

ATEMATICKA INDUKCIJA

Neka je $P(n)$ neka tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju n .
Neka vrijedi:

- 1) Tvrdnja je istinita za $n=1$, tj. vrijedi $P(1)$
- 2) Ako je tvrdnja istinita za n , onda je istinita za $n+1$, tj.

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

Tada je $P(n)$ istinita za sve $n \in \mathbb{N}$.

- 1) je baza indukcije
- 2) je korak indukcije

$$P(1) \wedge$$

$$\forall n (P(n) \Rightarrow P(n+1))$$

Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ i neka vrijedi:

$$1) 1 \in S$$

$$2) \text{ ako je } m \in S, \text{ onda je } m+1 \in S.$$

$$\Rightarrow \forall n P(n)$$

Tada je $S = \mathbb{N}$.

AD- Dokažite da za sve prirodne brojeve vrijedi:

$$a) 1+2+3+\dots+m = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$b) 1^2+2^2+3^2+\dots+m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$c) 1+3+5+\dots+2m-1 = m^2 \quad (\text{zadaca})$$

Rj.:

a)

baza: Za $n=1$ imamo: $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ u tvrdnja vrijedi
Za $n=1$

pretpostavka: Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

korak: $1+2+\dots+n+(n+1) = \{ \text{pretpostavka} \} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$

$$= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} =$$
$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Pokaži nam sljedeće: ako tvrdnja vrijedi za n , tada vrijedi i za $n+1$.

Po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$.

b)

i) Za $n=1$, imamo: $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$ u

ii) Pretp. da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii) $1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2 = \{ \text{pretpostavka} \} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)$

$$= \frac{(n+1)}{6} (2n^2 + n + 6n + 6) = \frac{(n+1)}{6} (2n^2 + 7n + 6) =$$
$$= \frac{(n+1)}{6} (2n^2 + 4n + 3n + 6) = \frac{(n+1)}{6} (2n(n+2) + 3(n+2)) =$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} =$$
$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

P. tvrdnja matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$

c) i) Za $n=1$ imamo: $1=1$ ✓

ii) Pretp. da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi: $1+3+5+\dots+2m-1 = m^2$

iii) $1+3+5+\dots+2m-1+2m+1 = \{\text{pretpostavka}\} = m^2+2m+1 = (m+1)^2$

Po principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za sve $m \in \mathbb{N}$

Warnena: U pretpostavci indukcije pogrešno bi bilo pretpostaviti da tvrdnja vrijedi za svaki $m \in \mathbb{N}$! (ne smijemo pretpostaviti ono što dokazujemo!)

ZAD. Dokažite da je broj $3^{2m+2} - 8m - 9$ djeljiv sa 64, $\forall m \geq 0$.

Rj.: i) Za $m=0$, imamo: $3^2 - 0 - 9 = 0$ što je djeljivo sa 64 ✓

ii) Pretp. da je za neki $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $3^{2m+2} - 8m - 9$ djeljivo sa 64, tj. da postoji $k \in \mathbb{Z}$ td. $3^{2m+2} - 8m - 9 = 64 \cdot k$.

$$\begin{aligned} \text{iii) } 3^{2(m+1)+2} - 8(m+1) - 9 &= 3^{(2m+2)+2} - 8m - 9 - 8 = \\ &= 9(3^{2m+2} - 8m - 9) + \underline{9 \cdot 8m} + \underline{9 \cdot 9} - \underline{8m} - \underline{9} - 8 = \\ \{\text{pretpostavka}\} &= 9 \cdot 64k + 64m + 64 = \\ &= 64(\underbrace{9k + m + 1}_{\in \mathbb{Z}}) \end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi $\forall m \geq 0$.

Warnena: Baze ne treba biti za $n=1$. Može se početi od bilo kojeg cijelog broja.

Provjera istinitosti baze je često trivijalna, ali nužno ju je obaviti. Ili baze nije istinita, zaključak ne vrijedi!

zad. Dokazite da je:

a) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ djeljivo s 133 za svaki $n \geq 0$. (zadaca)

b) $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ djeljivo s 7 za svaki $n \geq 0$. (zadaca)

rg.:

a) i) Za $n=0$ imamo: $11^2 + 12 = 121 + 12 = 133$ ✓

ii) Pretp. da je za neki $n \geq 0$ $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ djeljivo s 133, tj. da postoji $k \in \mathbb{Z}$ tak. $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133k$.

iii) $11^{n+1+2} + 12^{2(n+1)+1} = 11 \cdot 11^{n+2} + 12^2 \cdot 12^{2n+1} =$
 $= 12^2 (12^{2n+1} + 11^{n+2}) - 144 \cdot 11^{n+2} + 11 \cdot 11^{n+2} =$

{pretpostavka} $= 144 \cdot 133k - 133 \cdot 11^{n+2} =$
 $= 133 (144k - 11^{n+2})$
 $\in \mathbb{Z}$

po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi $\forall n \geq 0$

b) i) Za $n=0$ imamo: $37^2 + 16 + 1 = 1386 = 7 \cdot 198$ ✓

ii) Pretp. da je za neki $n \geq 0$ $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ djeljivo s 7, da postoji $k \in \mathbb{Z}$ tak. $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n = k \cdot 7$

iii) $37^{n+1+2} + 16^{n+1+1} + 23^{n+1} = 37 \cdot 37^{n+2} + 16 \cdot 16^{n+1} + 23 \cdot 23^n =$
 $= 37(37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n) - 37 \cdot 16^{n+1} - 37 \cdot 23^n + 16 \cdot 16^{n+1} + 23 \cdot 23^n$

{pretpostavka} $= 37 \cdot 7k + 21 \cdot 16^{n+1} - 14 \cdot 23^n =$
 $= 7(37k + 3 \cdot 16^{n+1} - 2 \cdot 23^n)$
 $\in \mathbb{Z}$

po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi $\forall n \geq 0$.

ke verzije principa matematičke indukcije:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Neka je } S \subseteq \mathbb{N} \text{ t.d.} \\ \quad 1) m_0 \in S \\ \quad 2) m \in S \Rightarrow m+1 \in S \\ \text{Izdale je } \{m_0, m_0+1, m_0+2, \dots\} \subseteq S. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Neka je } S \subseteq \mathbb{N} \text{ t.d.} \\ \quad 1) 1 \in S, 2 \in S \\ \quad 2) m \in S \Rightarrow m+2 \in S \\ \text{Izdale je } S = \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Neka je } S \subseteq \mathbb{N} \text{ t.d.} \\ \quad 1) 1 \in S \\ \quad 2) 1, 2, \dots, m \in S \Rightarrow m+1 \in S \\ \text{Izdale je } S = \mathbb{N} \end{array} \right.$$

AD. Dokažite da za svaki $n \geq 10$ vrijedi $2^n > 10 \cdot n^2$.

Rj.: i) Za $n=10$, imamo: $2^{10} = 1024 > 1000 = 10 \cdot 10^2$ ✓

ii) Pretp. da za neki $n \geq 10$ vrijedi: $2^n > 10 \cdot n^2$.

$$\text{iii) } \underbrace{2^{n+1}}_{\text{pretpostavka}} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot 10 \cdot n^2 \geq \underbrace{10(n+1)^2}_{\uparrow}$$

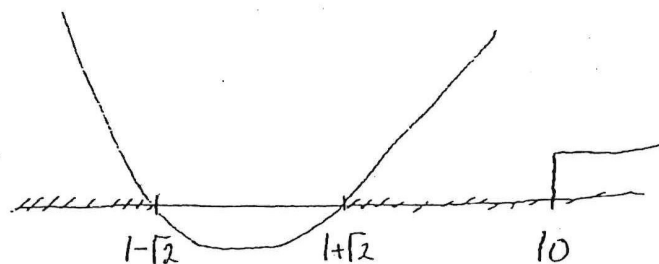
ili bismo željeli da to vrijedi.
Proverimo!

$$2 \cdot 10 \cdot m^2 \geq 10(m+1)^2$$

$$20m^2 \geq 10m^2 + 20m + 10$$

$$m^2 - 2m - 1 \geq 0$$

$$m_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$



Kona je potrebno da je $m^2 - 2m - 1 \geq 0$ za $m \geq 10$ što je istina.

Onda, nastavljamo:

$$2^{m+1} > 20 \cdot m^2 \geq 10(m+1)^2, \quad m \geq 10$$

↑
iz prethodnog zaključka

Po principu matematičke indukcije tvrdimo vrijedi $\forall m \geq 10$.

IZAD. Dokažite da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi:

a) $\sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}} < 3$ gdje se pojavljuje m korijena

b) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{m-1} + \sqrt{m} \leq \frac{m^2 + 3m}{4}$

R. a) Uvedimo oznaku: $A_m = \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}$ m korijena.

Primijetimo: $A_{m+1} = \sqrt{4 + A_m}$

i) Za $m=1$ imamo: $A_1 = \sqrt{4} = 2 < 3$ $\checkmark$

ii) Pretp. da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $A_m < 3$

iii) $A_{m+1} = \sqrt{4 + A_m} < \sqrt{4+3} = \sqrt{7} < 3$ $\checkmark$

↑
pretpostavka

b) i) Za $m=1$ imamo $1 \leq \frac{1+3}{4} = 1$ $\checkmark$

ii) Pretp. da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi: $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{m} < \frac{m^2 + 3m}{4}$

$$ii) \quad 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq \frac{n^2 + 3n}{4} + \sqrt{n+1}$$

(pretpostavka)

Indukcija bi vrijedila i za $n+1$ kad bi vrijedilo sljedeće:

$$\frac{n^2 + 3n}{4} + \sqrt{n+1} \leq \frac{(n+1)^2 + 3(n+1)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2 + 3n}{4} + \sqrt{n+1} \leq \frac{n^2 + 2n + 1 + 3n + 3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{n+1} \leq \frac{n}{2} + 1 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad x \mapsto x^2 \text{ rastuća f-ja na } [0, \infty)$$

$$\Leftrightarrow_{n \in \mathbb{N}} n+1 \leq \frac{n^2}{4} + n+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2}{4} \geq 0 \quad \text{za prirodan broj } n$$

Dakle, imamo:

$$1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n+1} \leq \frac{n^2 + 3n}{4} + \sqrt{n+1} \leq \frac{(n+1)^2 + 3(n+1)}{4}$$

Po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$.

1AD. Dokažite da za neki $n \geq 2$ vrijedi:

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n$$

g.:

i) Za $n=2$ imamo:

$$\frac{2}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2$$

$$1 < 1 + \frac{5}{6} < 2 \quad \text{u}$$

ii) Pretp. da za neki $n \geq 2$ vrijedi:

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n$$

iii) Označimo:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^m - 1} + \underbrace{\frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^{m+1} - 1}}$$

ukupno članova sume: $2^{m+1} - 1 - 2^n + 1 = 2^m$

• Pokažimo prvo da $\frac{m+1}{2} < A$.

$$A = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^m - 1}}_{\text{pretpostovka} > \frac{m}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^{m+1} - 1}}_{\text{svaki član je veći od } \frac{1}{2^{m+1}}}$$

Ovakle, $A > \frac{m}{2} + 2^m \cdot \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{m}{2} + \frac{1}{2} = \frac{m+1}{2}$ u

• Pokažimo sad da $A < m+1$.

$$A = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^m - 1}}_{\text{pretpostovka} < m} + \underbrace{\frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^{m+1} - 1}}_{\text{svaki član osim prvog je manji od } \frac{1}{2^m}}$$

Ovakle, $A < m + 2^m \cdot \frac{1}{2^m} = m+1$ u.

Po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve $m \in \mathbb{N}$.

7.10. Dokažite da za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a+b > 0$ i za sve $m \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$2^{m-1}(a^m + b^m) \geq (a+b)^m$$

Rj.:

i) Za $m=1$ imamo: $2^0(a+b) \geq (a+b)^1$
 $a+b \geq a+b$ u

ii) Pretp. da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$2^{m-1}(a^m + b^m) \geq (a+b)^m$$

i) u koraku indukcije želimo pokazati:

$$2^n (a^{n+1} + b^{n+1}) \geq (a+b)^{n+1}$$

Režijsimo olomu stream:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \stackrel{\text{induktionshypothese}}{\leq} (a+b) 2^{n-1} (a^n + b^n)$$

kočavamo: ako bi vrijedilo $2^{n-1}(a^n + b^n)(a+b) \leq 2^n(a^{n+1} + b^{n+1})$,
tada bismo imali:

$$\underline{(a+b)^{n+1}} = 2^{n-1}(a^n + b^n)(a+b) \leq \underline{2^n(a^{n+1} + b^{n+1})}$$

Pokažimo: $2^{m-1}(a^m + b^m)(a+b) \leq 2^m(a^{m+1} + b^{m+1}) \quad | \cdot \frac{1}{2^{m-1}}$

$$\Leftrightarrow a^{m+1} + a b^m + a^n b + b^{m+1} \leq 2a^{m+1} + 2b^{m+1}$$

$$\Leftrightarrow a^{n+1} - ab^n - a^nb + b^{n+1} \geq 0$$

1420/26

$$\Leftrightarrow a(a^m - b^m) - b(a^m - b^m) \geq 0$$

$$a - b \rightarrow 2b$$

$$\Leftrightarrow (a^m - b^m)(a - b) \geq 0$$

$a \geq 151$

I slučaj :

$$a \geq b$$

402161

$\Rightarrow$

$$\mathcal{C}^n \supseteq \mathcal{G}^n$$

6250

$a < b$

Satz, $a-b \geq 0$
 $a^n - b^n \geq 0$

$$\} \Rightarrow (a-b)(a^m - b^m) \geq 0 \quad x$$

12185

II slučaj :

$$a < b$$

$$J_2 \quad a+b > 0$$

addition $-a < b$

$$\} =$$

$$C^n < b^n$$

Daher, $a - b < 0$

$$c_i^m - l_i^m < 0$$

$$\} \Rightarrow (a-b)(a^m - b^m) \geq 0 \quad \checkmark$$

Po principu matematičke indukcije vrijedi za sve n
 $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ i $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{R}$ t.d.

[illegible]

ZAD. Pokažite da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$2^{2m+1} - 9m^2 + 3m - 2 \text{ je djeljivo s } 54$$

Rj.:

- i) Za $m=1$ imamo: $2^3 + 9 + 3 - 2 = 0$ što je djeljivo s 54.
- ii) Pretp. da je za neki $m \in \mathbb{N}$ $2^{2m+1} - 9m^2 + 3m - 2$ djeljivo s 54, da postoji $k \in \mathbb{Z}$ t.d. $2^{2m+1} - 9m^2 + 3m - 2 = 54k$.

iii)

$$\begin{aligned} 2^{2m+3} - 9(m+1)^2 + 3(m+1) - 2 &= \\ &= 4 \cdot 2^{2m+1} - 9m^2 - 18m - 9 + 3m + 3 - 2 = \\ &= (2^{2m+1} - 9m^2 + 3m - 2) + 3 \cdot 2^{2m+1} - 18m - 6 = \end{aligned}$$

$$\{\text{preostavka}\} = 54k + 6(2^{2m} - 3m - 1)$$

Primijetimo da će cijeli izraz biti djeljiv s 54 ako je $2^{2m} - 3m - 1$ djeljivo s 9 za neki $m \in \mathbb{N}$.

Pokažimo indukcijom da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$2^{2m} - 3m - 1 \text{ je djeljivo s } 9$$

- i) Za $m=1$ imamo: $2^2 - 3 - 1 = 0$ što je djeljivo s 9.

- ii) Pretp. da je za neki $m \in \mathbb{N}$ $2^{2m} - 3m - 1$ djeljivo s 9, tj. da postoji $k_1 \in \mathbb{Z}$ t.d. $2^{2m} - 3m - 1 = 9k_1$.

$$\begin{aligned} \text{iii) } 2^{2m+2} - 3(m+1) - 1 &= 4 \cdot 2^{2m} - 3m - 3 - 1 = \\ &= 2^{2m} + 3 \cdot 2^{2m} - 3m - 3 - 1 = \\ &= (2^{2m} - 3m - 1) + 3(2^{2m} - 1) = \end{aligned}$$

$$\{\text{preostavka}\} = 9k_1 + 3(2^{2m} - 1)$$

Trudimo se da se dokaže da je $2^{2^m} - 1$ djeljivo sa 3 za svaki $m \in \mathbb{N}$.

Pokažimo indukcijom da to svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$2^{2^m} - 1 \text{ je djeljivo sa } 3$$

i) Za $m=1$ imamo $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ i

ii) Pretp. da je za neki $m \in \mathbb{N}$ $2^{2^m} - 1$ djeljivo sa 3, tj. da postoji

$$k_2 \in \mathbb{Z} \text{ t.d. } 2^{2^m} - 1 = 3 k_2.$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } 2^{2^{m+2}} - 1 &= 4 \cdot 2^{2^m} - 1 = (2^{2^m} - 1) + 3 \cdot 2^{2^m} = \{\text{pretpostavka}\} = \\ &= 3 k_2 + 3 \cdot 2^{2^m} = \\ &= 3 (k_2 + 2^{2^m}) \\ &\quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Tad se 3 puta provemo na principu matematičke indukcije.

JAKA INDUKCIJA - 1 NIVEL

$$i) \quad P(1) \wedge P(2)$$

$$ii) \quad (P(k-1) \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1)$$

Zad. Definirajmo niz $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$

$$\overline{T}_1 = \overline{T}_2 = \overline{T}_3 = 1$$

$$\overline{T}_m = \overline{T}_{m-1} + \overline{T}_{m-2} + \overline{T}_{m-3}, \quad m \geq 4$$

Dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: $T_n < 2^n$.

7. 7.

i) $\mathbb{Z}_2$ $m=1$: $T_1 = 1 < 2$

$$I_d \quad M=2 \quad : \quad T_2 = 1 < 4$$

$$I_{de} \quad m=3 \quad T_3 = 1 \subset \mathcal{P}$$

ii) Pretp. da postoji $m \geq 3$ td. vrijedi:

$$T_{m-2} < 2^{m-2}$$

$$T_{n-1} < 2^{n-1}$$

$$T_m < 2^m$$

iii) $T_{m+1} = T_m + T_{m-1} + T_{m-2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pretpostovka}}}{<} 2^m + 2^{m-1} + 2^{m-2} =$

$$< 2^{m+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) =$$

$$< 2^{n+1} \frac{7}{8} <$$

$$< 2^{m+1}$$

Po strogom principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi

Neke $x \in \mathbb{R}$ takav da je $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Dokažite da je
 $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nap! u. P.I. base je pretp. da trebaju vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

ZAD1

ZAD1 $64 \mid 5 - 8n - 9$ za sve $n \geq 0$

RI B.I. za $n=0$ imamo $3^2 - 8 \cdot 0 - 9 = 9 - 9 = 0 \equiv 64 \mid 0 \checkmark$

P.I. Pretp da je za neki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $64 \mid 3^{2n+2} - 8n - 9$

K.I. T.D. $64 \mid 3^{2n+4} - 8n - 16 - 9$

Nebo ~~64~~ $= 3^{2n+2} - 8n - 9$

$$3^{2n+4} - 8n - 27 = 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9) - 8n - 27$$

$$= 9 \cdot 64 - 64n + 64$$

$$= 64(9k + n + 1) \checkmark$$

Nap! Baza ne mora biti $n=1$

$\rightarrow$ krećemo od bilo kojeg cijelog broja

Prigovori oline logika di se mora napreiviti

ZAD1

(a) $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$

b) $7 \mid 37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n \quad \forall n \geq 0$
DE

Princip dominacije | 00030 Ako $P(n)$ pedue, post
(e i $P(n+1)$)!

Ako je n -ti slučaj

znace da ako n -ti pedue, post ce i $(n+1)$
Kad se prvi - svi i svi pedue !!

$$S \subseteq \mathbb{N} \text{ tkr da } \begin{cases} \exists n \in S \\ \exists n \in S \end{cases} \Rightarrow S \supseteq \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$$

$$S \subseteq \mathbb{N} \text{ tkr da } \begin{cases} \exists 1 \in S, \\ n \in S \Rightarrow n+1 \in S \end{cases} \Rightarrow S \supseteq \mathbb{N}$$