) $(\exists x \in \mathbb{Q}) (x \cdot 0 \neq 0 \vee x \cdot 1 \neq x)$
 h) $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (a \neq -1 \wedge a \neq -2)$
 i) $(\exists a \in \mathbb{Q}) (\exists b \in \mathbb{Q}) (\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q})$
 j) $(\forall n \in \mathbb{N}) (n+1 \neq n \wedge n-1 \neq n)$
 k) $(\exists x \in \mathbb{R}) (\sqrt{x} \notin \mathbb{R})$
 l) $(\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 - x \geq 0 \wedge (x > 0 \wedge x < 1)) \vee$
 $(x^2 - x < 0 \wedge (x \leq 0 \vee x \geq 1))$

Zad 13. Napišite obrat po kontrapoziciji slydících implikací:

- 1.) $(\forall n \in \mathbb{N}) (2 | n \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) (n = 4k \vee n = 4k+2))$
- 2.) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) ((x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0)$
- 3.) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) ((x^2 > x \wedge y > 0) \Rightarrow xy > y)$
- 4.) $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 - 2x < 0 \Rightarrow (x < 2 \wedge x > 0))$
- 5.) $(\forall n \in \mathbb{N}) ((3 | n \wedge 2 \nmid n) \Rightarrow 9 | n^2)$
- 6.) $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 - 7x + 12 > 0 \Rightarrow x < 3)$

řešení: 1.) $(\forall n \in \mathbb{N}) ((\forall k \in \mathbb{Z}) (n \neq 4k \wedge n \neq 4k+2) \Rightarrow 2 \nmid n)$

- 2.) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) (xy \leq 0 \Rightarrow (x \leq 0 \vee y \leq 0))$
- 3.) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) (xy \leq y \Rightarrow (x^2 \leq x \vee y \leq 0))$
- 4.) $(\forall x \in \mathbb{R}) ((x \geq 2 \vee x \leq 0) \Rightarrow x^2 - 2x \geq 0)$
- 5.) $(\forall n \in \mathbb{N}) (9 \nmid n^2 \Rightarrow (3 \nmid n \vee 2 | n))$
- 6.) $(\forall x \in \mathbb{R}) (x \geq 3 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 \leq 0)$