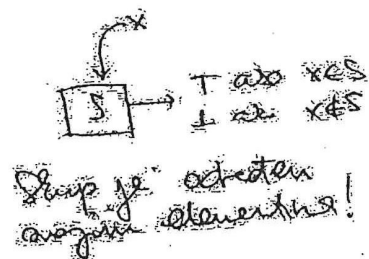


2. SKUPOVI

(P)

Pojam skupa se ne definiše.

Opis: više objekata shvaćenih kao cjelina.



Primjer: $S = \{1, 2, 3\}$

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Skup parnih prirodnih brojeva:

$\{n \mid n \text{ je paran prirodan broj}\} = \{n \in N \mid n \text{ je parni}\} =$

$= \{2k \mid k \in N\}$

def: kažemo da su A i B skupovi, kažemo da je A podskup od B i pišemo $A \subseteq B$ ako je svaki element skupa A također element skupa B .

Skup B :

Simbolika: $A \subseteq B \iff (\forall x)(x \in A \implies x \in B)$

def: kažemo da su skupovi A i B jednaki i pišemo $A = B$ ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

zad 1: Ispisati sve podskupove skupa $\{1, 2, 3\}$.

4:
 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$
 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
 $\{1, 2, 3\}$

def: Skup svih podskupova skupa S zovemo partitivni skup od S i označavamo $P(S)$.

Pozna: Skup je podskup nekog skupa.

$$\begin{aligned} & (\forall x)(x \in \emptyset \implies x \in A) \text{ T} \\ & \equiv \\ & (\forall x)(x \notin A \implies x \in \emptyset) \text{ T} \end{aligned}$$

$P(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Napomena:

~~Zad 2:~~ Ako skup S ima n elemenata, koliko elemenata ima $P(S)$?

$|S| = n \Rightarrow |P(S)| = 2^n$

$|S|$ = broj elemenata skupa S (to je njegova kardinalitet skupa S)

Zad 3: Dokazati: ako je $P(A) = P(B)$, onda je $A = B$.

Dokazivanje:

Treba dokazati: $P(A) = P(B) \Rightarrow A = B$

Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $P(A) = P(B)$ i $A \neq B$ (*).

Kada je $A \neq B$, to znači da $A \not\subseteq B$ ili $B \not\subseteq A$.

1) Ako $A \not\subseteq B$, onda $(\exists x) x \in A$ i $x \notin B$.

No, onda je $\{x\} \in P(A)$ i $\{x\} \notin P(B)$, što je u kontradikciji s pretpostavom da je $P(A) = P(B)$.

2) Ako $B \not\subseteq A$, onda $(\exists y) y \in B$ i $y \notin A$.

$\Rightarrow \{y\} \in P(B)$ i $\{y\} \notin P(A)$, a to je u kontradikciji s $P(A) = P(B)$.

Dakle pretpostavka (*) je pogrešna, tj.

$$P(A) = P(B) \Rightarrow A = B.$$

Operacije sa skupovima:

"U nekom malom razmatranju potrebna je gledati samo podskupove nekog skupa
→ tu zovemo univerzalni skup.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ili } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

= definisano ga za podskupove nekog univerzalnog skupa S (univerzalni skup).

$$A \subseteq S$$

$$A^c = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

↳ VENNOM

u ovom: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
 $A \cap B \subseteq A$

univerzalni

zad 4:

skup $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ univerzalni skup

(Vennov diagram)

$\{1, 2, 4, 8\}$

$\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$C = \{2, 3, 5, 7\}$

$A = \{1, 2, 4, 8\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$C = \{2, 3, 5, 7\}$

Abstraktni Vennov diagram: odredi $A \cup B$, $B \cap C$, $A \setminus C$,

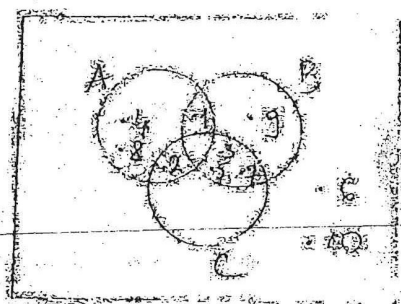
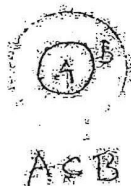
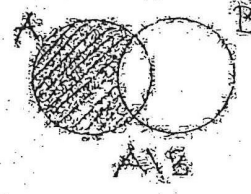
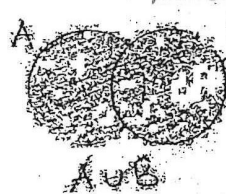
$C \setminus A$, $C \cap A^c$, $(A \cup B)^c$, $(A \setminus B)^c$, $C \setminus (A \cup B)$, $A \cup B \cup C$

$A \cap B \cap C$.

$A \cup B$, $B \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $C \cap A^c$,

$(A \cup B)^c$, $(A \setminus B)^c$, $C \setminus (A \cup B)$, $A \cup B \cup C$

Napomena: Vennov diagram



$A \cup B = \{1, 2, 4, 8, 3, 5, 7, 9\}$

$B \cap C = \{3, 5, 7\}$

$A \setminus C = \{1, 4, 8\}$

$C \setminus A = \{3, 5, 7\}$

$C \cap A^c = C \cap \{3, 5, 7, 9, 10\} = \{3, 5, 7\}$

$(A \cup B)^c = \{6, 10\}$

$(A \setminus B)^c = \{2, 4, 8\}^c = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$

$C \setminus (A \cup B) = \emptyset$

$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

$A \cap B \cap C = \emptyset$

zad 5: dano je S univerzalni skup i $A, B \subseteq S$. Dokazati da je

P) $A \setminus B = A \cap B^c$

K) $A \cap B^c = A \cap \{x \in S \mid x \notin B\} = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \setminus B$

NAP. $(A^c)^c = A$ + DE MORGAN (D2)

zad 6: dano je S univerzalni skup i $A, B \subseteq S$. Dokazati da je

$A \setminus B$ koštati isto mnogo i komplementarnost.



$$A \cap B = ((A \cap B)^c)^c = (A^c \cup B^c)^c$$

Konstatacni zakon: $(X^c)^c = X$ (dvostruka negacija)

De Morganov zakon: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ } dokazati

$$A \cap B = A \cap B^c = ((A \cap B^c)^c)^c = (A^c \cup (B^c)^c)^c = (A^c \cup B)^c$$

↑
sada

Zad 7: Postoji li $A \subseteq \mathbb{N}$ na skupu $\mathbb{N}$?

- (NE) (a) A je konačan, A^c je beskonačan
 (b) A je beskonačan, A^c je konačan
 (c) A i A^c su oba beskonačna
 (d) A i A^c su oba konačna?

Na skupu $\mathbb{N}$ postoji skup

(a) DA, npr. $A = \{1\} \Rightarrow A^c = \{2, 3, 4, \dots\}$

(b) DA, npr. $A = \{2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow A^c = \{1\}$

(c) DA, npr. $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \Rightarrow A^c = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

(d) NE! Pretpostavimo da su A i A^c konačni. Onda je $\mathbb{N} = A \cup A^c$.
 No, ova dva konačna skupa su konačni skup, a znamo da je $\mathbb{N}$ beskonačan.

def: Za skupove A, B kažemo da su disjunktni ako je $A \cap B = \emptyset$.

Zad 8: Ako su $A, B \subseteq S$. Dokazati: A i B su disjunktni ako i samo ako je $A \subseteq B^c$. (b) (2)

$\Rightarrow$ Ako su A i B disjunktni, treba dokazati $A \subseteq B^c$.
 Ako je $x \in A$ proizvoljno. Ako bi bilo $x \in B$, onda je $x \in B$, no onda je $x \in A \cap B = \emptyset$, a to je kontradikcija.
 Onda, $x \in B^c \Rightarrow A \subseteq B^c$.

$\Leftarrow$ Ako je $A \subseteq B^c$. Pretpostavimo da A i B nisu disjunktni, tj. da postoji $x \in A \cap B$. Tada je $x \in A$ i $x \in B$. No, budući da $A \subseteq B^c$, to je $x \in B^c$. Sada je $x \in B \cap B^c = \emptyset$.

Kauno u pamy

~~Def~~ Partija skupa S je skup medijanso d'g'etvika nepoznati
 E SAD podskupova od S koji su mediji d'g'etvika S .

$$I = \{S_i | i \in I\} \quad (I = \text{skup indeksa, koriste se bezbrojima})$$

$$S_i \subseteq S, \quad S_i \cap S_j = \emptyset \text{ za } i \neq j, \quad \bigcup_{i \in I} S_i = S, \quad S_i \neq \emptyset, \quad \forall i$$

Koji je od ovih partija i partitivni skup?

- partija je podskup od $\mathcal{P}(S)$ (partija sadrzi neke podskupove od S
 a $\mathcal{P}(S)$ su podskupove od S)

- partija drugog skupa ima puno, a partitivni skup je samo jedan

zad 9: Dato je par partija skupa $\{1, 2, 3\}$.

$$I = \{\{1, 2, 3\}\}$$

$$E \text{ SAD } \{\{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}, \{\{1, 3\}, \{1, 2\}\}$$

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \quad (\text{ima ih 5}).$$

zad 10: Koliko ima partija skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ na dva skupa?

$$I = \{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}\}, \{\{2\}, \{1, 3, 4, 5\}\}, \dots, \{\{5\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

$$E \text{ SAD } \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4, 5\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}, \dots, \{\{4, 5\}, \{1, 2, 3\}\} \quad \left(\frac{5!}{2} = 10\right)$$

ukupno 15

zad 11: Koliko ima partija skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ na tri skupa?

zad 11: Dokazati: $A \subseteq C$ i $B \subseteq C$ ako i samo ako $A \cup B \subseteq C$.

zad 12: Dokaži da je $(A \subseteq C \text{ i } B \subseteq C) \iff (A \cup B \subseteq C)$, tj. da je dokaz dvije implikacije.

$$\Rightarrow A \subseteq C \text{ i } B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

ako vrijedi $A \subseteq C$ i $B \subseteq C$. Dokazujemo $A \cup B \subseteq C$.
 ako je $x \in A \cup B$. Tada je $x \in A$ ili $x \in B$. Ukoliko je
 $x \in A$, onda je zbog $A \subseteq C$ $x \in C$. Ako je pak $x \in B$, onda
 je zbog $B \subseteq C$ $x \in C$. Dakle, u svakom slučaju je
 $x \in C$. Budući je $x \in A \cup B$ bio proizvoljan, to je $x \in C$.

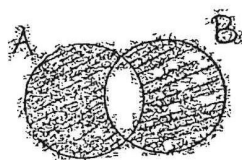
$$\Rightarrow A \cup B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \text{ i } B \subseteq C$$

Znamo da je $A \subseteq A \cup B$ i $B \subseteq A \cup B$. Budući da je
 $A \cup B \subseteq C$, zbog tranzitivnosti relacije $\subseteq$ vrijedi $A \subseteq C$
 i $B \subseteq C$.

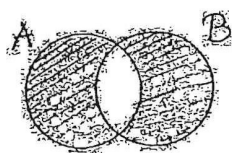
Napomena: Tranzitivnost: $A \subseteq B$ i $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

Zad 12: Dokazite da vrijedi $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

✓



$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



$$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Dokazujemo jednakost skupa, tako dokazati da je inkluzija.

$$\boxed{\subseteq} (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

ako je $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Tada je $x \in A \setminus B$ ili $x \in B \setminus A$.

1.) Ako je $x \in A \setminus B$, onda $x \in A$ i $x \notin B$. Kako je $x \in A$,
 to je $x \in A \cup B$, a kako $x \notin B$, onda $x \notin A \cap B$ (jer je
 $A \cap B \subseteq B$). Dakle, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

2.) Ako je $x \in B \setminus A$, onda je $x \in B$ i $x \notin A$. Kako je $x \in B \subseteq A \cup B$
 to je $x \in A \cup B$, a kako $x \notin A$, onda $x \notin A \cap B$. Dakle, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Time je turisti obilazna.

121

2

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Ukaže se $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Tada je $x \in A \cup B$ i $x \notin A \cap B$.
Imamo dvije mogućnosti:

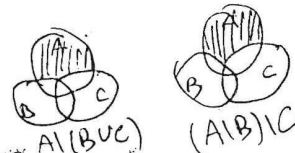
- 1) $x \in A$ i $x \notin A \cap B$. Tada $x \notin B$ (u protivnom bi bilo $x \in A$ i $x \in B$, a onda $x \in A \cap B$). Stoga je $x \in A \setminus B$.
- 2) $x \in B$ i $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ i $x \in B \Rightarrow x \in B \setminus A$.

Dakle vrijedi $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Def: Ukaže se A i B skupovi. Simetrična razlika $A \Delta B$ je skup $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

apomena: U zad 12 smo koristili $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

ad 13: Dokazati da vrijedi $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.



1) $\subseteq$ Za $x \in A \setminus (B \cup C)$ vrijedi $x \in A$ i $x \notin B \cup C$, a to znači $x \in A$ i $x \notin B$ i $x \notin C$.

$$\text{Stoga } x \in A \text{ i } x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B$$

$$\text{Stoga } x \notin C \text{ i } x \in A \setminus B \Rightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C$$

$$\boxed{\subseteq} \text{ Za } x \in (A \setminus B) \setminus C \Rightarrow x \in A \setminus B \text{ i } x \notin C$$

$$\Rightarrow x \in A, x \notin B \text{ i } x \notin C$$

$$\Rightarrow x \in A, x \notin B \cup C$$

$$\Rightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$$

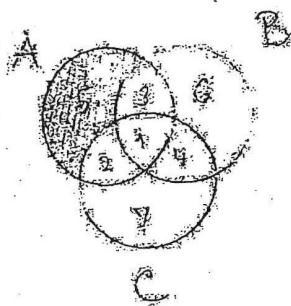
apomena: Kada imamo neku čistu skupinu, ne moramo prati pravila.

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

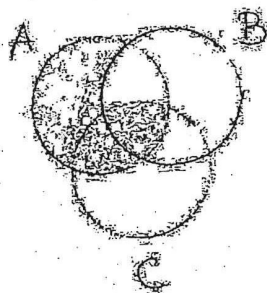
$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

To je najstrože asociativnost.

OPREZ! Skupina2 mreža nije asocijativna (opreznost).



$$(A \cap B) \setminus C$$



$$A \setminus (B \cup C)$$

Primer: $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 4, 6\}$, $C = \{1, 4, 5, 9\}$

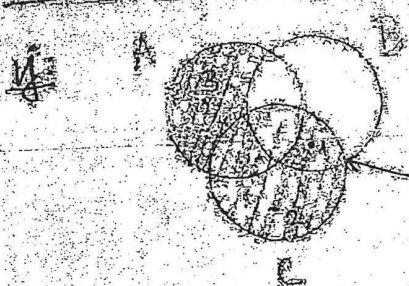
$(A \cap B) \setminus C = \{5\}$, dok je $A \setminus (B \cup C) = \{1, 2, 3\}$

$$(A \cap B) \setminus C \neq A \setminus (B \cup C)$$

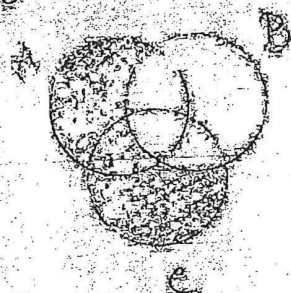
ne postoji prejel i nije komutativne operacije, a skupina2 nije komutativna

$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, ali $A \setminus B \neq B \setminus A$.

zad 14: ODREDITE ODNOS
ispitajte da li vrijedi jednakost $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap B$.



$$(A \cap B) \cup C$$



$$(A \cup C) \cap B$$

Primer: skupina2 na koji to ne vrijedi: $A = \{3\}$, $B = \{1\}$, $C = \{4, 2\}$

$A \cap B = \emptyset$, $(A \cap B) \cup C = \{4, 2\}$

$A \cup C = \{3, 4, 2\}$, $(A \cup C) \cap B = \emptyset$

$$\text{Dokazati: } (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$x \in (A \cup B) \cap C \iff x \in A \cup C, x \in B \iff (x \in A \vee x \in C) \wedge x \in B$$

Imamo dve mogućnosti: $x \in A \wedge x \in B$ ili $x \in C \wedge x \in B$. U

prvom slučaju je $x \in A \cap B$, a u drugom $x \in C \cap B$.

$$\text{Za } x \in A \cap B \implies x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$\text{Za } x \in C \cap B \implies x \in C \implies x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

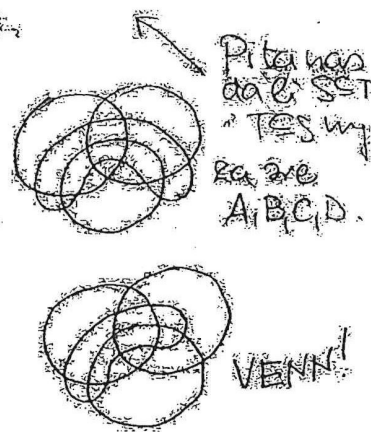
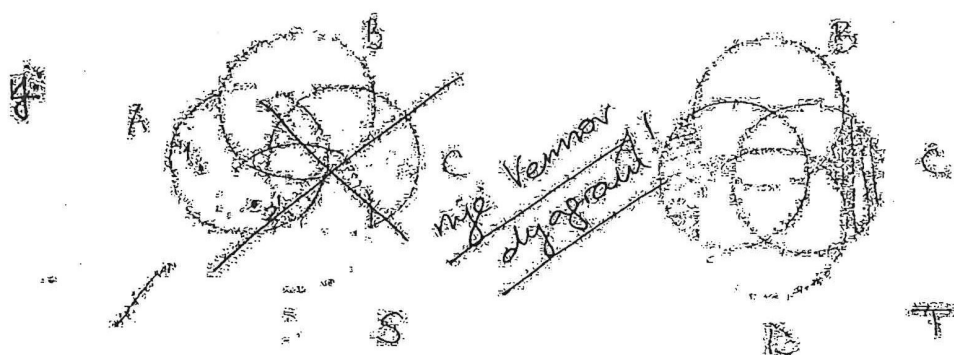
Napomena: Dva skupa su distributivni prema presjeku

$$(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$$

Uzajamno distributivni prema uniji

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Zad 15: Za proizvoljne skupove A, B, C, D neka je $S = (A \cap B) \cup (C \cap D)$
i $T = (A \cup C) \cap (B \cup D)$. Spitzite da li uvijek vrijedi inkluzije
 $S \subseteq T$ i $T \subseteq S$. Svoje tvrdnje dokažite.



Pitanje da li $S \subseteq T$ i $T \subseteq S$ vrijedi za sve A, B, C, D.

VENN!

Da li je $T \subseteq S$, a da li $S \subseteq T$ (općenito).

D) Dokazati: $T \subseteq S$ Dokažite tvrdnju $(\forall x)(x \in T \implies x \in S)$

$$\text{Za } x \in T \implies x \in (A \cup C) \cap (B \cup D) \implies x \in A \cup C, x \in B \cup D$$

$$\iff (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in D)$$

Imamo dva moguća

$$x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin D \rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in S$$

$$x \in C \wedge x \in B \wedge x \notin D \Rightarrow x \in C \cap D \rightarrow x \in S$$

② Dva skupa A, B, C, D t.j. $S \neq T$.

$$A = \{1, 2\}, B = \emptyset, C = \emptyset, D = \{2\}$$

$$S = (A \cap B) \cup (C \cap D) = \{1, 2\} \cup \emptyset = \{1, 2\}$$

$$T = (A \cup C) \cap (B \cup D) = \{1, 2\} \cap \{2\} = \{2\}$$

$$S \neq T.$$

Obratni tvrdnju

$$(\forall x)(x \in S \Rightarrow x \in T)$$

je dokazat negacijn tj
dokažat

$$(\exists x)(x \in S \wedge x \notin T)$$

↑
To se zove najti
protiprimer.

def: Kartezijev produkt skupov A i B je skup

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$(a, b) = \{a, \{b\}\}$$

(a, b) — uređena para

$$(a, b) \neq (b, a) \text{ osim ako } \{a, b\} = \{b, a\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \\ = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (\text{ravnina})$$

Primer: $A = \{x, y\}, B = \{1, 2, 3\}$

$$A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$$

→ nap. na VENN-u

Zad 16: Dva skupa A i B kao na slici

$$a) A = \{1, 2\}, B = \{4, 2\}$$

$$b) A = \{1, 2\}, B = [4, 2]$$

$$c) A = [1, 2], B = [1, 2]$$

$$d) A = [0, 1] \cup \{2\} \\ B = \{0\} \cup [4, 2]$$

Napomena:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

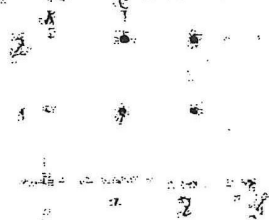
otvoreni interval

zatvoreni interval

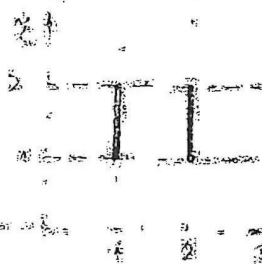
poluotvoreni interval

poluotvoreni interval

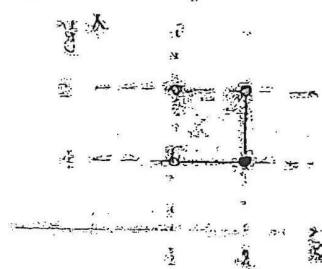
4: a) $A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$



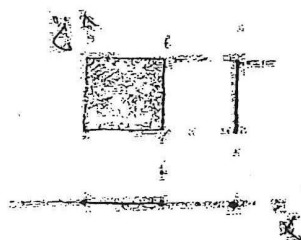
b) $A \times B = \{(x,y) | x=1 \vee x=2, 1 \leq y \leq 2\}$



c) $A \times B = \{(x,y) | 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$



d) $A \times B = \{(x,y) | x \in [1,2] \cup [3,4], y \in \{1,2\} \cup [1,2]\}$



Зад 12: Дадени су два множества $A = \{1, 2\}$ и $B = \{3, 4\}$. (A and B are sets)

4: Комарацима нису, а постоје $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$

(E) $A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$
 $B \times A = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$

Asocijativni u principu nije.

$$A = \{a\}, B = \{b\}, C = \{c\}$$

$$(A \times B) \times C = \{(a, b), c\}$$

$$A \times (B \times C) = \{a, (b, c)\}$$

Međutim, možemo se dogovoriti da elemente kartezijanskog produkta bi
tako pismo kao navedene bijele:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c)\}. \text{ Uz taj dogovor je asocijativna.}$$

Zad 18: Dokažite da je $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

$$(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ i } y \in B \cup C) \Leftrightarrow$$

$$x \in A \text{ i } (y \in B \text{ i } y \in C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ i } y \in B) \text{ ili } (x \in A \text{ i } y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \text{ ili } (x, y) \in A \times C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

je i distributivnost prema presjeku i uniji počinje
(formalizirajte i dokažite sami).

RELACIJE

def ako su A i B neprazni podskupovi. Relacija je podskup
kartezijanskog produkta $A \times B$. $R \subseteq A \times B$ bih koji podskup je relacija

Prinjeni relacija iz matematike $\leq, <$, poslije od prvaca na

većini, obično, $\subseteq$, obje strane.

Može se prinjeni binarna relacija.

$(x, y) \in R$ možemo
pisati i $x R y$

$C = \{Ana, Nana, Jana\}$

$D = \{Filip, Matija, Ante\}$

Relacija $R \subseteq C \times D$.

$(Ana, Matija) \in R$

def Relacija je binarna relacija. Kažemo da je R možemo pisati na relaciji

refleksivna ako $(a, a) \in R$

simetrična ako $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

transitivna ako $(a, b) \in R \text{ i } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

antisimetrična ako $(a, b) \in R \text{ i } (b, a) \in R \Rightarrow a = b$

~~Filip i Nana~~
analogno
u relaciji