

Asocijativni u principu nije.

$$A = \{a\}, B = \{b\}, C = \{c\}$$

$$(A \times B) \times C = \{(a, b), c\}$$

$$A \times (B \times C) = \{a, (b, c)\}$$

Međutim, možemo se dogovoriti da elemente kartezijanskog produkta bi lakše pisemo kao navedene tj.:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c)\}. \text{ Uz taj dogovor je asocijativna.}$$

Zad 18: Dokažite da je $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

$$(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ i } y \in B \cup C) \Leftrightarrow$$

$$x \in A \text{ i } (y \in B \text{ i } y \in C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ i } y \in B) \text{ ili } (x \in A \text{ i } y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \text{ ili } (x, y) \in A \times C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

je i distributivna prema presjeku i uniji (formalizirajte i dokažite sami).

RELACIJE

def Neka su A i B neprazni podskupovi. Relacija je podskup kartezijanskog produkta $A \times B$. $R \subseteq A \times B$ bih koji podskup je relacija.

Prinjeni relacija iz matematike $\leq, <$, poslije od prvaca na.

primjeri, demonstrat, $\subseteq$, obje.

Može biti prinjeni binarna relacija.

$(x, y) \in R$ možemo pisati $x R y$.

$C = \{Ana, Nana, Jana\}$

$D = \{Filip, Matija, Ante\}$

Relacija $R \subseteq C \times D$.

$(Ana, Matija) \in R$

def Neka je R binarna relacija. Kažemo da je R možemo pisati $a R b$.

refleksivna ako $(a, a) \in R$

simetrična ako $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

transitivna ako $(a, b) \in R \text{ i } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

antirefleksivna ako $(a, a) \notin R$

~~Filip i Nana~~ $\notin R$
Filip i Nana su u relaciji.

zad 19: Ispitajte moguća svojstva relacija:

BITAN
ZADATAK

(a) paralelnost pravaca u ravni
(b) ekvivalencija pravaca u ravni

(c) $\leq$ na $\mathbb{N}$

(d) $<$ na $\mathbb{R}$

(e) $\subseteq$ na $\mathcal{P}(S)$

Treba prvo
temeljito razmisliti
o svakom zadataku!

(VIDI DODATNI
PAPIR!)

- g: (a) refleksivna, simetrična, tranzitivna, nije antisimetrična
(b) nije refleksivna, simetrična, nije tranzitivna, nije antisimetrična
(c) $\leq$: refleksivna, tranzitivna, antisimetrična
(d) $<$: tranzitivna, antisimetrična (na prazno)
(e) $\subseteq$: refleksivna, tranzitivna, antisimetrična

def: Binarna relacija koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna
naziva se relacijom ekvivalencije.

def: Binarna relacija koja je refleksivna, tranzitivna i antisimetrična
naziva se parcijalnim uređenjem.

1. zad 19. paralelnost je relacija ekvivalencije, a $\leq$ i $\subseteq$ su
parcijalni uređenja.

~~2. Dana je relacija $R = \{(1,1), (1,3), (2,3), (2,2), (3,3)\}$ na
skupu $\{1,2,3\}$. Ispitajte joj moguća i odredite da li je relacija
ekvivalencije, odnosno parcijalno uređenje.~~

zad 20: Na skupu $\{1,2,3,4\}$ dana je binarna relacija

$$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (1,3), (2,4), (4,4), (1,4)\}.$$

odredite da li je relacija R refleksivna, simetrična, antisimetrična,
tranzitivna.

4:

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Relacija ρ nije refleksivna jer npr. $(1,1) \notin \rho$.
(dijagonalni nije cijeli crta)

Simetrična nije jer npr. $(1,2) \in \rho$, $(2,1) \notin \rho$.
(trabala nije simetrična i crta na dijagonalu).

Antisimetrična je.

(nagodi se na dijagonalu ne smije se pojaviti drugi
ene kade koje su simetrične).

Transitivnost se ne može prepoznati vizualno. Treba ispitati sve
mogućnosti:

$(1,2), (2,3) \rightarrow (1,3) \in \rho$

$(1,2), (2,4) \rightarrow (1,4) \in \rho$

$(1,3), (3,4) \rightarrow (1,4) \in \rho$

$(1,4), (4,4) \rightarrow (1,4) \in \rho$

$(2,3), (3,4) \rightarrow (2,4) \in \rho$

$(2,4), (4,4) \rightarrow (2,4) \in \rho$

$(3,4), (4,4) \rightarrow (3,4) \in \rho$

$(4,4), (4,4) \rightarrow (4,4) \in \rho$

$\rightarrow \rho$ je transitivna.

zad 21: Na skupu prirodnih brojeva definiran je relacija ρ sa:

$m \rho n \Leftrightarrow$ am i 5n daju isti ostatak pri dijeljenju sa 7.

Naci koji
zadati.

Ispitajte je li relacija ρ refleksivna, simetrična, transitivna,
antisimetrična. Svoje tvrdnje dokažite!

4: Nije refleksivna - na primjer 1 i 1 (jer 3 i 5 i 1 daju različite

ostatke pri dijeljenju sa 7)

VIDI
ZADATKI
PAPIR

Nije simetrična - primjeri 1 i 2, ali 2 i 1

(3 i 5 i 2 i 1 daju isti, a 3 i 5 i 1 različite ostatke pri dijeljenju sa 7).

(SAMI
zadati)

Nije tranzitivna - vrijedi 182 i 284, ali ne vrijedi 184.

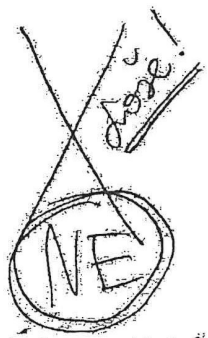
(3.1 i 5.2=10 daju isti ostatak pri dijeljenju sa 7, 2.3=6

i 5.4=20 daju isti ostatak pri dijeljenju sa 7, a

3.1 i 5.4=20 ne daju isti ostatak pri dijeljenju sa 7.)

Nije antisimetrična - vrijedi 7814 i 1487, a brojevi 7 i 14 su različiti.

zad 22: dva skupine studenata prije godišnje isprave je relacija EM. Za dva studenta A i B vrijedi $(A, B) \in EM$ ako i samo ako niti jedan od njih nije prošao ispit iz Elementarne matematike ili su oba položila ispit s istom ocjenom ili je A položio ispit, a B nije. Koja svojstva ima relacija EM? $x \sim y \Leftrightarrow (O(x)=O(y)) \vee (O(x)=1 \wedge O(y)=1)$



✓ refleksivnost:

Ako je student A prošao ispit, tada je $(A, A) \in EM$ i ako je pao ispit, onda je $(A, A) \in EM$

Hoćemo pitati da li relacija kakva god ocjena A KOJE SU OCJENE ???

simetričnost:

Ako je A položio, a B nije $\rightarrow (A, B) \in EM, (B, A) \notin EM$

(NE) X

antisimetričnost: Ako su dva studenta A i B polož ispit, onda

je $(A, B) \in EM$ i $(B, A) \in EM$, ali $A \neq B$, (NE) X

tranzitivnost: ako je $(A, B) \in EM$ i $(B, C) \in EM$,

1. A i B su pali. Postoji $(B, C) \in EM$, to znači da je i C pao $\Rightarrow (A, C) \in EM$

2. A je pao, a B je pao. Postoji $(B, C) \in EM$, to znači da je i C pao $\Rightarrow (A, C) \in EM$.

relacije IREFL. (YQEA) QXU

La zvaiku od sljedećih relacija na IR odredite njenu svojstva:

- a) $x \diamond y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \cdot y = 0$
 b) $x \bowtie y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \cdot y \neq 0$
 c) $x \boxtimes y \stackrel{\text{def}}{\iff} |x - y| < 5$
 d) $x \odot y \stackrel{\text{def}}{\iff} x^2 + y^2 = 1$
 e) $x \cup y \stackrel{\text{def}}{\iff} x^2 + y^2 = 0$

S	A	T	R	1
T	⊥	⊥	⊥	⊥
T	⊥	T	⊥	⊥
T	⊥	⊥	T	⊥
T	⊥	⊥	⊥	⊥
T	T	T	⊥	⊥

I da
 $x \bowtie x$ u x

Mi ćemo ispitati svojstva relacije $\diamond$ na IR.

(za $x, y \in \mathbb{R}$)

$x \diamond y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \cdot y = 0$

Kažemo da je x u relaciji $\diamond$ s y ako vrijedi $x \cdot y = 0$.

npr. $0 \diamond 1, 2 \diamond 0, 1 \diamond 2$.

Svojstva:

Refleksivnost

Pitamo se: Da li $(\forall x \in \mathbb{R})(x \diamond x)$? tj.

Pogledajmo definiciju od $\diamond$.

Da li $(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot x = 0)$?

Ne. Naprimjer, za $x = 1$ imamo $1 \cdot 1 \neq 0$.

(Dokazali smo da vrijedi negacija; tj. $(\exists x \in \mathbb{R})(x \cdot x \neq 0)$.)

Dakle, relacija $\diamond$ nije refleksivna.

Simetričnost

Pitamo se: Da li $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \bowtie y \implies y \diamond x)$? tj.

Da li $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \cdot y = 0 \implies y \cdot x = 0)$?

Da! Dakle, relacija $\diamond$ je simetrična.

Tranzitivnost

Pitamo se: Da li $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \bowtie y \wedge y \bowtie z \implies x \bowtie z)$? tj.

Da li $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \cdot y = 0 \wedge y \cdot z = 0 \implies x \cdot z = 0)$?

(Pitamo se da li za sve x, y, z za koje vrijedi da je $x \cdot y = 0$ i $y \cdot z = 0$ mora vrijediti i $x \cdot z = 0$.)

Ne mora! Naprimjer, za $x = 1, y = 0, z = 1$ imamo $x \cdot y = 0$ i $y \cdot z = 0$ ali ne vrijedi $x \cdot z = 0$.

Što smo upravo napravili? Pronašli smo protuprimjer, tj. imamo opovrgnuli univerzalnu tvrdnju, tj. dokazali smo njenu negaciju.

$(\exists x, y, z \in \mathbb{R})(x \cdot y = 0 \wedge y \cdot z = 0 \wedge x \cdot z \neq 0)$

Dakle, relacija $\diamond$ nije tranzitivna.

Antisymetričnost Pitamo se: Da li $(\forall x, y \in \mathbb{R}) ((x \cdot y = 0 \wedge y \cdot x = 0) \implies x = y)$?

Da li $(\forall x, y \in \mathbb{R}) ((x \cdot y = 0 \wedge y \cdot x = 0) \implies x = y)$?

Ne... Naprimjer, za $x=0$ i $y=1$ vrijedi
 $x \cdot y = 0$ i $y \cdot x = 0$ ali ne vrijedi $x=y$.

(Dokazali smo opet negaciju:
 $(\exists x, y \in \mathbb{R}) (x \cdot y = 0 \wedge y \cdot x = 0 \wedge x \neq y)$)

Dakle, relacija $\nmid$ nije antisimetrična.

Irefleksivnost: Pitamo se: Da li $(\forall x \in \mathbb{R}) (x \nmid x)$? tj.

Da li $(\forall x \in \mathbb{R}) (x \cdot x \neq 0)$?

Ne. Naprimjer, za $x=0$ ne vrijedi $x \cdot x \neq 0$.

(Opet smo dokazali negaciju univerzalne tvrdnje tako da smo našli protuprimjer. Dokazali smo:
 $(\exists x \in \mathbb{R}) (x \cdot x = 0)$. $\leftarrow$ To je $x=0$.)

Dakle, relacija nije irefleksivna.

Napomena: Je li relacija $<$ na $\mathbb{R}$ antisimetrična?

Da li $(\forall x, y \in \mathbb{R}) ((x < y \wedge y < x) \implies x = y)$?

Ala nismo sigurni je li ovo T ili F, pokušajmo s negacijom. Da li vrijedi negacija:

$(\exists x, y \in \mathbb{R}) (x < y \wedge y < x \wedge x \neq y)$? Ne. F

nemoguće je da postoji takvi x i y

Dakle, naša tvrdnja je T. Relacija $<$ jest antisimetrična.

(Univerzalna tvrdnja po pravom skupu $(\forall x \in \Phi) P(x)$ je uvijek T.)

$\leftarrow$ je li ovo T ili F?

Zad 19 Ispitajte zbirku zbiranih relacija:

Relacija	na skupu	refl.	sim.	trans.	antisim.
$\parallel$	pravci	T	T	T	F
$\perp$	pravci	F	T	F (1)	F
$\leq$	N	T	F (2)	T	T
$<$	R	F	F	T	T (3)
$\subseteq$	P(N)	T	F	T	T
$=$	Q	T	T	T	T
drugi skup	P(N)	F	T	F (4)	F
$ $	N	T	F	T	T
$ $	Z	T	F	T	F (5)

(1)
PROTUPRIMER
 $\begin{array}{c} a \quad p \\ \diagup \quad \diagdown \\ r \end{array}$
 $p \perp r$ ali $p \not\perp r$

(2)
PROTUPRIMER
 $1 \leq 2$ i $2 \leq 1$

(3)

(4)
PROTUPRIMER
 $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq y\} \cap \{y \in \mathbb{N} \mid y \leq x\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq x\} = \mathbb{N}$

(5)
PROTUPRIMER
 $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\} \cap \{y \in \mathbb{N} \mid y \leq 1\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 1\} = \{1\}$

(5)
PROTUPRIMER
 $2 \mid -2$ i $-2 \mid 2$ ali $2 \nmid -2$

Razpisati za neke
jeziko dateljno koo
na dodatnom papiru
sa SARRI zadatkom

Ostalo za D2

- $A \cap B$ su potpuno isti skupovi, a c je par, tada $f(A, c) \in M$.
 $A \cap B$ su potpuno isti skupovi i B je skup potpuno isti skupovi, tada $f(A, c) \in M$.
 $A \cap B$ su potpuno isti skupovi i B je skup potpuno isti skupovi, tada $f(A, c) \in M$.

def Suprotna relacija relacije R je relacija

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

Zad 23: Dokazite:

(Dokazivanje) a) $R^{-1} = R \iff R$ je simetrična

b) R je tranzitivna $\iff R^{-1}$ je tranzitivna

c) R je antisimetrična $\iff R \cap R^{-1} \subseteq \{(x, x) \mid x \in A\}$

u: a) $\Rightarrow$ ako je $R^{-1} = R$. Treba pokazati $\forall (x, y) \in R$ vrijedi

$(y, x) \in R$. Ako je $(x, y) \in R$ primijetimo kako je $R^{-1} = R$
 $\Rightarrow (x, y) \in R^{-1} \Rightarrow (y, x) \in R$.

$\Leftarrow$ Ako je R simetrična relacija. Treba pokazati $R^{-1} = R$.

Dokazimo $R \subseteq R^{-1}$

Za $(x, y) \in R$ $\Rightarrow (y, x) \in R$ (jer je R simetrična)

$\Rightarrow (x, y) \in R^{-1}$

Dokazimo $R^{-1} \subseteq R$

Za $(x, y) \in R^{-1} \Rightarrow (y, x) \in R \Rightarrow (x, y) \in R$ (jer je R simetrična)

$(x, y) \in R$.

$\Rightarrow$ ako je R tranzitivna, dokazimo da je onda i R^{-1} tranzitivna.

Za $(x, y) \in R^{-1}$ i $(y, z) \in R^{-1} \Rightarrow (y, x) \in R$ i $(z, y) \in R$

(jer su ovi parovi prethodni $(z, y) \in R$ i $(y, x) \in R$), a onda je zbog tranzitivnosti $(z, x) \in R$, tj. $(x, z) \in R^{-1}$.

Dakle, R^{-1} je tranzitivna.

člaka $x \neq y$, $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da $\exists x \in [x] \cap [y] \Rightarrow x \sim z, z \sim y$

$\Rightarrow x \sim z, z \sim y \Rightarrow x \sim y \Rightarrow \text{ne}$.

pa $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Drugi def. 
particij. skupa!

Def 9
(particij. od X)

Def 10

Relacija ekvivalencije određuje partitiju skupa S (na koje se deli = S u delove)

Odnos x i y imamo partitiju $F = \{S_i \mid i \in I\}$ na skupu S u delove

$x \sim y \Leftrightarrow (\exists i \in I) \text{ t.d. } x, y \in S_i$.

(1) Dokazite da je to relacija ekvivalencije (tj. na koje se deli = S u delove)
skupovi $S_i, i \in I$. (P)

Rad 25 Na skupu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ zadana je relacija

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,3), (3,1), (4,5), (5,4)\}$

Dokazite da je R relacija ekvivalencije i odredite klase ekvivalencije.

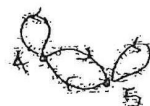
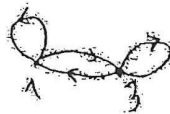
Pozoriti
da
vismalo!

U: Dokaz da je R relacija ekvivalencije (na DZ).

Klase $[1] = \{1, 3\} = [3]$

$[2] = \{2\}$

$[4] = \{4, 5\} = [5]$



mp. da
odnaka na
a b



Rad 26 Definišite relaciju ekvivalencije R na skupu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ da su klase ekvivalencije $\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}$.

U: $R = \{(1,1), (1,4), (1,5), (4,1), (4,4), (4,5), (5,1), (5,4), (5,5), (2,2), (3,3), (3,2), (2,3)\}$



Analogno se vije: $(f^{-1})^{-1} = f$.
 Često se za relaciju $(f^{-1})^{-1} = f$ kaže.

c) Neka je $\sim$ ekvivalencija. Pokažimo $f \cap f^{-1} \subseteq \{(x, x) | x \in A\}$.

Tako je $(x, y) \in f \cap f^{-1}$ ekvivalencijom ekvivalencije od (x, y) . Tada je
 $(x, y) \in f$ i $(x, y) \in f^{-1}$, odnosno $(x, y) \in f$ i $(y, x) \in f$, a to je
 isto kao, ekvivalencijom ekvivalencije $x = y$.

Potrebno je $f \cap f^{-1} \subseteq \{(x, x) | x \in A\}$

Neka je $f \cap f^{-1} \subseteq \{(x, x) | x \in A\}$. Tada pokazati da je $\sim$ ekvivalencija.

Čekajući je $(x, y) \in f$ i $(y, x) \in f$. Tada je $(x, y) \in f \cap f^{-1}$ pa je
 $(x, y) \in f \cap f^{-1}$, a to je $x = y$.

Def: Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S i $x \in S$. Skup
 $[x] = \{y \in S | x \sim y\}$ nazivamo klasa ekvivalencije određena
 elementom x .

ad 24: Pokaži da $[x], [y]$ su disjunktne relacije $\sim$ na
 skupu S . Pokaži: ako je $x \sim y$, onda je $[x] = [y]$, a
 ako $x \not\sim y$, onda su $[x]$ i $[y]$ disjunktne, tj.
 $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Čekajući je $x \sim y$. Pokažimo $[x] = [y]$.

[5] Neka je $z \in [x]$. Tada je $x \sim z$, a budući da je $\sim$
 relacija ekvivalencije, pa simetrična, to je $z \sim x$.

$$z \sim x \text{ i } x \sim y \implies z \sim y \implies y \sim z \implies z \in [y].$$

(simetričnost) (transitivnost)

[2] Analogno.

