

UVOD U MATEMATIKU

Skripta za vježbe

Riješeni zadaci i zadaci za samostalan rad

Listopad 2026.

Predgovor

Ova skripta namijenjena je radu na vježbama iz kolegija *Uvod u matematiku* i samostalnom uvježbavanju gradiva. Nastala je uređivanjem rukopisnih bilježaka: srodni zadaci objedinjeni su, rješenja dopunjena, a gradivo raspoređeno od logike i skupova do polinoma i racionalnih funkcija. Svako poglavlje donosi potreban teorijski podsjetnik, razrađene zadatke te zadatke za samostalan rad s kratkim odgovorima na kraju skripte.

Oznake i osnovni pojmovi usklađeni su sa skriptom za predavanja *Uvod u matematiku* Dijane Ilišević i Gorana Muića (revizija, siječanj 2023.). Ovaj materijal prati teme zastupljene u bilješkama s vježbi; za cjelovito teorijsko izlaganje treba se služiti i skriptom za predavanja.

U rješenjima se naglašava zašto je pojedini korak dopušten. Pri rješavanju jednadžbi valja zapisati uvjete definiranosti, a nakon kvadriranja provjeriti dobivene kandidate. Pri dokazivanju svojstva treba obuhvatiti sve elemente zadanog skupa; za opovrgavanje opće tvrdnje dovoljan je jedan protuprimjer.

Dogovori i oznake

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Uobičajene oznake $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ označavaju cijele, racionalne, realne i kompleksne brojeve.
- Negacija suda A zapisuje se $\overline{A}$. Za složenu formulu crta obuhvaća cijelu formulu, primjerice $\overline{A \wedge B}$. Oznaka $\equiv$ označava semantičku jednakost formula.
- Otvoreni interval zapisuje se $\langle a, b \rangle$, a poluotvoreni intervali $[a, b)$ i $\langle a, b]$. Uređeni par zapisuje se (a, b) .
- $A \subseteq B$ dopušta jednakost. Komplement skupa A označava se A^c i uvijek se promatra u unaprijed zadanom univerzalnom skupu U ; partitivni skup skupa S označava se $\mathcal{P}(S)$.
- $f^{-1}(S)$ označava prasliku skupa S ; ta oznaka ima smisla i kada funkcija f nema inverznu funkciju.
- Kao na predavanjima, $\log$ označava logaritam s bazom 10, a $\ln$ prirodni logaritam. Najveća zajednička mjera brojeva (i polinoma) a i b označava se $M(a, b)$, a stupanj polinoma f s $\deg f$.
- U trigonometrijskim zadacima kutovi su u radijanima. Ako nije navedeno drukčije, jednadžbe i nejednadžbe rješavaju se u $\mathbb{R}$.

Sadržaj

Predgovor	i
1 Logika sudova i predikata	1
1.1 Sudovi	1
1.2 Logički veznici	2
1.3 Semantička jednakost i tautologije	4
1.4 Obrat i obrat po kontrapoziciji	7
1.5 Predikati i kvantifikatori	8
1.6 Zadaci za samostalan rad	12
2 Skupovi	13
2.1 Pojam skupa. Podskupovi i partitivni skup	13
2.2 Operacije sa skupovima	15
2.3 Particije skupa	21
2.4 Kartezijev produkt	22
2.5 Zadaci za samostalan rad	24
3 Relacije	25
3.1 Pojam relacije	25
3.2 Svojstva binarnih relacija	25
3.3 Relacije ekvivalencije i parcijalnog uređaja	29
3.4 Suprotna relacija i kompozicija relacija	32
3.5 Zadaci za samostalan rad	33
4 Funkcije	35
4.1 Pojam funkcije. Injekcija, surjekcija i bijekcija	35
4.2 Prirodna domena	38
4.3 Slika i praslika	42
4.4 Kompozicija funkcija	48
4.4.1 Slika pomoću kompozicije	51
4.5 Inverzna funkcija	52
4.5.1 Ciklometrijske (arkus) funkcije	54
4.6 Svojstva funkcija: parnost i omeđenost	56
4.6.1 Parnost	56

4.6.2	Omeđenost	58
4.7	Monotonost	59
4.8	Zadaci za samostalan rad	61
5	Jednadžbe i nejednadžbe	62
5.1	Ekvivalentni prijelazi	62
5.2	Racionalne jednadžbe, parametri i apsolutne vrijednosti	63
5.3	Iracionalne jednadžbe	64
5.4	Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe	65
5.5	Nejednadžbe	67
5.6	Zadaci za samostalan rad	70
6	Trigonometrija	71
6.1	Formule i identiteti	71
6.2	Grafovi trigonometrijskih funkcija	72
6.3	Trigonometrijske jednadžbe	73
6.4	Trigonometrijske nejednadžbe	76
6.5	Zadaci za samostalan rad	78
7	Matematička indukcija	79
7.1	Princip matematičke indukcije	79
7.2	Djeljivost	81
7.3	Inačice principa matematičke indukcije	82
7.4	Nejednakosti	83
7.5	Jaka indukcija i rekurzivno zadani nizovi	86
7.6	Zadaci za samostalan rad	87
8	Djeljivost i kongruencije	88
8.1	Djeljivost i prosti brojevi	88
8.2	Najveća zajednička mjera i Euklidov algoritam	92
8.3	Kongruencije	96
8.4	Zadaci za samostalan rad	99
9	Polinomi	100
9.1	Osnovni pojmovi	100
9.2	Dijeljenje polinoma s ostatkom	104
9.3	Djeljivost i najveća zajednička mjera	106
9.4	Nultočke polinoma i Bézoutov teorem	107
9.5	Hornerov algoritam	110
9.6	Cjelobrojne i racionalne nultočke	111
9.7	Kratnost nultočke i osnovni teorem algebre	113
9.8	Formalna derivacija polinoma	114
9.9	Polinomi s cjelobrojnim koeficijentima	116
9.10	Zadaci za samostalan rad	118

10 Rastav na parcijalne razlomke	120
10.1 Racionalne funkcije i oblik rastava	120
10.2 Linearni faktori	121
10.3 Kvadratni faktori	122
10.4 Nepravi razlomci i opći oblik rastava	124
10.5 Zadaci za samostalan rad	125
A Odgovori i upute za samostalan rad	126
Literatura	131

Poglavlje 1

Logika sudova i predikata

1.1 Sudovi

Definicija 1.1. *Sud* (ili *izjava*) je smisljena izjavna rečenica koja je ili istinita ili lažna, ali ne istodobno i istinita i lažna.

Sudove označavamo velikim slovima $P, Q, R, \dots$ (ili $A, B, C, \dots$). Upitne rečenice i rečenice kojima nešto naređujemo ili poželimo nisu sudovi. Rečenica ne mora biti istinita da bi bila sud; važno je samo da ima točno jednu od dviju istinitosnih vrijednosti.

Za sud P s $\tau(P)$ označavamo njegovu *istinitosnu vrijednost*:

$$\tau(P) = 1 \text{ ako je sud } P \text{ istinit,} \quad \tau(P) = 0 \text{ ako je sud } P \text{ lažan.}$$

Zadatak 1.2. Koje su od sljedećih rečenica sudovi? Za sudove odredite istinitosnu vrijednost kad god je to moguće.

- (a) Dan 11. 9. 2012. bio je utorak.
- (b) Broj 13 jednak je broju 7.
- (c) $1 + 1 + 1 = 2$.
- (d) $x + 1 = 2$.
- (e) Laku noć!
- (f) Koliko je sati?
- (g) Na stotom mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\sqrt{2}$ nalazi se znamenka 9.
- (h) Izračunajte $15 \cdot 3^2 + \sqrt{17}$!

Rješenje. (a) Sud, istinit (11. 9. 2012. zaista je bio utorak).

(b) Sud, lažan.

(c) Sud, lažan.

(d) Nije sud: rečenica sadrži varijablu x čija vrijednost nije zadana, pa ne možemo reći je li istinita. Takve rečenice zovemo predikatima (vidi odjeljak 1.5).

(e) Nije sud (rečenica nije izjavna).

(f) Nije sud (pitanje).

(g) Sud. Ta je rečenica ili istinita ili lažna, iako njezinu istinitost ne možemo provjeriti napamet; to što nam istinitosna vrijednost nije odmah poznata ne znači da rečenica nije sud. (Računalom se može provjeriti da je na stotom decimalnom mjestu znamenka 7, pa je sud lažan.)

(h) Nije sud (zahtjev). □

Napomena 1.3. Ni rečenica „Broj 0.00001 je mali broj.” nije sud, jer „mali broj” nije precizno određen pojam, pa rečenica nema jednoznačnu istinitosnu vrijednost.

1.2 Logički veznici

Od jednostavnih sudova gradimo složene sudove pomoću logičkih veznika:

oznaka	naziv	čita se	zapis
$\wedge$	konjunkcija	i	$P \wedge Q$
$\vee$	disjunkcija	ili	$P \vee Q$
$\neg$	negacija	ne	$\overline{P}$
$\implies$	implikacija	ako ... onda ...; ... povlači ...	$P \implies Q$
$\iff$	ekvivalencija	... ako i samo ako ...	$P \iff Q$

Negacija je *unarni* veznik (djeluje na jedan sud), a ostali su veznici *binarni* (djeluju na dva suda). Umjesto „ako i samo ako” kraće pišemo i „akko”.

Istinitost složenog suda ovisi samo o istinitosti sudova od kojih je sastavljen. Veznike definira sljedeća *semantička tablica* (tablica istinitosti):

P	Q	$\overline{P}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$	$P \iff Q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Riječima:

- **Konjunkcija** $P \wedge Q$ istinita je ako i samo ako su oba suda P i Q istinita.
- **Disjunkcija** $P \vee Q$ istinita je kad je barem jedan od sudova P, Q istinit. Disjunkcija je istinita i kad su oba suda istinita.
- **Negacija** $\overline{P}$ istinita je ako je P lažan, i obratno.
- **Implikacija** $P \implies Q$ lažna je točno onda kad je P istinit, a Q lažan. Sud P zovemo *pretpostavkom*, a sud Q *zaključkom* implikacije.
- **Ekvivalencija** $P \iff Q$ istinita je točno onda kad su P i Q oba istinita ili oba lažna.

Primjer 1.4. Neka je P sud „Pariz je u Francuskoj”, a Q sud „ $2 + 2 = 5$ ”. Tada je $\tau(P) = 1$ i $\tau(Q) = 0$, pa je

$$\tau(P \wedge Q) = 0, \quad \tau(P \vee Q) = 1, \quad \tau(\overline{P}) = 0,$$

gdje je $\overline{P}$ sud „Pariz nije u Francuskoj”.

Neka je sada P sud „Pariz je u Engleskoj”, a Q sud „ $2 + 2 = 5$ ”. Tada je $\tau(P) = \tau(Q) = 0$, pa je $\tau(P \implies Q) = 1$. Također je istinit i sud „Pariz je u Brazilu ako i samo ako je $2 + 3 = 6$ ”, jer su obje njegove strane lažne.

Napomena 1.5 (Istinitost implikacije). Implikacija $P \implies Q$ tvrdi samo sljedeće: ako je P istinit, onda je i Q istinit. Ako je P lažan, Q može biti bilo što i implikacija je istinita. Drugim riječima, krenemo li od lažne pretpostavke, ispravnim zaključivanjem možemo doći i do istine i do laži; krenemo li od istine, ispravnim zaključivanjem dolazimo samo do istine.

Zadatak 1.6. Neka je P sud „Hladno je”, a Q sud „Pada kiša”. Iskažite riječima sljedeće sudove:

- | | |
|---------------------------------|--|
| (a) $\overline{P}$; | (f) $Q \vee \overline{P}$; |
| (b) $P \wedge Q$; | (g) $\overline{P} \wedge \overline{Q}$; |
| (c) $P \vee Q$; | (h) $P \iff \overline{Q}$; |
| (d) $P \iff Q$; | (i) $\overline{\overline{Q}}$; |
| (e) $P \implies \overline{Q}$; | (j) $(P \wedge \overline{Q}) \implies P$. |

Rješenje. (a) Nije hladno.

(b) Hladno je i pada kiša.

(c) Hladno je ili pada kiša.

(d) Hladno je ako i samo ako pada kiša.

(e) Ako je hladno, onda ne pada kiša.

(f) Pada kiša ili nije hladno.

(g) Nije hladno i ne pada kiša.

(h) Hladno je ako i samo ako ne pada kiša.

(i) Nije istina da ne pada kiša, tj. pada kiša. Sud $\overline{\overline{Q}}$ ima istu istinitosnu vrijednost kao Q .

(j) Ako je hladno i ne pada kiša, onda je hladno. Taj je sud uvijek istinit: ako je pretpostavka istinita, istinit je i P .

Uočimo vezu nekih od ovih sudova s implikacijom $P \implies Q$ („Ako je hladno, onda pada kiša”). Sud (f) „Pada kiša ili nije hladno” ima istu istinitosnu vrijednost kao $P \implies Q$ (oba su lažna samo kad je hladno i ne pada kiša), a isto vrijedi i za sud $\overline{Q} \implies \overline{P}$ („Ako ne pada kiša, onda nije hladno”). Slično, sud (e) ima istu istinitosnu vrijednost kao sud $Q \implies \overline{P}$ („Ako pada kiša, onda nije hladno”). Takve sudove zvat ćemo semantički jednakima (odjeljak 1.3). $\square$

Zadatak 1.7. Neka je P sud „Hladno je”, a Q sud „Pada kiša”. Zapišite simbolima:

- (a) Hladno je i ne pada kiša.
- (b) Ako pada kiša, onda je hladno.
- (c) Nije istina da je hladno ili da pada kiša.
- (d) Hladno je ako i samo ako ne pada kiša.

Rješenje. Redom dobivamo $P \wedge \overline{Q}$, $Q \implies P$, $\overline{P \vee Q}$ i $P \iff \overline{Q}$. U (c) crta negacije proteže se nad cijelom disjunkcijom jer se negira cijela tvrdnja „hladno je ili pada kiša”. $\square$

Zadatak 1.8. Odredite istinitost sljedećih sudova:

- (a) Ako je $3 + 2 = 7$, onda je $4 + 4 = 8$.

- (b) Nije istina da vrijedi: $2 + 2 = 5$ ako i samo ako $4 + 4 = 10$.
- (c) Pariz je u Njemačkoj ili je London u Francuskoj.
- (d) Nije istina da je $1 + 1 = 3$ ili $2 + 1 = 3$.
- (e) Nije istina da vrijedi: ako je Pariz u Njemačkoj, onda je London u Francuskoj.

Rješenje. U svakom podzadatku označimo jednostavne sudove s P i Q (redom kojim se pojavljuju) i odredimo njihove istinitosne vrijednosti.

- (a) $\tau(P) = 0$, $\tau(Q) = 1$, pa je $\tau(P \implies Q) = 1$. Sud je **istinit**.
- (b) $\tau(P) = 0$, $\tau(Q) = 0$, pa je $\tau(P \iff Q) = 1$ i $\tau(\overline{P \iff Q}) = 0$. Sud je **lažan**.
- (c) $\tau(P) = 0$, $\tau(Q) = 0$, pa je $\tau(P \vee Q) = 0$. Sud je **lažan**.
- (d) $\tau(P) = 0$, $\tau(Q) = 1$, pa je $\tau(P \vee Q) = 1$ i $\tau(\overline{P \vee Q}) = 0$. Sud je **lažan**.
- (e) $\tau(P) = 0$, $\tau(Q) = 0$, pa je $\tau(P \implies Q) = 1$ (lažna pretpostavka) i $\tau(\overline{P \implies Q}) = 0$. Sud je **lažan**. $\square$

1.3 Semantička jednakost i tautologije

Definicija 1.9. Sudovi (formule) X i Y *semantički su jednaki*, u oznaci $X \equiv Y$, ako im se semantičke tablice podudaraju, tj. ako imaju istu istinitosnu vrijednost za svaki izbor istinitosnih vrijednosti sudova od kojih su sastavljeni.

Sud je *tautologija* ako je uvijek istinit, bez obzira na istinitost sudova od kojih je sastavljen. Sud koji je uvijek lažan zove se *kontradikcija*.

Najjednostavniji primjer tautologije je $P \vee \overline{P}$, a kontradikcije $P \wedge \overline{P}$. Uočimo da je $X \equiv Y$ ako i samo ako je $X \iff Y$ tautologija. Ako formula sadrži n različitih sudova, njezina semantička tablica ima 2^n redaka.

Zadatak 1.10. Pomoću semantičkih tablica provjerite zakone asocijativnosti i distributivnosti za konjunkciju i disjunkciju:

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R, \quad P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R \quad (\text{asocijativnost}),$$

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \quad (\text{distributivnost}).$$

Rješenje. Detaljno provjerimo posljednju jednakost. Tablica ima $2^3 = 8$ redaka; pomoćne stupce računamo redom iz definicija veznika.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Istaknuti stupci su jednaki, pa je $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$. Riječima: formula $P \vee (Q \wedge R)$ istinita je ako i samo ako je istinita formula $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Ostale tri jednakosti provjeravaju se na isti način. U sljedećoj tablici u svakom stupcu obje formule iz zaglavlja imaju prikazanu (zajedničku) vrijednost:

P	Q	R	$P \wedge (Q \wedge R)$ $(P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R)$ $(P \vee Q) \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0

Zbog asocijativnosti u izrazima poput $P \wedge Q \wedge R$ i $P \vee Q \vee R$ zagrade možemo izostaviti. $\square$

Zadatak 1.11. Dokažite da je sud $(P \wedge (P \implies Q)) \implies Q$ tautologija, tj. da je istinit za sve sudove P i Q .

Rješenje. Sastavimo semantičku tablicu:

P	Q	$P \implies Q$	$P \wedge (P \implies Q)$	$(P \wedge (P \implies Q)) \implies Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Posljednji stupac sadrži samo jedinice, pa je sud tautologija. Na toj se tautologiji temelji pravilo zaključivanja *modus ponens*: ako vrijede P i $P \implies Q$, onda vrijedi Q . Kratko ga zapisujemo

$$\frac{P \quad P \implies Q}{Q}$$

$\square$

Zadatak 1.12. Dokažite da je sud $(P \implies Q) \iff (\overline{Q} \implies \overline{P})$ tautologija.

Rješenje. Sastavimo semantičku tablicu:

P	Q	$P \implies Q$	$\overline{Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q} \implies \overline{P}$	$(P \implies Q) \iff (\overline{Q} \implies \overline{P})$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Posljednji stupac sadrži samo jedinice. Dakle, $(P \implies Q) \equiv (\overline{Q} \implies \overline{P})$: tvrdnja „ako je P , onda je Q ” semantički je jednaka tvrdnji „ako nije Q , onda nije P ”. $\square$

Zadatak 1.13. Dokažite da je implikacija tranzitivna, tj. da je za bilo koja tri suda P, Q, R sud

$$((P \implies Q) \wedge (Q \implies R)) \implies (P \implies R)$$

istinit.

Rješenje. Označimo $F = (P \implies Q) \wedge (Q \implies R)$.

P	Q	R	$P \implies Q$	$Q \implies R$	F	$P \implies R$	$F \implies (P \implies R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Posljednji stupac sadrži samo jedinice, pa je sud tautologija. Odgovarajuće pravilo zaključivanja glasi

$$\frac{P \implies Q \quad Q \implies R}{P \implies R}$$

□

Zadatak 1.14. Dokažite sljedeće semantičke jednakosti:

- (a) $P \implies Q \equiv \overline{P} \vee Q$; (d) $\overline{P \implies Q} \equiv P \wedge \overline{Q}$;
 (b) $\overline{P \wedge Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}$; (e) $\overline{P \iff Q} \equiv (P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$;
 (c) $\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$; (f) $\overline{\overline{P}} \equiv P$.

Rješenje. Jednakosti (a), (b) i (c) provjeravamo tablicom:

P	Q	$P \implies Q$	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1

U svakom od triju blokova istaknuti stupci su jednaki.

Jednakost (f) slijedi izravno iz definicije negacije: dvostruka negacija vraća početnu vrijednost. Jednakosti (d) i (e) ne moramo provjeravati tablicom, nego ih možemo izvesti iz već dokazanih:

$$\overline{P \implies Q} \stackrel{(a)}{\equiv} \overline{\overline{P} \vee Q} \stackrel{(c)}{\equiv} \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q} \stackrel{(f)}{\equiv} P \wedge \overline{Q}.$$

Za (e) koristimo $P \iff Q \equiv (P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$ (provjerite tablicom), a zatim (b) i (d):

$$\overline{P \iff Q} \equiv \overline{(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)} \stackrel{(b)}{\equiv} \overline{P \implies Q} \vee \overline{Q \implies P} \stackrel{(d)}{\equiv} (P \wedge \overline{Q}) \vee (Q \wedge \overline{P}).$$

Zbog komutativnosti konjunkcije posljednja je formula jednaka $(P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$. □

Jednakosti (b) i (c) zovu se *De Morganovi zakoni*; jednakost (d) daje *negaciju implikacije*. Sve dokazane semantičke jednakosti, zajedno s komutativnošću konjunkcije i disjunkcije, ubuduće koristimo bez ponovnog dokazivanja. Primjerice, $P \iff Q \equiv (P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$ pokazuje da dokaz tvrdnje oblika „ako i samo ako” sadrži dokaze dviju implikacija.

Zadatak 1.15. Pojednostavnite $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \overline{Q})$ i odredite negaciju formule $(P \vee Q) \implies R$.

Rješenje. Distributivnost i činjenica da je $Q \vee \overline{Q}$ tautologija daju

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \overline{Q}) \equiv P \wedge (Q \vee \overline{Q}) \equiv P.$$

Prema negaciji implikacije i distributivnosti,

$$\overline{(P \vee Q) \implies R} \equiv (P \vee Q) \wedge \overline{R} \equiv (P \wedge \overline{R}) \vee (Q \wedge \overline{R}). \quad \square$$

Negiranje složenih izjava

Iz zadatka 1.14 dobivamo pravila za negiranje složenih izjava:

$$\overline{P \wedge Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}, \quad \overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}, \quad \overline{P \implies Q} \equiv P \wedge \overline{Q}, \quad \overline{P \iff Q} \equiv (P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q).$$

Kod negiranja „i” prelazi u „ili” i obratno, a negacija implikacije nije implikacija, nego konjunkcija.

Zadatak 1.16. Negirajte sljedeće izjave:

- (a) Broj 2 je prost i paran.
- (b) Broj 3 je prost ili paran.
- (c) Ako pada kiša, onda su ulice mokre.
- (d) Broj 2 je prost ako i samo ako je paran.

Rješenje. (a) Izjava je oblika $P \wedge Q$, pa je negacija $\overline{P} \vee \overline{Q}$: Broj 2 nije prost ili nije paran.

(b) Izjava je oblika $P \vee Q$, pa je negacija $\overline{P} \wedge \overline{Q}$: Broj 3 nije prost i nije paran.

(c) Izjava je oblika $P \implies Q$, pa je negacija $P \wedge \overline{Q}$: Pada kiša i ulice nisu mokre.

(d) Izjava je oblika $P \iff Q$, pa je negacija $(P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$: Broj 2 je prost i nije paran, ili broj 2 nije prost i paran je. $\square$

1.4 Obrat i obrat po kontrapoziciji

Definicija 1.17. Sud $Q \implies P$ zove se *obrat* suda $P \implies Q$. Sud $\overline{Q} \implies \overline{P}$ zove se *obrat po kontrapoziciji* suda $P \implies Q$.

Napomena 1.18. Sudovi $P \implies Q$ i $Q \implies P$ nisu semantički jednaki:

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

Dakle, iz istinitosti implikacije ne smijemo zaključiti da vrijedi i njezin obrat. Naprotiv, obrat po kontrapoziciji semantički je jednak polaznoj implikaciji (zadatak 1.12):

$$(P \implies Q) \equiv (\overline{Q} \implies \overline{P}).$$

Zato implikaciju $P \implies Q$ često dokazujemo tako da dokažemo njezin obrat po kontrapoziciji.

Primjer 1.19. Tvrdnja „Ako je prirodni broj djeljiv s 4, onda je djeljiv s 2” istinita je. Njezin obrat „Ako je prirodni broj djeljiv s 2, onda je djeljiv s 4” nije istinit; protuprimjer je broj 2. Obrat po kontrapoziciji glasi „Ako prirodni broj nije djeljiv s 2, onda nije djeljiv s 4” i istinit je, jednako kao polazna tvrdnja.

Slično, izjava „Ako pada kiša, onda su ulice mokre” ima obrat po kontrapoziciji „Ako ulice nisu mokre, onda kiša ne pada”.

Zadatak 1.20. Dokažite: ako je kvadrat cijelog broja n paran, onda je i n paran.

Rješenje. Dokazujemo obrat po kontrapoziciji: ako je n neparan, onda je n^2 neparan. Ako je n neparan, postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $n = 2k + 1$. Tada je $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, pa je n^2 neparan. Budući da je obrat po kontrapoziciji semantički jednak polaznoj tvrdnji, i ona je dokazana. $\square$

Napomena 1.21. Na negaciji implikacije $\overline{P \implies Q} \equiv P \wedge \overline{Q}$ temelji se *metoda suprotnog* (dokaz kontradikcijom): pretpostavimo da vrijedi P i $\overline{Q}$ te iz toga izvedemo nešto što je u suprotnosti s nekom poznatom istinom. Time je pokazano da je $\overline{P \implies Q}$ lažno, odnosno da je $P \implies Q$ istinito. Obrat po kontrapoziciji daje tvrdnju koja je semantički jednaka polaznoj, a metoda suprotnog promatra tvrdnju suprotne istinitosti.

1.5 Predikati i kvantifikatori

Rečenice poput „Prirodni broj x nije djeljiv s 3” ili „ x i y zadovoljavaju $y^2 < 3x$ ” nisu sudovi jer sadrže varijable čije vrijednosti nisu zadane. Takve rečenice zovemo *predikatima* i označavamo ih $P(x)$, $Q(x, y)$ itd. Zamjenom varijabli konkretnim vrijednostima iz predikata dobivamo sudove: primjerice, za $P(x)$ = „Prirodni broj x nije djeljiv s 3” sud $P(2)$ je istinit, a sud $P(6)$ lažan. Drugi način dobivanja sudova iz predikata jest dodavanje kvantifikatora.

Definicija 1.22. Simbol $\forall$ zove se *univerzalni kvantifikator* i čita se „za svaki” (ili „za sve”). Simbol $\exists$ zove se *egzistencijalni kvantifikator* i čita se „postoji”. Za predikat $P(x)$ i skup S sud $(\forall x \in S) P(x)$ znači da $P(x)$ vrijedi za svaki $x \in S$, a sud $(\exists x \in S) P(x)$ znači da $P(x)$ vrijedi za barem jedan $x \in S$. Oznaka $\exists!$ čita se „postoji jedinstven” (ili „postoji točno jedan”).

Primjer 1.23. (a) „Svaki prirodni broj n djeljiv je s 1” zapisujemo $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 \mid n$.

(b) „Postoji realan broj koji nije racionalan” zapisujemo $(\exists x \in \mathbb{R}) x \notin \mathbb{Q}$. Oba su suda istinita; za drugi je primjer $x = \sqrt{2}$.

Zadatak 1.24. Zapišite pomoću simbola sljedeće izjave:

- (a) Za svaki realan broj postoji prirodan broj koji je veći od njega.
- (b) Postoji prirodan broj koji je djelitelj svakog prirodnog broja.

Rješenje. (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}) n > x$. Tvrdnja je istinita (to je Arhimedovo svojstvo skupa $\mathbb{R}$).

(b) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) n \mid m$. Tvrdnja je istinita: $n = 1$ dijeli svaki prirodni broj. $\square$

Zadatak 1.25. Iskažite riječima i provjerite istinitost:

- (a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) \ n < m$;
- (b) $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \ n < m$.

Rješenje. (a) Za svaki prirodni broj postoji prirodni broj koji je veći od njega. Sud je istinit: za zadani n možemo uzeti $m = n + 1$.

- (b) Postoji prirodni broj koji je veći od svakog prirodnog broja. Sud je lažan: kad bi takav m postojao, za $n = m$ dobili bismo $m < m$.

U prvom sudu izbor broja m smije ovisiti o n , a u drugom jedan te isti m mora odgovarati svim n . $\square$

Napomena 1.26. Iz prethodnog zadatka vidimo da je redoslijed kvantifikatora bitan: zamjenom $\forall$ i $\exists$ mijenja se značenje (i istinitost) suda. Kvantifikatori iste vrste smiju međusobno zamijeniti mjesta.

Napomena 1.27 (Kako se provjerava istinitost kvantificiranog suda).

- Da bismo dokazali da je $(\forall x \in S) P(x)$ istina, moramo pokazati da $P(x)$ vrijedi za proizvoljan $x \in S$. Da bismo pokazali da je laž, dovoljan je jedan *protuprimjer*, tj. jedan $x \in S$ za koji $P(x)$ ne vrijedi.
- Da bismo dokazali da je $(\exists x \in S) P(x)$ istina, dovoljno je naći jedan $x \in S$ za koji vrijedi $P(x)$. Da bismo pokazali da je laž, moramo pokazati da $P(x)$ ne vrijedi ni za jedan $x \in S$; često pretpostavimo da takav x postoji i dođemo do kontradikcije.

Zadatak 1.28. Odredite istinitost sljedećih sudova. Ovdje je $\mathbb{R}^+ = \langle 0, +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

- (a) $(\forall x \in \mathbb{R}) \ x = x^2$;
- (b) $(\exists x \in \mathbb{R}) \ x = x^2$;
- (c) $(\forall x \in \mathbb{R}) \ x + 1 > x$;
- (d) $(\exists x \in \mathbb{R}) \ x + 2 = x$;
- (e) $(\exists x \in \mathbb{R}) \ |x| = 0$;
- (f) $(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N}) \ y \geq x$;
- (g) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) \ y \geq x$;
- (h) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \ y \geq x$;
- (i) $(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\exists x \in \mathbb{R}^+) \ xy = 1$.

Rješenje. (a) Laž; protuprimjer je $x = 2$, jer $2 \neq 4$.

- (b) Istina, primjerice $x = 0$ (ili $x = 1$).

- (c) Istina: za proizvoljan $x \in \mathbb{R}$ je $x + 1 > x$ jer je $1 > 0$.

- (d) Laž: kad bi takav x postojao, oduzimanjem x dobili bismo $2 = 0$, što je kontradikcija.

- (e) Istina, za $x = 0$.

- (f) Istina: za svaki y možemo uzeti $x = 1$.

- (g) Istina: $x = 1$ zadovoljava $y \geq 1$ za svaki $y \in \mathbb{N}$ (1 je najmanji prirodni broj).

- (h) Laž: ne postoji najmanji realni broj. Za svaki kandidat x broj $y = x - 1$ zadovoljava $y < x$.

- (i) Istina: za zadani $y > 0$ uzmemo $x = \frac{1}{y} > 0$. $\square$

Zadatak 1.29. Zapišite formulama sljedeće izjave:

- (a) Svaki prirodni broj manji je od nekog prirodnog broja.

- (b) Postoji prirodni broj veći od svakog prirodnog broja.
- (c) Svaki prirodni broj koji je kvadrat parnog broja djeljiv je s 4.
- (d) Svaki prirodni broj koji je djeljiv s 14 djeljiv je s 2 i sa 7.
- (e) Ako je produkt bilo kojih dvaju prirodnih brojeva djeljiv nekim prostim brojem, onda je tim prostim brojem djeljiv barem jedan od tih dvaju brojeva.

Rješenje. Neka $\mathbb{P}$ označava skup svih prostih brojeva.

- (a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) n < m$;
- (b) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) n > m$;
- (c) $(\forall n \in \mathbb{N})((\exists a \in \mathbb{N})(n = a^2 \wedge 2 \mid a) \implies 4 \mid n)$ ili, kraće, $(\forall a \in \mathbb{N})(2 \mid a \implies 4 \mid a^2)$;
- (d) $(\forall n \in \mathbb{N})(14 \mid n \implies (2 \mid n \wedge 7 \mid n))$;
- (e) $(\forall p \in \mathbb{P})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(p \mid nm \implies (p \mid n \vee p \mid m))$.

U (e) treba paziti da i varijabla p bude vezana kvantifikatorom; u sudu ne smije ostati nijedna slobodna varijabla. $\square$

Negiranje izjava koje sadrže kvantifikatore

- Primjer 1.30.** (a) Izjava „Svaki prirodni broj je paran”, tj. $(\forall n \in \mathbb{N}) n$ je paran, ima negaciju „Postoji prirodni broj koji nije paran”, tj. $(\exists n \in \mathbb{N}) n$ nije paran.
- (b) Izjava „Postoji prirodni broj koji je negativan”, tj. $(\exists n \in \mathbb{N}) n < 0$, ima negaciju „Svaki prirodni broj je nenegativan”, tj. $(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq 0$.
- (c) Izjava $(\forall x > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \frac{1}{n} < x$ ima negaciju $(\exists x > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{n} \geq x$.

Propozicija 1.31 (Negiranje kvantifikatora).

$$\overline{(\forall x \in S) P(x)} \equiv (\exists x \in S) \overline{P(x)}, \quad \overline{(\exists x \in S) P(x)} \equiv (\forall x \in S) \overline{P(x)}.$$

Dakle, prilikom negiranja $\forall$ prelazi u $\exists$ i obratno, a predikat se zamjenjuje svojom negacijom. Kod više kvantifikatora mijenja se svaki od njih, a njihov redoslijed ostaje isti. Primjerice,

$$\overline{(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \implies Q(x, y))} \equiv (\exists x)(\exists y)(P(x, y) \wedge \overline{Q(x, y)}).$$

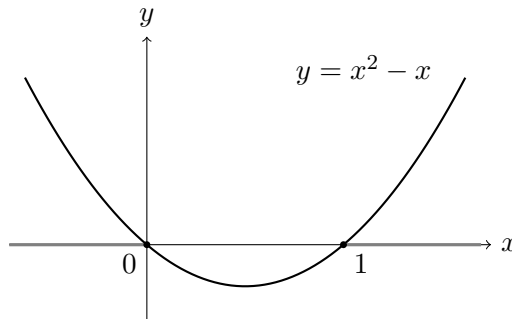
Zadatak 1.32. Odredite istinitost i negirajte sljedeće sudove:

- | | |
|---|---|
| (a) $(\exists x \in \mathbb{N}) x + 1 = 8$; | (g) $(\forall x \in \mathbb{Q}) (x \cdot 0 = 0 \wedge x \cdot 1 = x)$; |
| (b) $(\forall x \in \mathbb{N}) x < 8$; | (h) $(\exists a \in \mathbb{R}^+) (a \neq -1 \implies a = -2)$; |
| (c) $(\exists x \in \mathbb{N}) x + 1 > 4$; | (i) $(\forall a \in \mathbb{Q})(\forall b \in \mathbb{Q}) \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$; |
| (d) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x^2 + y^2 \geq 4$; | (j) $(\exists n \in \mathbb{N}) (n + 1 = n \vee n - 1 = n)$; |
| (e) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x^2 + y < y^2$; | (k) $(\forall x \in \mathbb{R}) \sqrt{x} \in \mathbb{R}$; |
| (f) $(\forall r \in \mathbb{R}) (r > 0 \vee r < 0)$; | (l) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - x \geq 0 \iff (x \leq 0 \vee x \geq 1))$. |

Rješenje. (a) Istina, za $x = 7$. Negacija: $(\forall x \in \mathbb{N}) x + 1 \neq 8$.

- (b) Laž, protuprimjer je $x = 8$. Negacija: $(\exists x \in \mathbb{N}) x \geq 8$.
- (c) Istina, npr. za $x = 4$. Negacija: $(\forall x \in \mathbb{N}) x + 1 \leq 4$.
- (d) Istina: za svaki x možemo uzeti $y = 2$, jer je tada $x^2 + 4 \geq 4$. Negacija: $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x^2 + y^2 < 4$.
- (e) Laž: za bilo koji x uvrštavanje $y = 0$ daje $x^2 < 0$, što nije moguće. Negacija: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x^2 + y \geq y^2$.
- (f) Laž, protuprimjer je $r = 0$. Negacija: $(\exists r \in \mathbb{R}) (r \leq 0 \wedge r \geq 0)$.
- (g) Istina. Negacija: $(\exists x \in \mathbb{Q}) (x \cdot 0 \neq 0 \vee x \cdot 1 \neq x)$.
- (h) Laž: za svaki $a > 0$ pretpostavka $a \neq -1$ je istinita, a zaključak $a = -2$ lažan, pa je implikacija lažna (npr. za $a = 1$). Negacija: $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (a \neq -1 \wedge a \neq -2)$.
- (i) Laž: za $b = 0$ izraz $\frac{a}{b}$ nije definiran, pa nije racionalan broj. Negacija: $(\exists a \in \mathbb{Q})(\exists b \in \mathbb{Q}) \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$. (Kad bismo umjesto $b \in \mathbb{Q}$ uzeli $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, sud bi bio istinit.)
- (j) Laž, jer je $n + 1 \neq n$ i $n - 1 \neq n$ za svaki n . Negacija: $(\forall n \in \mathbb{N}) (n + 1 \neq n \wedge n - 1 \neq n)$.
- (k) Laž, protuprimjer je $x = -1$: broj -1 nema realni drugi korijen. Negacija: $(\exists x \in \mathbb{R}) \sqrt{x} \notin \mathbb{R}$.
- (l) Istina: $x^2 - x = x(x - 1) \geq 0$ točno onda kad su oba faktora istog predznaka ili je jedan od njih 0, tj. za $x \leq 0$ ili $x \geq 1$ (vidi sliku). Negacija ekvivalencije $\overline{P \iff Q} \equiv (P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$ daje

$$(\exists x \in \mathbb{R}) \left((x^2 - x \geq 0 \wedge (x > 0 \wedge x < 1)) \vee (x^2 - x < 0 \wedge (x \leq 0 \vee x \geq 1)) \right).$$



Funkcija $x \mapsto x^2 - x$ nenegativna je točno za $x \leq 0$ ili $x \geq 1$ (istaknuto na osi x).

□

Zadatak 1.33. Napišite obrat po kontrapoziciji sljedećih implikacija:

- (a) $(\forall n \in \mathbb{N})(2 \mid n \implies (\exists k \in \mathbb{Z}) (n = 4k \vee n = 4k + 2))$;
- (b) $(\forall x, y \in \mathbb{R})((x > 0 \wedge y > 0) \implies xy > 0)$;
- (c) $(\forall x, y \in \mathbb{R})((x^2 > x \wedge y > 0) \implies xy > y)$;
- (d) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - 2x < 0 \implies (x < 2 \wedge x > 0))$;
- (e) $(\forall n \in \mathbb{N})((3 \mid n \wedge 2 \nmid n) \implies 9 \mid n^2)$;
- (f) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - 7x + 12 > 0 \implies x < 3)$.

Rješenje. Kod obrata po kontrapoziciji kvantifikatori ostaju isti; negiramo zaključak i pretpostavku i zamijenimo im mjesta:

- (a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{Z})(n \neq 4k \wedge n \neq 4k + 2) \implies 2 \nmid n$;
- (b) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(xy \leq 0 \implies (x \leq 0 \vee y \leq 0))$;
- (c) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(xy \leq y \implies (x^2 \leq x \vee y \leq 0))$;
- (d) $(\forall x \in \mathbb{R})((x \geq 2 \vee x \leq 0) \implies x^2 - 2x \geq 0)$;
- (e) $(\forall n \in \mathbb{N})(9 \nmid n^2 \implies (3 \nmid n \vee 2 \mid n))$;
- (f) $(\forall x \in \mathbb{R})(x \geq 3 \implies x^2 - 7x + 12 \leq 0)$.

Obrat po kontrapoziciji uvijek ima istu istinitost kao polazna tvrdnja. Tvrdnje (a), (b), (d) i (e) su istinite, a (c) i (f) lažne: za (c) je protuprimjer $x = -1$, $y = 1$ (tada je $x^2 = 1 > -1$ i $y > 0$, ali $xy = -1 < 1$), a za (f) $x = 5$ (tada je $5^2 - 35 + 12 = 2 > 0$, ali $5 \geq 3$). Isti su brojevi protuprimjeri i za odgovarajuće obrate po kontrapoziciji. $\square$

1.6 Zadaci za samostalan rad

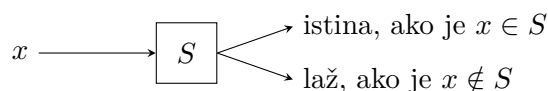
- 1.1. Provjerite tablicom da su sudovi $P \implies (Q \implies P)$, $P \implies (P \vee Q)$ i $(P \wedge Q) \implies Q$ tautologije.
- 1.2. Negirajte $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R}) x + y > z$ i odredite istinitost početne tvrdnje.
- 1.3. Pojednostavnite $\overline{P \vee Q} \vee (P \wedge Q)$.
- 1.4. Odredite istinitost sudova $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x + y = 0$ i $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) x + y = 0$.
- 1.5. Dokažite: ako je kvadrat cijelog broja n neparan, onda je n neparan.
- 1.6. Negirajte sudove $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x < y$ i $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) xy < 0$ te odredite istinitost polaznih sudova.
- 1.7. Napišite obrat i obrat po kontrapoziciji tvrdnje $(\forall x \in \mathbb{R})(x > 2 \implies x^2 > 4)$. Koje su od tih triju tvrdnji istinite?

Poglavlje 2

Skupovi

2.1 Pojam skupa. Podskupovi i partitivni skup

Pojam skupa se ne definira. Skup opisujemo kao više objekata shvaćenih kao cjelina. Ti se objekti zovu *elementi* skupa. Ako x pripada skupu S , pišemo $x \in S$, a ako mu ne pripada, pišemo $x \notin S$. Za svaki objekt x sud „ $x \in S$ ” je ili istinit ili lažan; skup je potpuno određen svojim elementima.



Skup možemo zadati popisom elemenata ili svojstvom (predikatom) koje zadovoljavaju njegovi elementi. Primjeri:

$$S = \{1, 2, 3\}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}, \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Skup parnih prirodnih brojeva možemo zapisati na više načina:

$$\{n \mid n \text{ je paran prirodni broj}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \mid n\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \dots\}.$$

Poredak elemenata u popisu i njihovo ponavljanje ne mijenjaju skup: $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$ i $\{1, 1\} = \{1\}$. Postoji točno jedan skup koji nema nijednog elementa; zovemo ga *prazan skup* i označavamo s $\emptyset$.

Definicija 2.1. Neka su A i B skupovi. Kažemo da je A *podskup* od B i pišemo $A \subseteq B$ ako je svaki element skupa A ujedno element skupa B . Simbolima:

$$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall x)(x \in A \implies x \in B).$$

Kažemo da su skupovi A i B *jednaki* i pišemo $A = B$ ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, tj. ako vrijedi $(\forall x)(x \in A \iff x \in B)$. Ako je $A \subseteq B$ i $A \neq B$, kažemo da je A *pravi podskup* od B i pišemo $A \subset B$.

Dakle, jednakost skupova dokazujemo tako da dokažemo dvije inkluzije.

Zadatak 2.2. Ispišite sve podskupove skupa $\{1, 2, 3\}$.

Rješenje. Podskupove razvrstavamo prema broju elemenata:

$$\emptyset; \quad \{1\}, \{2\}, \{3\}; \quad \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}; \quad \{1, 2, 3\}.$$

Ukupno ima 8 podskupova. □

Definicija 2.3. Skup svih podskupova skupa S zovemo *partitivni skup* skupa S i označavamo s $\mathcal{P}(S)$:

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}.$$

Prema prethodnom zadatku,

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Propozicija 2.4. *Prazan skup je podskup svakog skupa.*

Dokaz. Za skup A treba dokazati $(\forall x)(x \in \emptyset \implies x \in A)$. Ne postoji x za koji je $x \in \emptyset$, pa je pretpostavka implikacije uvijek lažna, a implikacija istinita. Isto se vidi iz obrata po kontrapoziciji: tvrdnja $(\forall x)(x \notin A \implies x \notin \emptyset)$ očito je istinita. $\square$

Posebno, za svaki skup S vrijedi $\emptyset \in \mathcal{P}(S)$ i $S \in \mathcal{P}(S)$.

Zadatak 2.5. Odredite $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\{a\})$ i $\mathcal{P}(\{a, b\})$, gdje je $a \neq b$.

Rješenje.

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad \mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}, \quad \mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Uočimo da je $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$: partitivni skup praznog skupa ima jedan element. $\square$

Napomena 2.6. Broj elemenata konačnog skupa S označavamo s $|S|$ i zovemo *kardinalitetom* skupa S . Ako skup S ima n elemenata, onda je

$$|S| = n \implies |\mathcal{P}(S)| = 2^n.$$

Naime, podskup od S zadajemo tako da za svaki od n elemenata neovisno odlučimo pripada li tom podskupu ili ne; to su dvije mogućnosti za svaki element, ukupno 2^n . (Strogi dokaz provodi se matematičkom indukcijom.)

Zadatak 2.7. Neka je $A = \{1, \{1\}, \emptyset\}$. Odredite jesu li tvrdnje $1 \in A$, $\{1\} \in A$, $\{1\} \subseteq A$, $\emptyset \in A$ i $\emptyset \subseteq A$ istinite. Koliko elemenata ima A ?

Rješenje. Sve navedene tvrdnje su istinite. Tvrdnje $1 \in A$, $\{1\} \in A$ i $\emptyset \in A$ vrijede jer su 1 , $\{1\}$ i $\emptyset$ navedeni kao elementi skupa A . Za $\{1\} \subseteq A$ treba provjeriti da jedini element skupa $\{1\}$, broj 1 , pripada skupu A . Inkluzija $\emptyset \subseteq A$ vrijedi jer je prazan skup podskup svakog skupa. Skup A ima tri elementa: broj 1 , skup $\{1\}$ i prazan skup. Uočimo da $\in$ i $\subseteq$ izražavaju različite odnose. $\square$

Zadatak 2.8. Dokažite: ako je $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, onda je $A = B$.

Rješenje. Treba dokazati $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \implies A = B$. Koristimo metodu suprotnog: pretpostavimo da vrijedi $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ i $A \neq B$. Budući da je $A \neq B$, vrijedi $A \not\subseteq B$ ili $B \not\subseteq A$.

1° Ako $A \not\subseteq B$, onda postoji x takav da je $x \in A$ i $x \notin B$. Tada je $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ i $\{x\} \notin \mathcal{P}(B)$, što je u kontradikciji s $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

2° Ako $B \not\subseteq A$, onda postoji y takav da je $y \in B$ i $y \notin A$. Tada je $\{y\} \in \mathcal{P}(B)$ i $\{y\} \notin \mathcal{P}(A)$, što je opet u kontradikciji s $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

Dakle, pretpostavka je pogrešna, pa vrijedi $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \implies A = B$.

Tvrdnju možemo dokazati i izravno: iz $A \in \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ slijedi $A \subseteq B$, a iz $B \in \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A)$ slijedi $B \subseteq A$. Obrat tvrdnje očito vrijedi, pa je $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B$. $\square$

Zadatak 2.9. Dokažite $A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Rješenje. ($\implies$) Neka je $A \subseteq B$ i $S \in \mathcal{P}(A)$. Tada je $S \subseteq A \subseteq B$, pa je $S \subseteq B$, tj. $S \in \mathcal{P}(B)$.

($\impliedby$) Iz $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ i $A \in \mathcal{P}(A)$ slijedi $A \in \mathcal{P}(B)$, odnosno $A \subseteq B$. $\square$

2.2 Operacije sa skupovima

U određenom matematičkom razmatranju često je dovoljno promatrati samo podskupove nekog zadanog skupa. Takav skup zovemo *univerzalnim skupom* i označavamo ga s U . Primjerice, u planimetriji je univerzalni skup ravnina.

Definicija 2.10. Za podskupove A, B univerzalnog skupa U definiramo

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\} && \text{(unija),} \\ A \cap B &= \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\} && \text{(presjek),} \\ A \setminus B &= \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\} && \text{(razlika),} \\ A^c &= \{x \in U \mid x \notin A\} && \text{(komplement skupa } A \text{ u } U). \end{aligned}$$

Skupovi A i B su *disjunktni* ako je $A \cap B = \emptyset$.

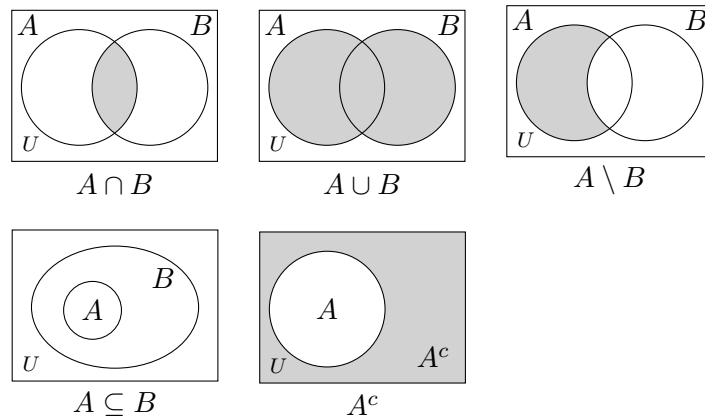
Izravno iz definicija slijedi

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B, \quad A \setminus B \subseteq A.$$

Primjerice, ako je $x \in A \cap B$, onda je $x \in A$ i $x \in B$, pa je posebno $x \in A$.

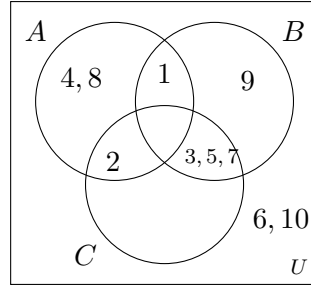
Vennovi dijagrami

Skupove i operacije s njima zorno prikazujemo *Vennovim dijagramima*: pravokutnik predstavlja univerzalni skup U , krugovi njegove podskupove, a osjenčano područje traženi skup. Dijagram pomaže da uočimo tvrdnju, ali nije dokaz; jednakosti i inkluzije skupova dokazujemo preko pripadnosti elemenata.



Zadatak 2.11. Neka je $U = \{1, 2, \dots, 10\}$ univerzalni skup, a $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ i $C = \{2, 3, 5, 7\}$ njegovi podskupovi. Nacrtajte Vennov dijagram i odredite $A \cup B$, $B \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $C \cap A^c$, $(A \cup B)^c$, $(A \setminus B)^c$, $C \setminus (A \cup B)$, $A \cup B \cup C$ i $A \cap B \cap C$.

Rješenje. Svaki element skupa U upisujemo u ono područje dijagrama koje odgovara skupovima kojima pripada:



Iz dijagrama (ili izravno iz definicija) čitamo:

$$\begin{aligned}
 A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}, & (A \cup B)^c &= \{6, 10\}, \\
 B \cap C &= \{3, 5, 7\}, & (A \setminus B)^c &= \{2, 4, 8\}^c = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}, \\
 A \setminus C &= \{1, 4, 8\}, & C \setminus (A \cup B) &= \emptyset, \\
 C \setminus A &= \{3, 5, 7\}, & A \cup B \cup C &= \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}, \\
 C \cap A^c &= C \cap \{3, 5, 6, 7, 9, 10\} = \{3, 5, 7\}, & A \cap B \cap C &= \emptyset.
 \end{aligned}$$

Područja dijagrama u kojima nema brojeva ne sadrže nijedan element skupa U . $\square$

Zadatak 2.12. Neka je U univerzalni skup i $A, B \subseteq U$. Dokažite da je $A \setminus B = A \cap B^c$.

Rješenje.

$$A \cap B^c = A \cap \{x \in U \mid x \notin B\} = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \setminus B. \quad \square$$

Navedimo osnovna svojstva skupovnih operacija (vidi skriptu s predavanja).

Propozicija 2.13. Za $A, B, C \subseteq U$ vrijedi:

- (i) (*asocijativnost*) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ i $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- (ii) (*komutativnost*) $A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$;
- (iii) (*distributivnost*) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ i $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- (iv) $(A^c)^c = A$, $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \emptyset$;
- (v) (*De Morganove formule*) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ i $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Dokaz. Svaka se tvrdnja svodi na odgovarajuću semantičku jednakost iz prvog poglavlja. Dokažimo, primjerice, prvu De Morganovu formulu:

$$x \in (A \cup B)^c \iff x \notin A \cup B \iff \overline{x \in A \vee x \in B} \iff (x \notin A \wedge x \notin B) \iff x \in A^c \cap B^c.$$

Ovdje smo koristili $\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$. Dvostruki komplement $(A^c)^c = A$ odgovara dvostrukoj negaciji $\overline{\overline{P}} \equiv P$. Ostale se tvrdnje dokazuju analogno. $\square$

Zbog asocijativnosti unije i presjeka zagrade u izrazima poput $A \cup B \cup C$ i $A \cap B \cap C$ ne moramo pisati.

Zadatak 2.14. Neka je U univerzalni skup i $A, B \subseteq U$. Prikažite $A \cap B$ i $A \setminus B$ koristeći samo uniju i komplement.

Rješenje. Koristimo $(X^c)^c = X$ i De Morganove formule:

$$\begin{aligned}
 A \cap B &= ((A \cap B)^c)^c = (A^c \cup B^c)^c, \\
 A \setminus B &= A \cap B^c = ((A \cap B^c)^c)^c = (A^c \cup (B^c)^c)^c = (A^c \cup B)^c.
 \end{aligned} \quad \square$$

Zadatak 2.15. Postoji li $A \subseteq \mathbb{N}$ sa svojstvom (komplement promatramo u univerzalnom skupu $\mathbb{N}$):

- (a) A je konačan, a A^c beskonačan;
- (b) A je beskonačan, a A^c konačan;
- (c) A i A^c su oba beskonačni;
- (d) A i A^c su oba konačni?

Rješenje. (a) Da, npr. $A = \{1\}$, $A^c = \{2, 3, 4, \dots\}$.

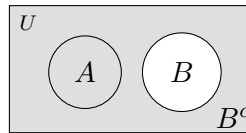
(b) Da, npr. $A = \{2, 3, 4, \dots\}$, $A^c = \{1\}$.

(c) Da, npr. $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $A^c = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

(d) Ne. Pretpostavimo suprotno, da su A i A^c konačni. Tada je i $\mathbb{N} = A \cup A^c$ konačan kao unija dvaju konačnih skupova, a znamo da je $\mathbb{N}$ beskonačan. To je kontradikcija. $\square$

Zadatak 2.16. Neka su $A, B \subseteq U$. Dokažite da su A i B disjunktni ako i samo ako je $A \subseteq B^c$.

Rješenje. Situaciju prikazuje sljedeći dijagram (osjenčan je B^c):



($\implies$) Neka su A i B disjunktni. Treba dokazati $A \subseteq B^c$. Neka je $x \in A$ proizvoljan. Kad bi vrijedilo $x \notin B^c$, onda bi bilo $x \in B$, pa bi $x \in A \cap B = \emptyset$, što je kontradikcija. Dakle, $x \in B^c$, pa je $A \subseteq B^c$.

($\impliedby$) Neka je $A \subseteq B^c$. Pretpostavimo da A i B nisu disjunktni, tj. da postoji $x \in A \cap B$. Tada je $x \in A$ i $x \in B$. Budući da je $A \subseteq B^c$, vrijedi i $x \in B^c$. Sada je $x \in B \cap B^c = \emptyset$, što je kontradikcija. Dakle, $A \cap B = \emptyset$. $\square$

Zadatak 2.17. Dokažite: $A \subseteq C$ i $B \subseteq C$ ako i samo ako je $A \cup B \subseteq C$.

Rješenje. Treba dokazati $(A \subseteq C \wedge B \subseteq C) \iff A \cup B \subseteq C$, tj. dvije implikacije.

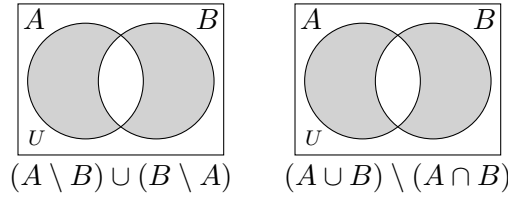
($\implies$) Neka vrijedi $A \subseteq C$ i $B \subseteq C$. Dokazujemo $A \cup B \subseteq C$. Neka je $x \in A \cup B$. Tada je $x \in A$ ili $x \in B$. Ako je $x \in A$, onda je zbog $A \subseteq C$ i $x \in C$. Ako je pak $x \in B$, onda je zbog $B \subseteq C$ i $x \in C$. Dakle, u svakom je slučaju $x \in C$. Budući da je $x \in A \cup B$ bio proizvoljan, vrijedi $A \cup B \subseteq C$.

($\impliedby$) Znamo da je $A \subseteq A \cup B$ i $B \subseteq A \cup B$. Budući da je $A \cup B \subseteq C$, zbog tranzitivnosti relacije $\subseteq$ slijedi $A \subseteq C$ i $B \subseteq C$. $\square$

Napomena 2.18. Inkluzija je *tranzitivna*: ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, onda je $A \subseteq C$. Doista, za $x \in A$ iz prve inkluzije slijedi $x \in B$, a zatim iz druge $x \in C$.

Zadatak 2.19. Dokažite da vrijedi $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Rješenje. Vennovi dijagrami obiju strana su jednaki:



Jednakost skupova dokazujemo pomoću dviju inkluzija.

($\subseteq$) Neka je $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Tada je $x \in A \setminus B$ ili $x \in B \setminus A$.

- 1) Ako je $x \in A \setminus B$, onda je $x \in A$ i $x \notin B$. Kako je $x \in A$, to je $x \in A \cup B$, a kako je $x \notin B$, to je $x \notin A \cap B$ (jer je $A \cap B \subseteq B$). Dakle, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- 2) Ako je $x \in B \setminus A$, onda je $x \in B$ i $x \notin A$. Kako je $x \in B \subseteq A \cup B$, to je $x \in A \cup B$, a kako je $x \notin A$, to je $x \notin A \cap B$. Dakle, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

($\supseteq$) Neka je $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Tada je $x \in A \cup B$ i $x \notin A \cap B$. Imamo dvije mogućnosti:

- 1) $x \in A$ i $x \notin A \cap B$. Tada $x \notin B$ (u protivnom bi bilo $x \in A$ i $x \in B$, tj. $x \in A \cap B$). Stoga je $x \in A \setminus B$.
- 2) $x \in B$ i $x \notin A \cap B$. Analogno slijedi $x \notin A$, pa je $x \in B \setminus A$.

U oba slučaja je $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Time je tvrdnja dokazana. U dokazu smo koristili inkluzije $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$. $\square$

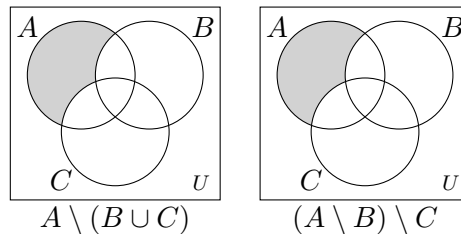
Definicija 2.20. *Simetrična razlika* skupova A i B je skup

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Prema zadatku 2.19 je i $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$: simetričnoj razlici pripadaju upravo oni elementi koji pripadaju točno jednom od skupova A , B .

Zadatak 2.21. Dokažite da vrijedi $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Rješenje. Vennovi dijagrami obiju strana su jednaki:



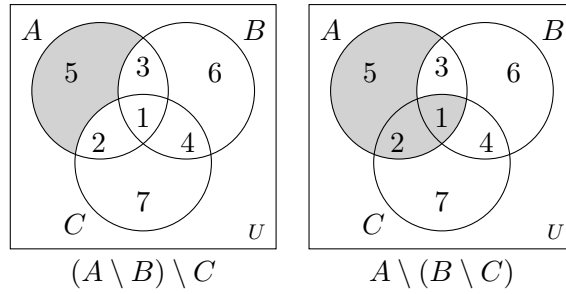
($\subseteq$) Za $x \in A \setminus (B \cup C)$ vrijedi $x \in A$ i $x \notin B \cup C$, a to znači $x \in A$, $x \notin B$ i $x \notin C$. Zbog $x \in A$ i $x \notin B$ je $x \in A \setminus B$, a zbog $x \notin C$ je $x \in (A \setminus B) \setminus C$.

($\supseteq$) Za $x \in (A \setminus B) \setminus C$ vrijedi $x \in A \setminus B$ i $x \notin C$, tj. $x \in A$, $x \notin B$ i $x \notin C$. Tada je $x \in A$ i $x \notin B \cup C$, pa je $x \in A \setminus (B \cup C)$. $\square$

Napomena 2.22. Kada imamo uniju ili presjek više skupova, zagrade ne moramo pisati:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

To se svojstvo zove asocijativnost. **Opaz!** Razlika skupova *nije* asocijativna. Općenito vrijedi samo $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$:

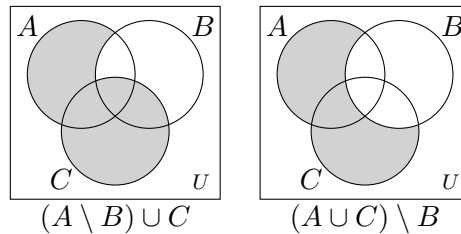


Primjerice, za $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 4, 6\}$ i $C = \{1, 2, 4, 7\}$ (brojevi upisani u dijagrame) je $(A \setminus B) \setminus C = \{2, 5\} \setminus C = \{5\}$, dok je $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \{3, 6\} = \{1, 2, 5\}$.

Nadalje, presjek i unija su komutativne operacije, $A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$, ali razlika nije komutativna: općenito je $A \setminus B \neq B \setminus A$ (npr. za $A = \{1\}$, $B = \emptyset$ je $A \setminus B = \{1\}$, a $B \setminus A = \emptyset$).

Zadatak 2.23. Odredite odnos skupova $(A \setminus B) \cup C$ i $(A \cup C) \setminus B$. Vrijedi li jednakost $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$?

Rješenje. Nacrtajmo Vennove dijagrame obaju skupova:



Dijagrami se razlikuju u području $B \cap C$, koje pripada prvom skupu, a ne pripada drugom. Zato očekujemo da općenito vrijedi samo inkluzija $(A \cup C) \setminus B \subseteq (A \setminus B) \cup C$. Dokažimo je.

Neka je $x \in (A \cup C) \setminus B$. Tada je $x \in A \cup C$ i $x \notin B$, tj. ($x \in A$ ili $x \in C$) i $x \notin B$. Imamo dvije mogućnosti: $x \in A$ i $x \notin B$, ili $x \in C$ i $x \notin B$. U prvom je slučaju $x \in A \setminus B \subseteq (A \setminus B) \cup C$, a u drugom $x \in C \subseteq (A \setminus B) \cup C$. Dakle, $(A \cup C) \setminus B \subseteq (A \setminus B) \cup C$.

Obratna inkluzija općenito ne vrijedi. Primjer skupova za koje ne vrijedi jest $A = \{3\}$, $B = \{1\}$, $C = \{1, 2\}$:

$$A \setminus B = \{3\}, \quad (A \setminus B) \cup C = \{1, 2, 3\}; \quad A \cup C = \{1, 2, 3\}, \quad (A \cup C) \setminus B = \{2, 3\}.$$

Dakle, $(A \setminus B) \cup C \neq (A \cup C) \setminus B$. (Jednakost vrijedi točno onda kad je $B \cap C = \emptyset$) $\square$

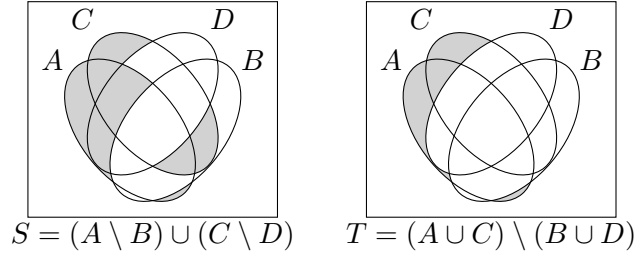
Napomena 2.24. Uz distributivnost iz propozicije 2.13 vrijede i distributivnost presjeka prema uniji i unije prema presjeku „s desne strane”:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Pomoću njih i jednakosti $X \setminus Y = X \cap Y^c$ prethodnu inkluziju možemo dobiti i računom: $(A \cup C) \setminus B = (A \cup C) \cap B^c = (A \cap B^c) \cup (C \cap B^c) = (A \setminus B) \cup (C \setminus B) \subseteq (A \setminus B) \cup C$.

Zadatak 2.25. Za proizvoljne skupove A, B, C, D neka je $S = (A \setminus B) \cup (C \setminus D)$ i $T = (A \cup C) \setminus (B \cup D)$. Ispitajte vrijede li inkluzije $S \subseteq T$ i $T \subseteq S$. Svoje tvrdnje dokažite.

Rješenje. Kod četiriju skupova treba biti oprezan s crtanjem: četiri kruga *ne čine* Vennov dijagram, jer se ne mogu nacrtati tako da se pojavi svih $2^4 = 16$ mogućih kombinacija pripadnosti skupovima A, B, C, D . Zaključak donesen iz takve slike može biti pogrešan. Vennov dijagram za četiri skupa možemo nacrtati pomoću četiriju elipsa:



Iz dijagrama naslućujemo da je $T \subseteq S$, ali da općenito ne vrijedi $S \subseteq T$.

1. Dokažimo $T \subseteq S$, tj. $(\forall x)(x \in T \implies x \in S)$. Neka je $x \in T$. Tada je $x \in A \cup C$ i $x \notin B \cup D$, tj. $(x \in A \text{ ili } x \in C)$ i $(x \notin B \text{ i } x \notin D)$. Imamo dvije mogućnosti:

- $x \in A$, $x \notin B$ i $x \notin D$. Tada je $x \in A \setminus B$, pa je $x \in S$.
- $x \in C$, $x \notin B$ i $x \notin D$. Tada je $x \in C \setminus D$, pa je $x \in S$.

2. Oboriti tvrdnju $(\forall x)(x \in S \implies x \in T)$ znači dokazati njezinu negaciju $(\exists x)(x \in S \wedge x \notin T)$, tj. naći protuprimjer. Uzmimo $A = \{1, 2\}$, $B = \emptyset$, $C = \emptyset$, $D = \{2\}$. Tada je

$$S = (A \setminus B) \cup (C \setminus D) = \{1, 2\} \cup \emptyset = \{1, 2\}, \quad T = (A \cup C) \setminus (B \cup D) = \{1, 2\} \setminus \{2\} = \{1\},$$

pa $S \not\subseteq T$. □

Dodatni zadaci

Zadatak 2.26. Za $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 4\}$ i $C = \{-1, 2, 3\}$ odredite $(A \cup B) \setminus C$ i $A \Delta B$.

Rješenje. Unija je $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$, pa je $(A \cup B) \setminus C = \{-2, 0, 1, 4\}$. Nadalje, $A \setminus B = \{-2, -1, 1\}$ i $B \setminus A = \{4\}$, pa je $A \Delta B = \{-2, -1, 1, 4\}$. □

Zadatak 2.27. Dokažite $(A \cup C) \setminus (B \cup C) = A \setminus (B \cup C)$.

Rješenje. Za proizvoljan x vrijedi

$$\begin{aligned} x \in (A \cup C) \setminus (B \cup C) &\iff (x \in A \vee x \in C) \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\ &\iff x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\ &\iff x \in A \setminus (B \cup C). \end{aligned}$$

Druga ekvivalencija vrijedi jer uz uvjet $x \notin C$ disjunkcija $x \in A \vee x \in C$ vrijedi točno onda kad je $x \in A$. □

Zadatak 2.28. Dokažite $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ te $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Rješenje. Koristeći $X \setminus Y = X \cap Y^c$, De Morganove formule i distributivnost dobivamo

$$A \setminus (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c = A \cap (B^c \cup C^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Analogno, $A \setminus (B \cup C) = A \cap B^c \cap C^c = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, jer je $A \cap A = A$. □

Zadatak 2.29. Slijedi li iz $A \cup C = B \cup C$ nužno $A = B$? Što ako dodatno vrijedi $A \cap C = B \cap C$?

Rješenje. Sama jednakost unija nije dovoljna: za $A = \emptyset$ i $B = C = \{1\}$ je $A \cup C = B \cup C = \{1\}$, a $A \neq B$. Ako vrijede obje jednakosti, onda je prema prethodnim zadacima

$$A \setminus C = (A \cup C) \setminus C = (B \cup C) \setminus C = B \setminus C.$$

Budući da je $A = (A \setminus C) \cup (A \cap C)$ i $B = (B \setminus C) \cup (B \cap C)$, dobivamo $A = B$. $\square$

Zadatak 2.30. Odredite sve skupove X za koje je $X \cup A = B$.

Rješenje. Budući da je $A \subseteq X \cup A$, nužno je $A \subseteq B$; ako taj uvjet nije ispunjen, rješenja nema. Neka je $A \subseteq B$. Iz $X \subseteq X \cup A = B$ slijedi $X \subseteq B$, a svaki element skupa $B \setminus A$ mora pripadati skupu X . Elementi skupa A mogu, ali ne moraju pripadati skupu X . Stoga su sva rješenja

$$X = (B \setminus A) \cup S, \quad S \subseteq A,$$

i za svaki takav X doista je $X \cup A = (B \setminus A) \cup A = B$. $\square$

Zadatak 2.31. Dokažite $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Vrijedi li analogna jednakost za uniju?

Rješenje. Za svaki skup S vrijedi $S \subseteq A \cap B$ ako i samo ako je $S \subseteq A$ i $S \subseteq B$ (jedan smjer slijedi iz $A \cap B \subseteq A$ i $A \cap B \subseteq B$, a drugi iz definicije presjeka). To dokazuje prvu jednakost. Za uniju uvijek vrijedi $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, ali jednakost ne mora vrijediti: za $A = \{1\}$ i $B = \{2\}$ skup $\{1, 2\}$ pripada skupu $\mathcal{P}(A \cup B)$, a ne pripada skupu $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. $\square$

2.3 Particije skupa

Definicija 2.32. *Particija* skupa S je skup međusobno disjunktne nepraznih podskupova od S čija je unija jednaka S . Zapisujemo je kao $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$, gdje je I skup indeksa (konačan ili beskonačan), pri čemu vrijedi

$$S_i \subseteq S, \quad S_i \neq \emptyset \quad (\forall i \in I), \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{za } i \neq j, \quad \bigcup_{i \in I} S_i = S.$$

Skupove S_i zovemo *blokovima* particije.

Napomena 2.33. Koji je odnos particije i partitivnog skupa? Particija skupa S je podskup od $\mathcal{P}(S)$: particija sadrži *neke* podskupove od S , a $\mathcal{P}(S)$ *sve* podskupove od S . Skup općenito ima mnogo particija, a partitivni skup je samo jedan.

Zadatak 2.34. Odredite sve particije skupa $\{1, 2, 3\}$.

Rješenje. Razvrstajmo particije prema broju blokova (jedan, dva ili tri):

$$\{\{1, 2, 3\}\}; \quad \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \quad \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \quad \{\{3\}, \{1, 2\}\}; \quad \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

Ima ih 5. Poredak blokova nije važan. $\square$

Zadatak 2.35. Koliko ima particija skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ na dva bloka?

Rješenje. Blokovi mogu imati 1 i 4 ili 2 i 3 elementa. Particija prvog tipa ima 5:

$$\{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}\}, \quad \{\{2\}, \{1, 3, 4, 5\}\}, \quad \dots, \quad \{\{5\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Particija drugog tipa ima koliko i dvočlanih podskupova skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, tj. $\binom{5}{2} = 10$:

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}, \quad \{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}, \quad \dots, \quad \{\{4, 5\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Ukupno ima $5 + 10 = 15$ particija. (Drugi način: blok koji sadrži 1 određen je izborom bilo kojeg podskupa preostala četiri elementa osim cijelog skupa $\{2, 3, 4, 5\}$, jer drugi blok mora biti neprazan; to daje $2^4 - 1 = 15$ mogućnosti.) $\square$

Zadatak 2.36. Koliko ima particija skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ na tri bloka?

Rješenje. Veličine blokova moraju biti 2, 1, 1. Particija je određena izborom dvočlanog bloka, što se može učiniti na $\binom{4}{2} = 6$ načina: $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}$, $\{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}, \{4\}\}$, $\{\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}\}$, $\{\{3, 4\}, \{1\}, \{2\}\}$. $\square$

2.4 Kartezijev produkt

Definicija 2.37. *Kartezijev produkt* skupova A i B je skup

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Ovdje je (a, b) *uređeni par* s prvom koordinatom a i drugom koordinatom b . (Strogo se uređeni par definira kao skup $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.)

Za uređene parove vrijedi

$$(a, b) = (c, d) \iff (a = c \wedge b = d).$$

Zato je za $a \neq b$ uređeni par (a, b) različit od (b, a) , dok je $\{a, b\} = \{b, a\}$. Skup $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ predstavlja ravninu.

Primjer 2.38. Za $A = \{x, y\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$ je

$$A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}.$$

Napomena 2.39 (Intervali). Za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, označavamo

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{(otvoreni interval),} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{(zatvoreni interval ili segment),} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \quad \langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \text{(poluotvoreni intervali).} \end{aligned}$$

Zadatak 2.40. Opišite i nacrtajte u ravnini skup $A \times B$ ako je

- (a) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$;
- (b) $A = \{1, 2\}$, $B = [1, 2]$;
- (c) $A = \langle 1, 2 \rangle$, $B = [1, 2]$;
- (d) $A = [0, 1] \cup \{2\}$, $B = \{0\} \cup [1, 2]$.

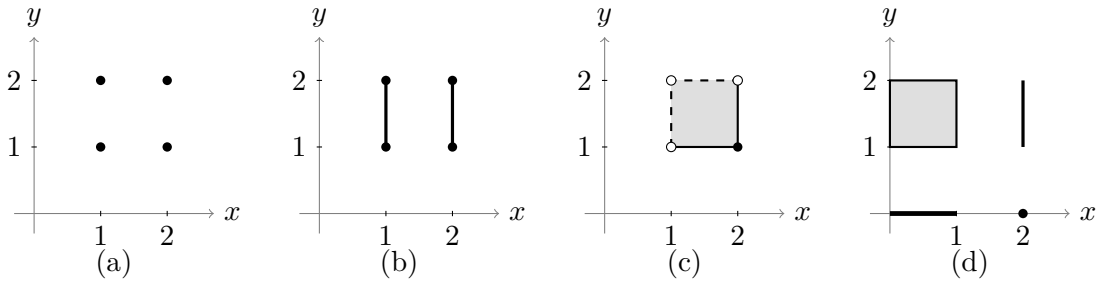
Rješenje. (a) $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ su četiri točke.

(b) $A \times B = \{(x, y) \mid x = 1 \text{ ili } x = 2, 1 \leq y \leq 2\}$ su dvije okomite dužine (s krajevima).

(c) $A \times B = \{(x, y) \mid 1 < x < 2, 1 \leq y < 2\}$ je kvadrat kojemu pripadaju donja i desna stranica (bez krajnjih točaka $(1, 1)$ i $(2, 2)$), a ne pripadaju lijeva i gornja stranica.

(d) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in [0, 1] \cup \{2\}, y \in \{0\} \cup [1, 2]\}$ se sastoji od kvadrata $[0, 1] \times [1, 2]$, dužina $[0, 1] \times \{0\}$ i $\{2\} \times [1, 2]$ te točke $(2, 0)$.

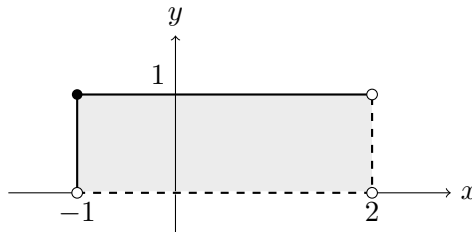
Na slikama puna crta označava rub koji pripada skupu, a isprekidana rub koji mu ne pripada; prazni kružići označavaju točke koje ne pripadaju skupu.



□

Zadatak 2.41. Za $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b\}$ ispišite $A \times B$. Opišite i nacrtajte $[-1, 2] \times \langle 0, 1]$.

Rješenje. $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$. Drugi produkt je skup $\{(x, y) \mid -1 \leq x < 2, 0 < y \leq 1\}$, pravokutnik kojemu pripadaju lijeva i gornja stranica (bez točaka $(-1, 0)$ i $(2, 1)$), a ne pripadaju donja i desna stranica.



□

Zadatak 2.42. Je li Kartezijev produkt komutativan? Je li asocijativan?

Rješenje. Kartezijev produkt nije komutativan. Primjerice, za $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ je

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\} \neq \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\} = B \times A.$$

Ni asocijativan, u načelu, nije: za $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$ je

$$(A \times B) \times C = \{((a, b), c)\}, \quad A \times (B \times C) = \{(a, (b, c))\},$$

a $((a, b), c)$ i $(a, (b, c))$ nisu isti uređeni parovi (prve koordinate su im (a, b) i a). Međutim, možemo se dogovoriti da elemente Kartezijeva produkta triju skupova pišemo kao *uređene trojke*:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Uz taj dogovor produkt je asocijativan. (U skripti s predavanja uređena trojka definira se kao $(a, b, c) = (a, (b, c))$.) □

Zadatak 2.43. Dokažite da je $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. Formulirajte i dokažite analogne tvrdnje za presjek i razliku.

Rješenje. Za proizvoljan uređeni par (x, y) vrijedi

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \cup C) &\iff x \in A \wedge y \in B \cup C \iff x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\ &\iff (x, y) \in A \times B \vee (x, y) \in A \times C \iff (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C). \end{aligned}$$

U trećem koraku koristili smo distributivnost konjunkcije prema disjunkciji. Analogno vrijede distributivnost prema presjeku i prema razlici:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C), \quad A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$

Prva slijedi iz $x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C) \iff (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$. Za drugu:

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C) &\iff (x \in A \wedge y \in B) \wedge \overline{x \in A \wedge y \in C} \\ &\iff (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \notin A \vee y \notin C) \\ &\iff x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \iff (x, y) \in A \times (B \setminus C), \end{aligned}$$

jer uz $x \in A$ disjunkcija $x \notin A \vee y \notin C$ vrijedi točno onda kad je $y \notin C$. Na isti se način dokazuju i jednakosti $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ i $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$. $\square$

Zadatak 2.44. Dokažite $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Rješenje. Par (x, y) pripada lijevoj strani ako i samo ako vrijedi $x \in A$, $y \in B$, $x \in C$ i $y \in D$, odnosno $x \in A \cap C$ i $y \in B \cap D$, a to znači da pripada desnoj strani. $\square$

2.5 Zadaci za samostalan rad

2.1. Odredite $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$.

2.2. Dokažite $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

2.3. Odredite sve skupove $X \subseteq U$ za koje je $X \cap A = B$.

2.4. Neka A ima četiri, a B tri elementa. Koliko elemenata imaju $A \times B$ i $\mathcal{P}(A \times B)$?

2.5. Dokažite da za neprazan skup C iz $A \times C = B \times C$ slijedi $A = B$. Što se događa za $C = \emptyset$?

2.6. Dokažite $A \triangle B = \emptyset \iff A = B$.

2.7. Nacrtajte Vennov dijagram skupa $(A \cap B) \cup (C \setminus A)$ i dokažite da je on podskup od $B \cup C$.

Poglavlje 3

Relacije

3.1 Pojam relacije

Definicija 3.1. Neka su A i B skupovi. *Relacija* je svaki podskup $\rho \subseteq A \times B$. Ako je $(a, b) \in \rho$, kažemo da je a u relaciji ρ s b i kraće pišemo $a\rho b$. *Binarna relacija na skupu* A je svaki podskup $\rho \subseteq A \times A$.

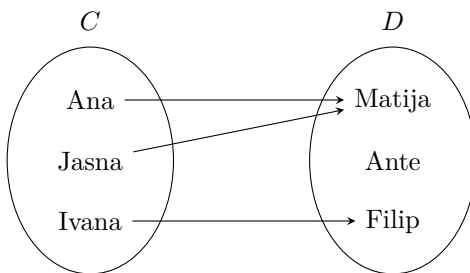
Dakle, bilo koji podskup Kartezijeva produkta jest relacija; primjerice, i prazan skup (*prazna relacija*) i cijeli produkt $A \times B$ jesu relacije. Važna binarna relacija na A jest *dijagonala* $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Primjer 3.2. Binarne relacije s kojima se stalno susrećemo u matematici jesu $\leq$ i $<$ na skupovima brojeva, paralelnost i okomitost pravaca u ravnini, inkluzija $\subseteq$ na partitivnom skupu i djeljivost $\mid$ na $\mathbb{N}$ ili $\mathbb{Z}$. Umjesto $(x, y) \in \leq$ pišemo, naravno, $x \leq y$.

Primjer 3.3. Neka je $C = \{\text{Ana, Ivana, Jasna}\}$ i $D = \{\text{Filip, Matija, Ante}\}$. Bilo koji podskup $\heartsuit \subseteq C \times D$ je relacija, primjerice

$$\heartsuit = \{(\text{Ana, Matija}), (\text{Ivana, Filip}), (\text{Jasna, Matija})\}.$$

Budući da je $(\text{Ana, Matija}) \in \heartsuit$, možemo pisati $\text{Ana}\heartsuit\text{Matija}$. Ne smijemo, međutim, pisati $\text{Filip}\heartsuit\text{Ivana}$: par (Filip, Ivana) nije ni element skupa $C \times D$, jer prva komponenta mora biti iz C . Poredak u uređenom paru je bitan. Relaciju između dvaju konačnih skupova zgodno je prikazati strelicama:



Binarnu relaciju na konačnom skupu možemo prikazati i *tablicom*: retke i stupce označimo elementima skupa i zasjenimo polje u retku x i stupcu y ako je $x\rho y$. Drugi je način *graf relacije*: elemente skupa nacrtamo kao točke, a $x\rho y$ označimo strelicom od x prema y (par (x, x) označavamo petljom).

3.2 Svojstva binarnih relacija

Definicija 3.4. Neka je ρ binarna relacija na skupu A . Kažemo da je ρ :

- *refleksivna* ako $(\forall x \in A) x\rho x$;
- *simetrična* ako $(\forall x, y \in A) (x\rho y \implies y\rho x)$;
- *antisimetrična* ako $(\forall x, y \in A) ((x\rho y \wedge y\rho x) \implies x = y)$;
- *tranzitivna* ako $(\forall x, y, z \in A) ((x\rho y \wedge y\rho z) \implies x\rho z)$;
- *irefleksivna* ako $(\forall x \in A) (x, x) \notin \rho$.

Napomena 3.5. Relacija je refleksivna ako i samo ako je $\Delta_A \subseteq \rho$. Irefleksivnost je mnogo jači zahtjev od toga da relacija *nije* refleksivna: za to je dovoljno da *barem jedan* par (x, x) ne pripada relaciji. Slično, antisimetričnost nije negacija simetričnosti: jednakost = ima oba svojstva, a relacija $\{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ na skupu $\{1, 2, 3\}$ nema nijedno.

Kad ispitujemo neko svojstvo, napišemo pripadnu univerzalnu tvrdnju za konkretnu relaciju. Ako mislimo da je istinita, dokazujemo je za *proizvoljne* elemente. Ako mislimo da je lažna, dokazujemo njezinu negaciju, odnosno nalazimo *protuprimjer*.

Zadatak 3.6. Na $\mathbb{R}$ definiramo relaciju $\diamond$ s $x \diamond y \stackrel{\text{def}}{\iff} xy = 0$. Primjerice, $0 \diamond 1$ i $2 \diamond 0$, ali nije $1 \diamond 2$. Ispitajte je li $\diamond$ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična i irefleksivna.

Rješenje. Refleksivnost. Pitamo se vrijedi li $(\forall x \in \mathbb{R}) x \diamond x$, tj. $(\forall x \in \mathbb{R}) x \cdot x = 0$. Ne vrijedi: za $x = 1$ imamo $1 \cdot 1 \neq 0$. Time smo dokazali negaciju $(\exists x \in \mathbb{R}) x \cdot x \neq 0$, pa $\diamond$ nije refleksivna.

Simetričnost. Vrijedi li $(\forall x, y \in \mathbb{R}) (xy = 0 \implies yx = 0)$? Da, jer je $xy = yx$. Relacija $\diamond$ je simetrična.

Tranzitivnost. Vrijedi li $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) ((xy = 0 \wedge yz = 0) \implies xz = 0)$? Ne mora: za $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$ vrijedi $xy = 0$ i $yz = 0$, ali $xz = 1 \neq 0$. Pronašli smo protuprimjer, tj. dokazali negaciju $(\exists x, y, z \in \mathbb{R}) (xy = 0 \wedge yz = 0 \wedge xz \neq 0)$. Relacija nije tranzitivna.

Antisimetričnost. Vrijedi li $(\forall x, y \in \mathbb{R}) ((xy = 0 \wedge yx = 0) \implies x = y)$? Ne: za $x = 0$, $y = 1$ vrijedi $xy = yx = 0$, a $x \neq y$. Dokazali smo $(\exists x, y \in \mathbb{R}) (xy = 0 \wedge yx = 0 \wedge x \neq y)$, pa relacija nije antisimetrična.

Irefleksivnost. Vrijedi li $(\forall x \in \mathbb{R}) x \cdot x \neq 0$? Ne, za $x = 0$ je $0 \cdot 0 = 0$, tj. $0 \diamond 0$. Relacija nije irefleksivna (iako nije ni refleksivna). $\square$

Zadatak 3.7. Ispitajte ista svojstva za relacije na $\mathbb{R}$ zadane s

- (a) $xy = 0$, (b) $xy \neq 0$, (c) $|x - y| < 5$, (d) $x^2 + y^2 = 1$, (e) $x^2 + y^2 = 0$.

Rješenje. Relacija (a) obrađena je u zadatku 3.6. Za ostale je rezultat (D = da, N = ne):

Relacija	refleksivna	simetrična	antisimetrična	tranzitivna	irefleksivna
(a) $xy = 0$	N	D	N	N	N
(b) $xy \neq 0$	N	D	N	D	N
(c) $ x - y < 5$	D	D	N	N	N
(d) $x^2 + y^2 = 1$	N	D	N	N	N
(e) $x^2 + y^2 = 0$	N	D	D	D	N

Sve su relacije simetrične jer se uvjeti ne mijenjaju zamjenom x i y .

(b) Nije refleksivna jer $0 \cdot 0 = 0$, a nije ni irefleksivna jer $1 \cdot 1 \neq 0$. Brojevi 1 i 2 su u relaciji u oba smjera, pa nije antisimetrična. Tranzitivna je: iz $xy \neq 0$ i $yz \neq 0$ slijedi $x \neq 0$ i $z \neq 0$, pa je $xz \neq 0$.

(c) Refleksivna je jer $|x - x| = 0 < 5$. Nije antisimetrična: $|0 - 1| = |1 - 0| < 5$, a $0 \neq 1$. Nije tranzitivna: $|0 - 4| < 5$ i $|4 - 8| < 5$, ali $|0 - 8| = 8$.

(d) Nije refleksivna jer $0^2 + 0^2 \neq 1$; nije irefleksivna jer je $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1$. Brojevi 0 i 1 su u relaciji u oba smjera, pa nije antisimetrična. Nije tranzitivna: $0\rho 1$ i $1\rho 0$, ali nije $0\rho 0$.

(e) Jednakost $x^2 + y^2 = 0$ vrijedi samo za $x = y = 0$, pa je relacija jednaka $\{(0, 0)\}$. Nije refleksivna jer, primjerice, nije $1\rho 1$; nije irefleksivna jer je $0\rho 0$. Antisimetričnost i tranzitivnost vrijede jer se u pretpostavkama može pojaviti samo par $(0, 0)$, a tada su zaključci $0 = 0$ i $0\rho 0$ istiniti. $\square$

Napomena 3.8. Je li relacija $<$ na $\mathbb{R}$ antisimetrična? Pitamo vrijedi li $(\forall x, y \in \mathbb{R}) ((x < y \wedge y < x) \implies x = y)$. Ako nismo sigurni, pokušajmo s negacijom:

$$(\exists x, y \in \mathbb{R}) (x < y \wedge y < x \wedge x \neq y).$$

Ona je lažna, jer ne postoje brojevi za koje bi istodobno bilo $x < y$ i $y < x$. Dakle, polazna tvrdnja je istinita i relacija $<$ *jest* antisimetrična. Pretpostavka implikacije nikada nije ispunjena, pa je implikacija uvijek istinita. To je isto kao činjenica da je univerzalna tvrdnja po praznom skupu, $(\forall x \in \emptyset) P(x)$, uvijek istinita. Relacija $<$ ima još jedno korisno svojstvo: za različite x, y vrijedi $x < y$ ili $y < x$.

Zadatak 3.9. Ispitajte refleksivnost, simetričnost, tranzitivnost i antisimetričnost sljedećih relacija: paralelnost i okomitost pravaca u ravnini, $\leq$ na $\mathbb{N}$, $<$ na $\mathbb{R}$, inkluzija $\subseteq$ na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, jednakost na $\mathbb{Q}$, disjunktnost na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ te djeljivost na $\mathbb{N}$ i na $\mathbb{Z}$. (Dva pravca p, q su paralelna ako je $p = q$ ili $p \cap q = \emptyset$.)

Rješenje. Rezultati su prikazani u tablici, a obrazloženja slijede ispod nje.

Relacija	na skupu	refleksivna	simetrična	tranzitivna	antisimetrična
$\parallel$	pravci	D	D	D	N
$\perp$	pravci	N	D	N	N
$\leq$	$\mathbb{N}$	D	N	D	D
$<$	$\mathbb{R}$	N	N	D	D
$\subseteq$	$\mathcal{P}(\mathbb{N})$	D	N	D	D
$=$	$\mathbb{Q}$	D	D	D	D
disjunktnost	$\mathcal{P}(\mathbb{N})$	N	D	N	N
$ $	$\mathbb{N}$	D	N	D	D
$ $	$\mathbb{Z}$	D	N	D	N

Paralelnost. Svaki je pravac paralelan sa sobom, a definicija je simetrična. Ako je $p \parallel q$ i $q \parallel r$, pravci p, q, r imaju isti smjer, pa je $p \parallel r$. Dva različita paralelna pravca opovrgavaju antisimetričnost.

Okomitost. Nijedan pravac nije okomit sam na sebe. Okomitost je simetrična. Nije tranzitivna: ako su p i r paralelni pravci, a q okomit na njih, onda je $p \perp q$ i $q \perp r$, ali $p \not\perp r$ (slika lijevo). Isti primjer s $p \perp q$ i $q \perp p$ opovrgava antisimetričnost.

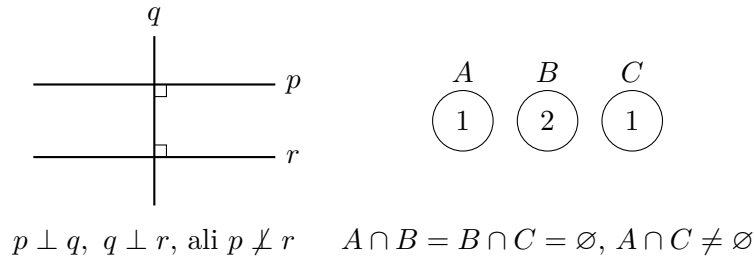
Relacije $\leq$ i $<$. Simetričnost opovrgava $1 \leq 2$, odnosno $1 < 2$, jer ne vrijedi $2 \leq 1$, odnosno $2 < 1$. Antisimetričnost relacije $<$ obrazložena je u prethodnoj napomeni; ostala svojstva slijede iz svojstava uređaja realnih brojeva.

Inkluzija. Refleksivnost i tranzitivnost slijede iz definicije podskupa, a $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$ upravo znači $A = B$. Nije simetrična jer je $\emptyset \subseteq \{1\}$, ali ne i $\{1\} \subseteq \emptyset$.

Jednakost očito ima sva četiri svojstva.

Disjunktnost. Nije refleksivna jer $\{1\} \cap \{1\} \neq \emptyset$; simetrična je jer je $A \cap B = B \cap A$. Nije tranzitivna: za $A = C = \{1\}$, $B = \{2\}$ je $A \cap B = \emptyset$ i $B \cap C = \emptyset$, ali $A \cap C \neq \emptyset$ (slika desno). Skupovi $\{1\}$ i $\{2\}$ disjunktni su u oba smjera, a različiti, pa ni antisimetričnost ne vrijedi.

Djeljivost. Na $\mathbb{N}$ to je relacija parcijalnog uređaja (vidi zadatak 3.15). Simetričnost opovrgava $1 \mid 2$. Na $\mathbb{Z}$ (gdje je $m \mid n \iff (\exists k \in \mathbb{Z}) n = mk$) refleksivnost i tranzitivnost vrijede s istim dokazom, ali antisimetričnost ne vrijedi: $2 \mid -2$ i $-2 \mid 2$, a $2 \neq -2$.



□

Zadatak 3.10. Na skupu $\{1, 2, 3, 4\}$ dana je binarna relacija

$$\rho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 3), (2, 4), (4, 4), (1, 4)\}.$$

Odredite je li ρ refleksivna, simetrična, antisimetrična i tranzitivna.

Rješenje. Prikažimo relaciju tablicom (zasjenjeno polje u retku x i stupcu y znači $x\rho y$):

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Refleksivnost ne vrijedi jer, primjerice, $(1, 1) \notin \rho$: dijagonala tablice nije cijela zasjenjena.

Simetričnost ne vrijedi jer je $(1, 2) \in \rho$, a $(2, 1) \notin \rho$: tablica nije simetrična s obzirom na dijagonalu.

Antisimetričnost vrijedi: ne postoje dva zasjenjena polja izvan dijagonale koja su simetrična s obzirom na dijagonalu.

Tranzitivnost ne možemo pročitati iz tablice tako izravno, pa provjeravamo sve mogućnosti $x\rho y, y\rho z$:

$$\begin{aligned} (1, 2), (2, 3) &\rightsquigarrow (1, 3) \in \rho, & (1, 2), (2, 4) &\rightsquigarrow (1, 4) \in \rho, & (1, 3), (3, 4) &\rightsquigarrow (1, 4) \in \rho, \\ (1, 4), (4, 4) &\rightsquigarrow (1, 4) \in \rho, & (2, 3), (3, 4) &\rightsquigarrow (2, 4) \in \rho, & (2, 4), (4, 4) &\rightsquigarrow (2, 4) \in \rho, \\ (3, 4), (4, 4) &\rightsquigarrow (3, 4) \in \rho, & (4, 4), (4, 4) &\rightsquigarrow (4, 4) \in \rho. \end{aligned}$$

U svim slučajevima je $x\rho z$, pa je ρ tranzitivna.

□

Zadatak 3.11. Na skupu $\mathbb{N}$ definirana je relacija ρ sa

$$m\rho n \iff 3m \text{ i } 5n \text{ daju isti ostatak pri dijeljenju sa } 7.$$

Ispitajte je li ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna i antisimetrična. Svoje tvrdnje dokažite.

Rješenje. Nije refleksivna: ne vrijedi $1\rho 1$, jer $3 \cdot 1 = 3$ i $5 \cdot 1 = 5$ daju različite ostatke pri dijeljenju sa 7.

Nije simetrična: vrijedi $1\rho 2$, jer $3 \cdot 1 = 3$ i $5 \cdot 2 = 10$ daju ostatak 3, ali ne vrijedi $2\rho 1$, jer $3 \cdot 2 = 6$ i $5 \cdot 1 = 5$ daju različite ostatke.

Nije tranzitivna: vrijedi $1\rho 2$ i $2\rho 4$ (brojevi $3 \cdot 2 = 6$ i $5 \cdot 4 = 20$ daju ostatak 6), ali ne vrijedi $1\rho 4$, jer 3 i 20 daju ostatke 3 i 6.

Nije antisimetrična: vrijedi $7\rho 14$ i $14\rho 7$ (svi brojevi 21, 70, 42, 35 djeljivi su sa 7), a $7 \neq 14$. $\square$

Zadatak 3.12. Na skupu studenata prve godine definirana je relacija EM: za studente A i B vrijedi $(A, B) \in \text{EM}$ ako i samo ako nijedan od njih nije položio ispit iz Elementarne matematike, ili su oba položila ispit s istom ocjenom, ili je A položio ispit, a B nije. Koja svojstva ima relacija EM?

Rješenje. Označimo s $O(X) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ocjenu studenta X , pri čemu $O(X) = 1$ znači da X nije položio. Tada je

$$(A, B) \in \text{EM} \iff O(A) = O(B) \vee (O(A) > 1 \wedge O(B) = 1).$$

Pretpostavljamo da postoje i studenti koji su položili i studenti koji nisu te da barem dva različita studenta imaju istu ocjenu (u protivnom vidi kraj rješenja).

Refleksivnost vrijedi: ako je A pao, onda nijedan od para (A, A) nije položio; ako je A položio, onda su oba položila s istom ocjenom. U oba slučaja je $(A, A) \in \text{EM}$.

Simetričnost ne vrijedi: ako je A položio, a B nije, onda je $(A, B) \in \text{EM}$, ali $(B, A) \notin \text{EM}$.

Antisimetričnost ne vrijedi: ako dva različita studenta A i B imaju istu ocjenu (npr. oba su pala), onda je $(A, B) \in \text{EM}$ i $(B, A) \in \text{EM}$, ali $A \neq B$.

Tranzitivnost vrijedi. Neka je $(A, B) \in \text{EM}$ i $(B, C) \in \text{EM}$. Razlikujemo slučajeve:

- 1° A i B su pali. Iz $(B, C) \in \text{EM}$ slijedi da je i C pao (jer B nije položio), pa je $(A, C) \in \text{EM}$.
- 2° A je položio, a B je pao. Kao u 1°, i C je pao, pa je $(A, C) \in \text{EM}$.
- 3° A i B su položili s istom ocjenom, a C je pao. Tada je A položio, a C nije, pa je $(A, C) \in \text{EM}$.
- 4° A i B su položili s istom ocjenom, a B i C također. Tada su A i C položili s istom ocjenom, pa je $(A, C) \in \text{EM}$.

Drugih mogućnosti nema: ako je B položio, onda je $(A, B) \in \text{EM}$ moguće samo uz $O(A) = O(B)$.

Odgovori o simetričnosti i antisimetričnosti ovise o skupu studenata: ako su svi dobili istu ocjenu, relacija je simetrična, a ako nikoja dva studenta nemaju istu ocjenu, relacija je antisimetrična. $\square$

3.3 Relacije ekvivalencije i parcijalnog uređaja

Definicija 3.13. Binarna relacija koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna naziva se *relacija ekvivalencije*. Binarna relacija koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna naziva se *relacija parcijalnog uređaja*. Parcijalni uređaj $\preceq$ na X je *totalni uređaj* ako su svaka dva elementa usporediva, tj. $(\forall x, y \in X) (x \preceq y \vee y \preceq x)$.

Iz tablice u zadatku 3.9 vidimo da su paralelnost pravaca i jednakost relacije ekvivalencije, a $\leq$ na $\mathbb{N}$, $\subseteq$ na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $|$ na $\mathbb{N}$ relacije parcijalnog uređaja. Relacija iz zadatka 3.10 nije ni jedno ni drugo (nije refleksivna).

Zadatak 3.14. Na skupu $\{1, 2, 3\}$ dana je relacija $\rho = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$. Ispitajte njezina svojstva i odredite je li relacija ekvivalencije, odnosno parcijalnog uređaja.

Rješenje. Tablica relacije je

	1	2	3
1			
2			
3			

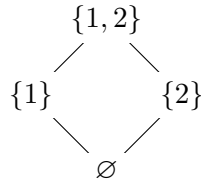
Cijela je dijagonala zasjenjena, pa je relacija refleksivna. Nije simetrična jer je $(1, 3) \in \rho$, a $(3, 1) \notin \rho$. Antisimetrična je jer su jedini parovi izvan dijagonale $(1, 3)$ i $(2, 3)$, a njihovi obrati nisu u ρ . Tranzitivna je: ako je $x\rho y$ i $y\rho z$ te je jedan od tih parova na dijagonali, onda je (x, z) jednak drugom paru; a dva para izvan dijagonale ne mogu se nadovezati jer nijedan ne počinje s 3. Dakle, ρ je relacija parcijalnog uređaja, a nije relacija ekvivalencije. Nije totalni uređaj jer 1 i 2 nisu usporedivi. $\square$

Zadatak 3.15. Je li djeljivost parcijalni uređaj na $\mathbb{N}$? Je li totalni uređaj?

Rješenje. Podsjetimo se, $m \mid n \iff (\exists k \in \mathbb{N}) n = mk$. Refleksivnost slijedi iz $m = m \cdot 1$. Ako je $m \mid n$ i $n \mid m$, onda je $n = mk$ i $m = n\ell$ za neke $k, \ell \in \mathbb{N}$, pa je $n = n\ell k$, tj. $\ell k = 1$. Zato je $k = \ell = 1$ i $m = n$, što je antisimetričnost. Ako je $m \mid n$ i $n \mid p$, onda je $n = mk$, $p = n\ell$, pa je $p = m(k\ell)$ i $m \mid p$. Dakle, djeljivost je parcijalni uređaj na $\mathbb{N}$. Nije totalni jer ne vrijedi ni $2 \mid 3$ ni $3 \mid 2$. $\square$

Zadatak 3.16. Na $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ promatramo parcijalni uređaj $\subseteq$. Prikažite ga dijagramom.

Rješenje. Vrijedi $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ i $\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1, 2\}$, $\emptyset \subseteq \{2\} \subseteq \{1, 2\}$, dok $\{1\}$ i $\{2\}$ nisu usporedivi, pa uređaj nije totalan. U dijagramu (tzv. *Hasseov dijagram*) manji skup crtamo niže i spajamo samo neposredne inkluzije; relacije $A \subseteq A$ i one koje slijede iz tranzitivnosti ne crtamo.



$\square$

Klase ekvivalencije

Definicija 3.17. Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu X i $x \in X$. Skup

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

naziva se *klasa ekvivalencije* određena elementom x . Skup svih klasa $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$ naziva se *kvocijentni skup* skupa X s obzirom na relaciju $\sim$.

Zadatak 3.18. Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S i $x, y \in S$. Dokažite: ako je $x \sim y$, onda je $[x] = [y]$, a ako nije $x \sim y$, onda su $[x]$ i $[y]$ disjunktni, tj. $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Rješenje. Neka je $x \sim y$. Dokazujemo $[x] = [y]$.

($\subseteq$) Neka je $z \in [x]$. Tada je $z \sim x$, a iz $z \sim x$ i $x \sim y$ tranzitivnost daje $z \sim y$, tj. $z \in [y]$.

($\supseteq$) Neka je $z \in [y]$, tj. $z \sim y$. Zbog simetričnosti iz $x \sim y$ slijedi $y \sim x$, pa tranzitivnost daje $z \sim x$, tj. $z \in [x]$.

Neka sada nije $x \sim y$. Pretpostavimo suprotno, da postoji $z \in [x] \cap [y]$. Tada je $z \sim x$ i $z \sim y$. Simetričnost daje $x \sim z$, a tranzitivnost iz $x \sim z$ i $z \sim y$ daje $x \sim y$, što je kontradikcija. Dakle, $[x] \cap [y] = \emptyset$. $\square$

Zbog refleksivnosti je $x \in [x]$, pa su klase neprazne i svaki element skupa leži u nekoj klasi. Prema zadatku 3.18 dvije su klase ili jednake ili disjunktne. Dakle, *klase ekvivalencije čine particiju skupa S* . Vrijedi i obrat.

Propozicija 3.19. *Neka je $\{S_i \mid i \in I\}$ particija skupa S . Relacija*

$$x \sim y \iff (\exists i \in I) x, y \in S_i$$

je relacija ekvivalencije na S , a njezine su klase upravo skupovi S_i , $i \in I$.

Dokaz. Svaki $x \in S$ pripada nekom bloku S_i , pa je $x \sim x$. Simetričnost je očita iz definicije. Ako su $x, y \in S_i$ i $y, z \in S_j$, onda je $y \in S_i \cap S_j$; budući da su različiti blokovi particije disjunktne, mora biti $S_i = S_j$, pa su $x, z \in S_i$, tj. $x \sim z$. Konačno, ako je $x \in S_i$, onda je $y \sim x$ točno za $y \in S_i$, pa je $[x] = S_i$. $\square$

Prema tome, relacija ekvivalencije potpuno je određena svojim klasama: sastoji se od svih uređenih parova elemenata iste klase, tj. jednaka je uniji skupova $K \times K$ po svim klasama K .

Zadatak 3.20. Na skupu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ zadana je relacija

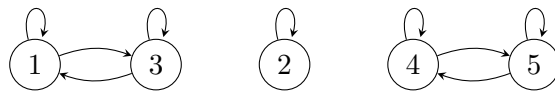
$$\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 4)\}.$$

Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije i odredite klase ekvivalencije.

Rješenje. Relacija se sastoji upravo od svih uređenih parova elemenata unutar skupova $\{1, 3\}$, $\{2\}$ i $\{4, 5\}$, a ti skupovi čine particiju skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Prema propoziciji 3.19 ρ je relacija ekvivalencije. (Svojstva možemo provjeriti i izravno, što je dobra vježba.) Klase su

$$[1] = [3] = \{1, 3\}, \quad [2] = \{2\}, \quad [4] = [5] = \{4, 5\}.$$

Graf relacije (strelica od a prema b znači $a\rho b$) jasno pokazuje klase:



$\square$

Zadatak 3.21. Definirajte relaciju ekvivalencije ρ na skupu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ čije su klase ekvivalencije $\{1, 4, 5\}$ i $\{2, 3\}$.

Rješenje. Uzimamo $\rho = (\{1, 4, 5\} \times \{1, 4, 5\}) \cup (\{2, 3\} \times \{2, 3\})$, odnosno

$$\rho = \{(1, 1), (1, 4), (1, 5), (4, 1), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (5, 5), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Prema propoziciji 3.19 to je relacija ekvivalencije s traženim klasama. $\square$

Zadatak 3.22. Odredite klase ekvivalencije relacije ekvivalencije na $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ zadane s

$$\rho = \{(1, 1), (1, 5), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (5, 7), (6, 6), (7, 1), (7, 5), (7, 7)\}.$$

Kako izgleda tablica relacije ako elemente poredamo tako da elementi iste klase budu jedan do drugoga?

Rješenje. Iz popisa parova čitamo

$$[1] = [5] = [7] = \{1, 5, 7\}, \quad [2] = [4] = \{2, 4\}, \quad [3] = \{3\}, \quad [6] = \{6\}.$$

Poredamo li retke i stupce redom 1, 5, 7, 2, 4, 3, 6, zasjenjena polja tablice čine kvadratne blokove duž dijagonale, po jedan za svaku klasu:

	1	5	7	2	4	3	6
1							
5							
7							
2							
4							
3							
6							

Takva tablica pripada svakoj relaciji ekvivalencije na konačnom skupu. □

Zadatak 3.23. Napišite relaciju ekvivalencije na $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ čije su klase $\{1, 3\}$, $\{2, 4, 5\}$ i $\{6\}$.

Rješenje. Tražena je relacija unija produkata svake klase sa samom sobom:

$$\rho = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

Ima $2^2 + 3^2 + 1^2 = 14$ uređenih parova. □

Zadatak 3.24. Na $\mathbb{Z}$ definiramo $a\rho b \iff 3 \mid (a - b)$. Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije i odredite kvocijentni skup.

Rješenje. Vrijedi $3 \mid a - a = 0$, a iz $3 \mid (a - b)$ slijedi $3 \mid (b - a) = -(a - b)$. Ako $3 \mid (a - b)$ i $3 \mid (b - c)$, onda $3 \mid (a - b) + (b - c) = a - c$. Time su dokazana sva tri svojstva. Brojevi su u relaciji točno kada daju isti ostatak pri dijeljenju s 3, pa postoje tri klase:

$$[0] = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad [1] = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad [2] = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dakle, $\mathbb{Z}/\rho = \{[0], [1], [2]\}$. □

Zadatak 3.25. Na $\mathbb{R}$ definiramo $x\rho y \iff x^2 = y^2$. Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije, odredite klase i provjerite je li ρ antisimetrična.

Rješenje. Refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost slijede iz istih svojstava jednakosti brojeva x^2, y^2, z^2 . Budući da je $y^2 = a^2 \iff y = \pm a$, klasa broja a jest $[a] = \{a, -a\}$; za $a = 0$ to je jednočlani skup $\{0\}$. Relacija nije antisimetrična jer je $1\rho(-1)$ i $(-1)\rho 1$, a $1 \neq -1$. □

3.4 Suprotna relacija i kompozicija relacija

Definicija 3.26. *Suprotna relacija* relacije $\rho \subseteq A \times B$ jest relacija

$$\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\} \subseteq B \times A.$$

Očito je $x\rho^{-1}y \iff y\rho x$, a odatle i $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

Zadatak 3.27. Neka je ρ binarna relacija na skupu A . Dokažite:

- (a) $\rho^{-1} = \rho$ ako i samo ako je ρ simetrična;
- (b) ρ je tranzitivna ako i samo ako je ρ^{-1} tranzitivna;
- (c) ρ je antisimetrična ako i samo ako je $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$.

Rješenje. (a) $(\Rightarrow)$ Neka je $\rho^{-1} = \rho$. Treba pokazati da za svaki $(x, y) \in \rho$ vrijedi $(y, x) \in \rho$. Ako je $(x, y) \in \rho$, onda je $(y, x) \in \rho^{-1} = \rho$.

$(\Leftarrow)$ Neka je ρ simetrična. Ako je $(x, y) \in \rho$, onda je $(y, x) \in \rho$, pa je $(x, y) \in \rho^{-1}$; dakle $\rho \subseteq \rho^{-1}$. Ako je $(x, y) \in \rho^{-1}$, onda je $(y, x) \in \rho$, pa simetričnost daje $(x, y) \in \rho$; dakle $\rho^{-1} \subseteq \rho$.

(b) Neka je ρ tranzitivna i neka je $(x, y) \in \rho^{-1}$ i $(y, z) \in \rho^{-1}$. Tada je $(y, x) \in \rho$ i $(z, y) \in \rho$, tj. u drugom poretku $(z, y) \in \rho$ i $(y, x) \in \rho$. Zbog tranzitivnosti je $(z, x) \in \rho$, tj. $(x, z) \in \rho^{-1}$. Dakle, ρ^{-1} je tranzitivna. Obratno, ako je ρ^{-1} tranzitivna, prema upravo dokazanom tranzitivna je i $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

(c) $(\Rightarrow)$ Neka je ρ antisimetrična i $(x, y) \in \rho \cap \rho^{-1}$. Tada je $(x, y) \in \rho$ i $(x, y) \in \rho^{-1}$, tj. $(x, y) \in \rho$ i $(y, x) \in \rho$, pa je zbog antisimetričnosti $x = y$. Dakle, $(x, y) = (x, x) \in \Delta_A$.

$(\Leftarrow)$ Neka je $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_A$ te $(x, y) \in \rho$ i $(y, x) \in \rho$. Tada je $(x, y) \in \rho^{-1}$, pa je $(x, y) \in \rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_A$, tj. $x = y$.

Primijetimo da u (c) općenito ne vrijedi jednakost: $\rho \cap \rho^{-1} = \Delta_A$ vrijedi točno kada je ρ antisimetrična i refleksivna. $\square$

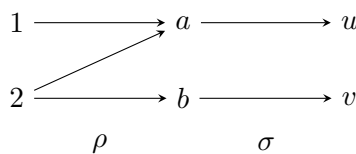
Definicija 3.28. Neka su $\rho \subseteq A \times B$ i $\sigma \subseteq B \times C$ relacije. *Kompozicija* relacija ρ i σ jest relacija

$$\sigma \circ \rho = \{(a, c) \in A \times C \mid (\exists b \in B) (a\rho b \wedge b\sigma c)\}.$$

Ako su ρ i σ funkcije, to je upravo kompozicija funkcija (najprije djeluje ρ , zatim σ).

Zadatak 3.29. Za $\rho = \{(1, a), (2, a), (2, b)\}$ i $\sigma = \{(a, u), (b, v)\}$ odredite $\sigma \circ \rho$.

Rješenje. Iz 1 preko a stižemo u u , a iz 2 preko a u u i preko b u v . Zato je $\sigma \circ \rho = \{(1, u), (2, u), (2, v)\}$.



$\square$

3.5 Zadaci za samostalan rad

- 3.1.** Na $\mathbb{Z}$ ispitajte relaciju $a\rho b \iff a+b$ je paran broj. Ako je to relacija ekvivalencije, odredite klase.
- 3.2.** Ispitajte refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost i irefleksivnost relacije $<$ na $\mathbb{R}$.
- 3.3.** Dokažite da je presjek dviju relacija ekvivalencije na istom skupu relacija ekvivalencije.
- 3.4.** Je li unija dviju relacija ekvivalencije na istom skupu nužno relacija ekvivalencije? Potražite protuprimjer na skupu s tri elementa.

- 3.5.** Dokažite da je relacija ρ tranzitivna ako i samo ako je $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.
- 3.6.** Dokažite da za svaku relaciju ρ vrijedi $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.
- 3.7.** Izravno (bez propozicije 3.19) dokažite da je relacija iz zadatka s klasama $\{1, 3\}$, $\{2\}$, $\{4, 5\}$ relacija ekvivalencije.

Poglavlje 4

Funkcije

4.1 Pojam funkcije. Injekcija, surjekcija i bijekcija

Definicija 4.1. Neka su A i B neprazni skupovi. *Funkcija* (ili *preslikavanje*) $f: A \rightarrow B$ je relacija $f \subseteq A \times B$ takva da za svaki $x \in A$ postoji jedinstven $y \in B$ za koji je $(x, y) \in f$. Simbolima:

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B) (x, y) \in f.$$

Umjesto $(x, y) \in f$ pišemo $y = f(x)$ ili $x \mapsto f(x)$. Skup A zovemo *domena*, a skup B *kodomena* funkcije f .

Simbol $\exists!$ čitamo „postoji jedinstven”. Kraće, ali manje precizno, funkciju shvaćamo kao uređenu trojku (A, B, f) : domenu A , kodomenu B i *pravilo* f koje svakom elementu skupa A pridružuje točno jedan element skupa B . Relaciju kojom je funkcija definirana zovemo *graf funkcije* i označavamo s

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B.$$

Dvije su funkcije jednake ako imaju jednake domene, jednake kodomene i jednaka pravila. Ako su domena i kodomena podskupovi od $\mathbb{R}$, govorimo o *realnoj funkciji realne varijable*.

Primjer 4.2. Sljedeća pravila zadaju funkcije:

- *apsolutna vrijednost* $x \mapsto |x|$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- *modul kompleksnog broja* $z \mapsto |z|$, $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$;
- *kvadratne funkcije* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, primjerice $f(x) = x^2 - 2x + 5$ ili $f(x) = x^2 + 5x - 2$;
- funkcija *sljedbenik* $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n) = n + 1$;
- $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $h(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ paran,} \\ 3n + 1, & n \text{ neparan.} \end{cases}$ Ovo je dobro definirana funkcija: svaki prirodni broj je ili paran ili neparan, pa je vrijednost $h(n)$ jednoznačno određena i ponovno je prirodni broj.

Definicija 4.3. Neka je $f: A \rightarrow B$ funkcija, $A_1 \subseteq A$ i $B_1 \subseteq B$.

- *Slika skupa* A_1 je skup $f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$.
- *Slika funkcije* f je skup $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ svih vrijednosti funkcije. (U literaturi se za sliku koristi i oznaka $\text{Im } f$.)
- *Praslika* (ili *inverzna slika*) skupa B_1 je skup $f^{-1}(B_1) = \{x \in A \mid f(x) \in B_1\}$.

Praslika je definirana za svaku funkciju; oznaka $f^{-1}(B_1)$ ne pretpostavlja postojanje inverzne funkcije.

Definicija 4.4. Funkcija $f: A \rightarrow B$ je

- *injekcija* ako $(\forall x_1, x_2 \in A) (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$;
- *surjekcija* ako $(\forall y \in B)(\exists x \in A) y = f(x)$;
- *bijekcija* ako je injekcija i surjekcija.

Napomena 4.5. U zadacima se koriste sljedeći ekvivalentni zapisi:

- f je injekcija ako i samo ako $(\forall x_1, x_2 \in A) (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$; to je obrat po kontrapoziciji definicije.
- f je surjekcija ako i samo ako je $f(A) = B$; to slijedi iz definicije slike.
- f je bijekcija ako i samo ako $(\forall y \in B)(\exists! x \in A) y = f(x)$.

Za opovrgavanje injektivnosti dovoljno je naći $x_1 \neq x_2$ s $f(x_1) = f(x_2)$, a za opovrgavanje surjektivnosti dovoljno je naći $y \in B$ koji nije vrijednost funkcije.

Definicija 4.6. Neka je $f: A \rightarrow B$ funkcija i $S \subseteq A$ neprazan skup. *Restrikcija (suženje)* funkcije f na skup S je funkcija $f|_S: S \rightarrow B$, $f|_S(x) = f(x)$ za sve $x \in S$.

Zadatak 4.7. Ispitajte injektivnost, surjektivnost i bijektivnost funkcija

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty), f(x) = x^2, \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |x|.$$

Rješenje. Injektivnost. Iz $f(x_1) = f(x_2)$, tj. $x_1^2 = x_2^2$, ne slijedi $x_1 = x_2$: primjerice $1^2 = (-1)^2$, a $1 \neq -1$. Slično je $|2| = |-2|$, a $2 \neq -2$. Dakle, ni f ni g nisu injekcije.

Surjektivnost. Za svaki $y \in [0, +\infty)$ broj $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ zadovoljava $f(x) = (\sqrt{y})^2 = y$, pa je f surjekcija. Za g pitamo postoji li za svaki $y \in \mathbb{R}$ neki $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| = y$. Ne postoji ako je $y < 0$, pa g nije surjekcija.

	injekcija	surjekcija	bijekcija
f	ne	da	ne
g	ne	ne	ne

□

Napomena 4.8. Prethodni zadatak pokazuje da svojstva funkcije ovise i o domeni i o kodomeni, a ne samo o pravilu.

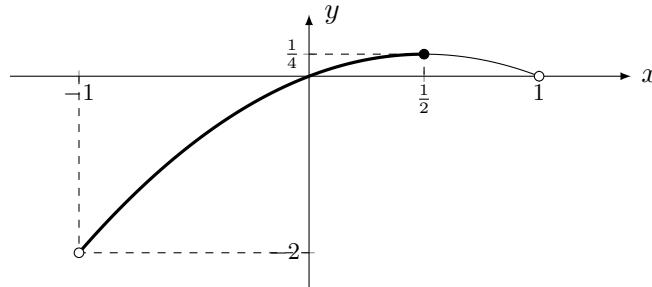
- Restrikcija $f|_{[0, +\infty)}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ je injekcija: za $x_1, x_2 \geq 0$ iz $x_1^2 = x_2^2$ slijedi $x_1 = x_2$. Surjektivnost dokazujemo kao gore, pa je ta restrikcija bijekcija.
- Funkcija $x \mapsto |x|$ s domenom $\mathbb{R}$ i kodomenom $[0, +\infty)$ jest surjekcija (za $y \geq 0$ vrijedi $|y| = y$), ali nije injekcija.
- Njezina restrikcija na $[0, +\infty)$, s kodomenom $[0, +\infty)$, je bijekcija jer je na tom skupu $|x| = x$. Isto vrijedi i za restrikciju na $\langle -\infty, 0]$, na kojoj je $|x| = -x$.

Zadatak 4.9. Zadana je funkcija $f: \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle -2, 2 \rangle$, $f(x) = x - x^2$. Odredite $B \subseteq \langle -2, 2 \rangle$ takav da funkcija $g: \langle -1, 1 \rangle \rightarrow B$ zadana istim pravilom bude surjekcija. Zatim odredite $A \subseteq \langle -1, 1 \rangle$ takav da funkcija $h: A \rightarrow B$ zadana istim pravilom bude bijekcija.

Rješenje. Funkcija $f(x) = -x^2 + x$ je kvadratna s vodećim koeficijentom $a = -1 < 0$, pa je otvor parabole okrenut prema dolje. Tjeme je u točki

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{1}{4},$$

a nultočke su $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Na rubovima domene vrijedi $f(-1) = -2$ i $f(1) = 0$, ali ti rubovi nisu u domeni.



Iz grafa i navedenih svojstava očitavamo da funkcija na $\langle -1, 1 \rangle$ poprima točno vrijednosti iz $\langle -2, 1/4 \rangle$: najveća vrijednost $1/4$ postiže se u $x = 1/2$, a vrijednost -2 se ne postiže. Dakle,

$$g: \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle -2, \frac{1}{4} \rangle \text{ je surjekcija,} \quad B = \langle -2, \frac{1}{4} \rangle.$$

Na $\langle -1, 1/2 \rangle$ funkcija strogo raste i poprima sve vrijednosti iz B , pa je

$$h: \langle -1, \frac{1}{2} \rangle \rightarrow \langle -2, \frac{1}{4} \rangle \text{ bijekcija,} \quad A = \langle -1, \frac{1}{2} \rangle.$$

„Komad” $\langle 1/2, 1 \rangle$ smeta injektivnosti jer se ondje ponavljaju vrijednosti iz $\langle 0, 1/4 \rangle$ koje se već postižu na $\langle 0, 1/2 \rangle$. Na slici je podebljan graf restrikcije h . $\square$

Zadatak 4.10. Ispitajte jesu li sljedeće funkcije bijekcije:

- (a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$;
- (b) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty), f(x) = ||x| - 1|$;
- (c) $f: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log(x^2) - 10$.

Rješenje. (a) Funkcija je injekcija: za $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ iz $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$ množenjem s $x_1 x_2$ dobivamo $x_2 = x_1$. Nije surjekcija jer je $\frac{1}{x} \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tj. $0 \notin f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle, f nije bijekcija.

(b) Funkcija nije injekcija jer je

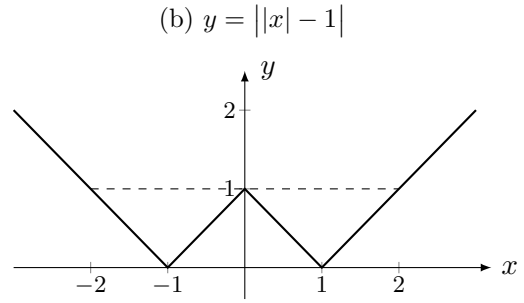
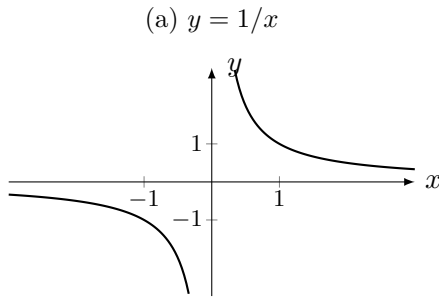
$$f(-2) = ||-2| - 1| = 1, \quad f(0) = ||0| - 1| = 1, \quad f(2) = ||2| - 1| = 1.$$

Ipak, f je surjekcija: slika funkcije $x \mapsto |x| - 1$ je $[-1, +\infty)$, a funkcija $u \mapsto |u|$ preslikava taj interval na $[0, +\infty)$. Dakle, $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$. (Izravno: za $y \geq 0$ vrijedi $f(y+1) = y$.) Kako nije injekcija, f nije bijekcija.

(c) Funkcija je injekcija: neka su $x_1, x_2 \in \langle 0, +\infty \rangle$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$. Tada

$$\log(x_1^2) - 10 = \log(x_2^2) - 10 \Rightarrow \log(x_1^2) = \log(x_2^2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

pri čemu drugi korak koristi injektivnost logaritma, a treći uvjet $x_1, x_2 > 0$. Funkcija je i surjekcija: za proizvoljan $y \in \mathbb{R}$ tražimo $x \in \langle 0, +\infty \rangle$ takav da je $y = \log(x^2) - 10$. Slijedi $\log(x^2) = y + 10$, $x^2 = 10^{y+10}$, pa pozitivno rješenje $x = \sqrt{10^{y+10}} = 10^{(y+10)/2}$ pripada domeni. Dakle, f je bijekcija.



□

4.2 Prirodna domena

Definicija 4.11. Neka je funkcija zadana samo formulom $f(x)$. *Prirodna domena* funkcije f je najveći skup realnih brojeva x za koje formula ima smisla i $f(x)$ je realan broj. Označavamo je s D_f .

Pri određivanju prirodne domene najčešće provjeravamo sljedeće uvjete:

- nazivnik razlomka mora biti različit od nule;
- izraz pod korijenom parnog reda mora biti nenegativan (korijen neparnog reda definiran je za svaki realni broj);
- argument logaritma mora biti pozitivan, a baza logaritma pozitivna i različita od 1;
- $\operatorname{tg} x$ je definiran za $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, a $\operatorname{ctg} x$ za $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\arcsin$ i $\arccos$ definirani su na $[-1, 1]$, a $\sin$, $\cos$, eksponencijalna funkcija i arctg na cijelom $\mathbb{R}$.

Domena je presjek skupova dobivenih iz svih uvjeta.

Zadatak 4.12. Odredite prirodne domene sljedećih funkcija:

- (a) $f(x) = \frac{1}{2x+5}$;
- (b) $g(x) = \sqrt{2x^2 - x - 1}$;
- (c) $h(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x - 1}$;
- (d) $p(t) = \sqrt[4]{\frac{1-t}{t^2-4}}$;
- (e) $k(x) = 9x e^{3x-1}$;
- (f) $f(u) = \frac{u}{\ln(5-3u)}$;
- (g) $g(x) = \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{3-2x} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$;
- (h) $r(t) = \log_7(\sin 7t)$;
- (i) $h(x) = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{3x}{2} + \pi\right)$;
- (j) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^{-\frac{1}{2}} + (\sin x + \sqrt{3} \cos x)^{-1}$.

Rješenje. (a) Uvjet je $2x + 5 \neq 0$, tj. $x \neq -\frac{5}{2}$. Dakle, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$.

(b) Uvjet je $2x^2 - x - 1 \geq 0$. Rastavom $2x^2 - x - 1 = 2x^2 - 2x + x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$ dobivamo nultočke $-\frac{1}{2}$ i 1. Parabola ima otvor prema gore, pa je izraz nenegativan izvan intervala među nultočkama:

$$D_g = \langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle \cup [1, +\infty).$$

(c) Korijen neparnog reda definiran je za svaki realni broj, pa je $D_h = \mathbb{R}$.

(d) Najprije $t^2 - 4 \neq 0$, tj. $t \neq \pm 2$. Zatim mora biti

$$\frac{1-t}{t^2-4} = \frac{1-t}{(t-2)(t+2)} \geq 0.$$

Tablica predznaka:

t	$\langle -\infty, -2 \rangle$	$\langle -2, 1 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 2, +\infty \rangle$
$1-t$	+	+	-	-
$t-2$	-	-	-	+
$t+2$	-	+	+	+
$\frac{1-t}{(t-2)(t+2)}$	+	-	+	-

U $t = 1$ razlomak je jednak 0, pa 1 pripada domeni, dok točke ± 2 isključujemo. Dakle,

$$D_p = \langle -\infty, -2 \rangle \cup [1, 2).$$

(e) Eksponencijalna funkcija definirana je za svaki realni broj, pa je $D_k = \mathbb{R}$.

(f) Mora vrijediti $5 - 3u > 0$, tj. $u < \frac{5}{3}$, i $\ln(5 - 3u) \neq 0$, tj. $5 - 3u \neq e^0 = 1$, odnosno $u \neq \frac{4}{3}$. Dakle,

$$D_f = \langle -\infty, \frac{4}{3} \rangle \cup \langle \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \rangle.$$

(g) Potencija s eksponentom $\frac{1}{2}$ je drugi korijen. Uvjeti su:

1° $3 - 2x \neq 0$, tj. $x \neq \frac{3}{2}$;

2° $\frac{x-1}{3-2x} > 0$. Iz tablice predznaka

x	$\langle -\infty, 1 \rangle$	$\langle 1, \frac{3}{2} \rangle$	$\langle \frac{3}{2}, +\infty \rangle$
$x-1$	-	+	+
$3-2x$	+	+	-
$\frac{x-1}{3-2x}$	-	+	-

slijedi $x \in \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$;

3° $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{3-2x} + 1 \geq 0$, tj. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{3-2x} \geq -1$. Baza logaritma manja je od 1, pa je logaritam strogo padajući i nejednakost mijenja smjer:

$$\frac{x-1}{3-2x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \iff \frac{x-1-6+4x}{3-2x} \leq 0 \iff \frac{5x-7}{3-2x} \leq 0.$$

x	$\langle -\infty, \frac{7}{5} \rangle$	$\langle \frac{7}{5}, \frac{3}{2} \rangle$	$\langle \frac{3}{2}, +\infty \rangle$
$5x-7$	-	+	+
$3-2x$	+	+	-
$\frac{5x-7}{3-2x}$	-	+	-

Uz nultočku $x = \frac{7}{5}$ dobivamo $x \in \langle -\infty, \frac{7}{5} \rangle \cup \langle \frac{3}{2}, +\infty \rangle$.

Presjek uvjeta 2° i 3° (uvjet 1° je u njima sadržan) daje

$$D_g = \langle 1, \frac{3}{2} \rangle \cap \left(\langle -\infty, \frac{7}{5} \rangle \cup \langle \frac{3}{2}, +\infty \rangle \right) = \langle 1, \frac{7}{5} \rangle.$$

- (h) Mora biti $\sin 7t > 0$. Sinus je pozitivan točno za kutove na gornjoj polukružnici (bez točaka 0 i π), dakle

$$7t \in \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle \text{ za neki } k \in \mathbb{Z} \iff \frac{2k\pi}{7} < t < \frac{(2k+1)\pi}{7}.$$

Stoga je $D_r = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle \frac{2k\pi}{7}, \frac{(2k+1)\pi}{7} \rangle$.

- (i) Kosinus je definiran na cijelom $\mathbb{R}$, a tangens zahtijeva da argument ne bude oblika $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (točke $\pm \frac{\pi}{2}$ na jediničnoj kružnici, u kojima je prva koordinata 0):

$$2x - \frac{4\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \iff 2x \neq \frac{11\pi}{6} + k\pi \iff x \neq \frac{11\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dakle, $D_h = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{11\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

- (j) Zapišimo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+1}} + \frac{1}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}$. Uvjeti su:

1° $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$, što vrijedi za svaki x ;

2° $\sqrt{x^2+2x+1} \neq 0$, tj. $(x+1)^2 \neq 0$, odnosno $x \neq -1$;

3° $\sin x + \sqrt{3}\cos x \neq 0$. Riješimo jednadžbu $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ na dva načina.

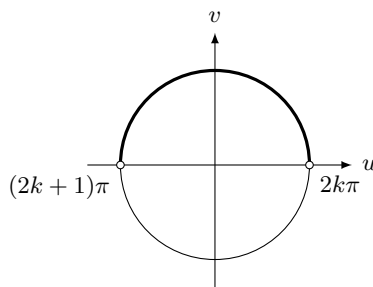
1. način. Dijeljenjem s 2 i adicijskom formulom:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

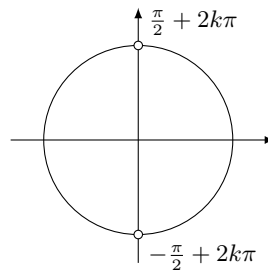
odnosno $x + \frac{\pi}{3} = k\pi$, tj. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. način. Ako je $\cos x = 0$, onda je $\sin x = \pm 1$, pa izraz nije 0. Zato smijemo dijeliti s $\cos x \neq 0$: jednadžba postaje $\tan x = -\sqrt{3}$, čija su rješenja $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (vidi sliku: pravac kroz ishodište i točku $(1, -\sqrt{3})$ na tangensnoj osi siječe kružnicu u točkama pridruženim kutovima $-\frac{\pi}{3}$ i $\frac{2\pi}{3}$).

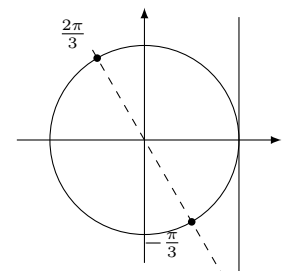
Dakle, $D_f = \mathbb{R} \setminus (\{-1\} \cup \{-\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$.



(h) $\sin 7t > 0$



(i) $\tan$ nije definiran



(j) $\tan x = -\sqrt{3}$

□

Zadatak 4.13. Odredite prirodne domene sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(3-|x|)}}{\ln|x|}$;

(b) $f(x) = \log_{\pi}(\sqrt{x^2+4x+3}+5x+3)$;

$$(c) f(x) = \log_{16-x^2} \frac{x^2 + 4x - 5}{\sqrt{9^x - 8 \cdot 3^x - 9}}.$$

Rješenje. (a) Uvjeti su:

- $\ln|x| \neq 0$, tj. $|x| \neq 1$, odnosno $x \neq \pm 1$;
- $|x| > 0$ i $3 - |x| > 0$ (argumenti logaritama), tj. $0 < |x| < 3$, odnosno $x \in \langle -3, 0 \rangle \cup \langle 0, 3 \rangle$;
- $\ln(3 - |x|) \geq 0 = \ln 1$, tj. $3 - |x| \geq 1$ (logaritam s bazom $e > 1$ strogo raste), odnosno $|x| \leq 2$, $x \in [-2, 2]$.

Sve zajedno:

$$D_f = [-2, -1) \cup \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle.$$

(b) Uvjeti su $x^2 + 4x + 3 \geq 0$ i $\sqrt{x^2 + 4x + 3} + 5x + 3 > 0$.

Prvi: nultočke izraza $x^2 + 4x + 3$ su -3 i -1 , pa je $x \in \langle -\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$.

Drugi uvjet glasi $\sqrt{x^2 + 4x + 3} > -5x - 3$. Razlikujemo dva slučaja.

1° $-5x - 3 < 0$, tj. $x > -\frac{3}{5}$. Lijeva strana je nenegativna, a desna negativna, pa nejednakost vrijedi za sve takve x (uz prvi uvjet).

2° $-5x - 3 \geq 0$, tj. $x \leq -\frac{3}{5}$. Obje strane su nenegativne, pa smijemo kvadrirati:

$$x^2 + 4x + 3 > 25x^2 + 30x + 9 \iff 24x^2 + 26x + 6 < 0 \iff 12x^2 + 13x + 3 < 0.$$

Nultočke su $x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 144}}{24} = \frac{-13 \pm 5}{24}$, tj. $-\frac{3}{4}$ i $-\frac{1}{3}$, pa je $x \in \langle -\frac{3}{4}, -\frac{1}{3} \rangle$. Uz $x \leq -\frac{3}{5}$ dobivamo $x \in \langle -\frac{3}{4}, -\frac{3}{5} \rangle$.

Rješenje drugog uvjeta je unija slučajeva: $\langle -\frac{3}{4}, -\frac{3}{5} \rangle \cup \langle -\frac{3}{5}, +\infty \rangle = \langle -\frac{3}{4}, +\infty \rangle$. Presjek s prvim uvjetom daje

$$D_f = \langle -\frac{3}{4}, +\infty \rangle \cap \left(\langle -\infty, -3] \cup [-1, +\infty) \right) = \langle -\frac{3}{4}, +\infty \rangle.$$

(c) Uvjeti su:

- baza: $16 - x^2 > 0$ i $16 - x^2 \neq 1$, tj. $x \in \langle -4, 4 \rangle$ i $x \neq \pm\sqrt{15}$;
- korijen u nazivniku: $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 \geq 0$ i $\sqrt{9^x - 8 \cdot 3^x - 9} \neq 0$, što zajedno daje $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 > 0$. Uz supstituciju $t = 3^x > 0$ dobivamo $t^2 - 8t - 9 = (t - 9)(t + 1) > 0$, tj. $t < -1$ ili $t > 9$. Prva mogućnost otpada jer je $3^x > 0$, pa $3^x > 9 = 3^2$, tj. $x > 2$;
- argument logaritma: $\frac{x^2 + 4x - 5}{\sqrt{9^x - 8 \cdot 3^x - 9}} > 0$. Nazivnik je pozitivan, pa je uvjet ekvivalentan s $x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1) > 0$, tj. $x \in \langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$.

Presjek svih uvjeta je

$$D_f = \langle 2, \sqrt{15} \rangle \cup \langle \sqrt{15}, 4 \rangle = \langle 2, 4 \rangle \setminus \{\sqrt{15}\}.$$

□

Zadatak 4.14. Jesu li funkcije $f(x) = \log(x + 5)^2$ i $g(x) = 2 \log(x + 5)$, zadane na svojim prirodnim domenama, jednake?

Rješenje. Za prirodnu domenu funkcije f tražimo $(x + 5)^2 > 0$, tj. $x \neq -5$, pa je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Za g tražimo $x + 5 > 0$, pa je $D_g = \langle -5, +\infty \rangle$. Kako je $D_f \neq D_g$, funkcije nisu jednake. Ipak, na zajedničkom dijelu domena $D_f \cap D_g = \langle -5, +\infty \rangle$ pravila im se podudaraju jer je ondje $\log(x + 5)^2 = 2 \log(x + 5)$. Na cijeloj domeni funkcije f vrijedi $\log(x + 5)^2 = 2 \log|x + 5|$. □

4.3 Slika i praslika

Sliku funkcije zadane formulom određujemo tako da za proizvoljan y ispitamo ima li jednačba $y = f(x)$ rješenje x u domeni. Često pomaže graf ili prikaz funkcije kao kompozicije jednostavnijih funkcija. Prasliku skupa T dobivamo rješavanjem uvjeta $f(x) \in T$, tj. odgovarajuće (ne)jednačbe na domeni.

Zadatak 4.15. Odredite slike sljedećih funkcija (zadanih na prirodnim domenama):

- (a) $f_1(x) = x^2 + 2x - 3$;
- (b) $f_2(x) = -3 \sin(x - 2\pi)$;
- (c) $f_3(x) = \frac{5x + 2}{x - 3}$;
- (d) $f_4(x) = \frac{2^x - 2}{2^x + 1}$.

Rješenje. (a) $f_1(x) = x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$ je kvadratna funkcija s otvorom prema gore, pa najmanju vrijednost postiže u tjemenu T :

$$x_T = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1, \quad y_T = f_1(-1) = 1 - 2 - 3 = -4.$$

Svaki $y \geq -4$ je vrijednost funkcije jer iz $f_1(x) = (x + 1)^2 - 4 = y$ slijedi $x = -1 + \sqrt{y + 4}$. Dakle, $f_1(\mathbb{R}) = [-4, +\infty)$.

- (b) Zbog periodičnosti sinusa je $f_2(x) = -3 \sin x$. Iz $-1 \leq \sin x \leq 1$ slijedi $-3 \leq -3 \sin x \leq 3$, a obje se granice postižu (u $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$). Sinus poprima sve vrijednosti iz $[-1, 1]$, pa je $f_2(\mathbb{R}) = [-3, 3]$.

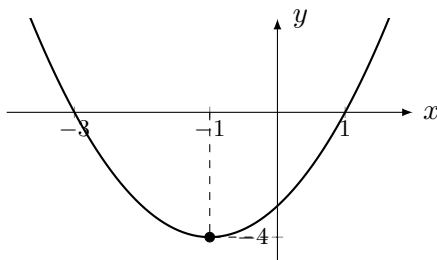
- (c) Domena je $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ i vrijedi

$$f_3(x) = \frac{5x - 15 + 17}{x - 3} = 5 + \frac{17}{x - 3}.$$

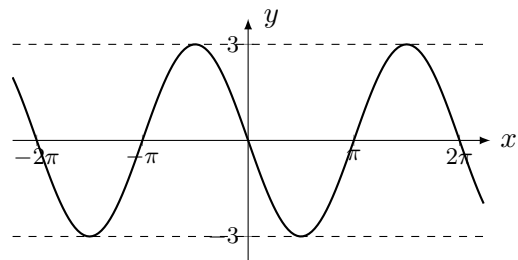
Budući da je $\frac{17}{x-3} \neq 0$ za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, vrijedi $f_3(x) \neq 5$. Obratno, za $y \neq 5$ jednačba $5 + \frac{17}{x-3} = y$ ima rješenje $x = 3 + \frac{17}{y-5} \neq 3$. Dakle, $f_3(\mathbb{R} \setminus \{3\}) = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

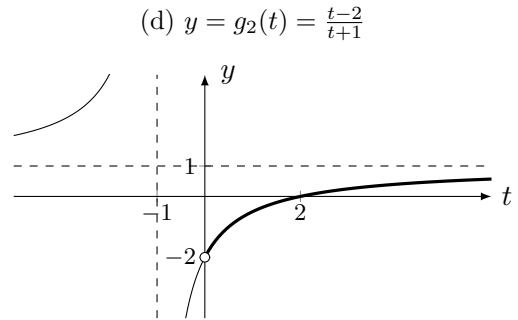
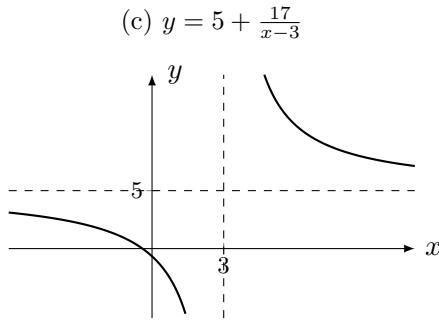
- (d) Promotrimo funkcije $g_1(x) = 2^x$ i $g_2(x) = \frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$. Tada je $f_4 = g_2 \circ g_1$. Slika funkcije g_1 je $\langle 0, +\infty \rangle$. Na tom intervalu g_2 strogo raste (jer $\frac{3}{x+1}$ strogo pada), vrijedi $g_2(0) = 1 - 3 = -2$, a vrijednosti $g_2(t)$ teže prema 1 kada t raste. Funkcija g_2 „preslikava” interval $\langle 0, +\infty \rangle$ na $\langle -2, 1 \rangle$: za $-2 < y < 1$ jednačba $g_2(t) = y$ ima rješenje $t = \frac{y+2}{1-y} > 0$. Dakle, $f_4(\mathbb{R}) = \langle -2, 1 \rangle$.

(a) $y = x^2 + 2x - 3$



(b) $y = -3 \sin x$





Na grafu (d) podebljan je dio za $t > 0$; njegove ordinate čine interval $\langle -2, 1 \rangle$. □

Zadatak 4.16. Odredite prirodnu domenu i sliku funkcija

- (a) $f(x) = \sqrt{1-x}$;
 (b) $f(x) = \sqrt[3]{2x^4-1}$.

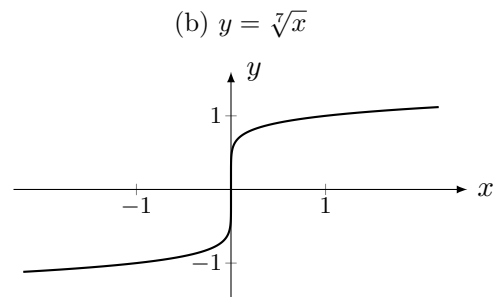
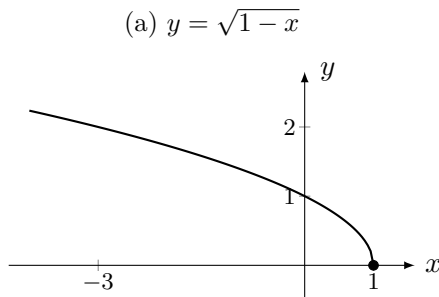
Rješenje. (a) Uvjet $1-x \geq 0$ daje $D_f = \langle -\infty, 1 \rangle$. Funkciju možemo shvatiti kao kompoziciju $f = g \circ h$, gdje je $h: \langle -\infty, 1 \rangle \rightarrow [0, +\infty)$, $h(x) = 1-x$, i $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x}$. Obje su bijekcije, pa je $f(D_f) = [0, +\infty)$. To možemo obrazložiti i izravno: svaki $y \in [0, +\infty)$ može se zapisati kao $y = \sqrt{1-x}$ za $x = 1-y^2 \in \langle -\infty, 1 \rangle$.

- (b) Korijen neparnog reda definiran je za svaki realni broj, pa je $D_f = \mathbb{R}$. Neka je $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2x^4 - 1$, i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Tada je $f = g \circ h$ i

$$f(\mathbb{R}) = (g \circ h)(\mathbb{R}) = g(h(\mathbb{R})) \stackrel{(1)}{=} g([-1, +\infty)) \stackrel{(2)}{=} [-1, +\infty).$$

(1) Iz $2x^4 \geq 0$ slijedi $2x^4 - 1 \geq -1$; obratno, za $y \geq -1$ je $h(\sqrt[4]{(y+1)/2}) = y$. Dakle, $h(\mathbb{R}) = [-1, +\infty)$.

(2) Funkcija g je strogo rastuća bijekcija sa $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ (tako izgledaju grafovi svih korijena neparnog reda) i $g(-1) = -1$, pa preslikava $[-1, +\infty)$ na $[-1, +\infty)$.

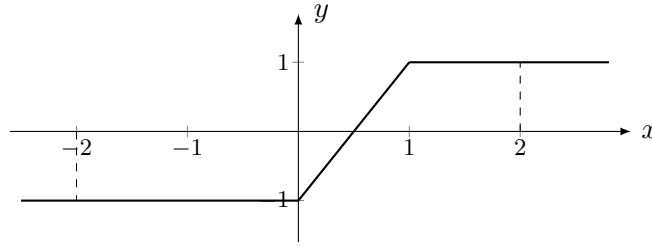


□

Zadatak 4.17. Skicirajte graf funkcije $f(x) = |x| - |x-1|$ te odredite $f(\langle -2, 2 \rangle)$ i $f^{-1}(\langle 1, 2 \rangle)$.

Rješenje. Izrazi u apsolutnim vrijednostima mijenjaju predznak u 0 i 1, pa razlikujemo tri slučaja:

$$f(x) = \begin{cases} -x - (-(x-1)), & x \leq 0, \\ x - (-(x-1)), & 0 < x \leq 1, \\ x - (x-1), & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ 2x-1, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



Iz grafa očitavamo $f(\langle -2, 2 \rangle) = [-1, 1]$: vrijednosti -1 i 1 postižu se već unutar intervala (npr. u $x = -1$ i $x = \frac{3}{2}$), a na $[0, 1]$ funkcija poprima sve vrijednosti između njih.

Grafički vidimo da je $f^{-1}(\langle 1, 2 \rangle) = \emptyset$. Računski:

$$f^{-1}(\langle 1, 2 \rangle) = \{x \in D_f \mid f(x) \in \langle 1, 2 \rangle\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < f(x) \leq 2\} = \emptyset,$$

jer je $f(x) \leq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. □

Zadatak 4.18. Skicirajte grafove funkcija f te odredite $f(\mathbb{R})$, $f(A)$ i $f^{-1}(B)$ ako je

- (a) $f(x) = x - 5$, $A = [0, 1]$, $B = \langle -3, -1 \rangle$;
- (b) $f(x) = x^2 + 1$, $A = \langle -1, 1 \rangle$, $B = [4, 5]$;
- (c) $f(x) = x^3$, $A = \langle -1, 1 \rangle$, $B = \langle -1, 0 \rangle$.

Rješenje. (a) Linearna funkcija s koeficijentom smjera 1 poprima sve realne vrijednosti, pa je $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Za $0 \leq x \leq 1$ vrijedi $-5 \leq x - 5 \leq -4$, pa je $f(A) = [-5, -4]$.

1. način (pomoću grafa). Očitavamo $f^{-1}(B) = \langle 2, 4 \rangle$.

2. način (računski).

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x - 5 \leq -1\}.$$

Iz $x - 5 > -3$ slijedi $x > 2$, a iz $x - 5 \leq -1$ slijedi $x \leq 4$. Dakle, $f^{-1}(B) = \langle 2, 4 \rangle$.

- (b) Graf je parabola s tjemnom $(0, 1)$, pa je $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty)$. Za $x \in \langle -1, 1 \rangle$ vrijedi $0 \leq x^2 < 1$, pa je $f(A) = [1, 2)$.

1. način (pomoću grafa). Iz $x^2 + 1 = 4$ slijedi $x = \pm\sqrt{3}$, a iz $x^2 + 1 = 5$ slijedi $x = \pm 2$. S grafa očitavamo $f^{-1}(B) = \langle -2, -\sqrt{3} \rangle \cup [\sqrt{3}, 2)$.

2. način (računski).

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x^2 + 1 < 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x^2 < 4\}.$$

Uvjet $x^2 - 3 \geq 0$ daje $x \in \langle -\infty, -\sqrt{3} \rangle \cup [\sqrt{3}, +\infty)$, a uvjet $x^2 - 4 < 0$ daje $x \in \langle -2, 2 \rangle$. Presjek je

$$f^{-1}(B) = \langle -2, -\sqrt{3} \rangle \cup [\sqrt{3}, 2).$$

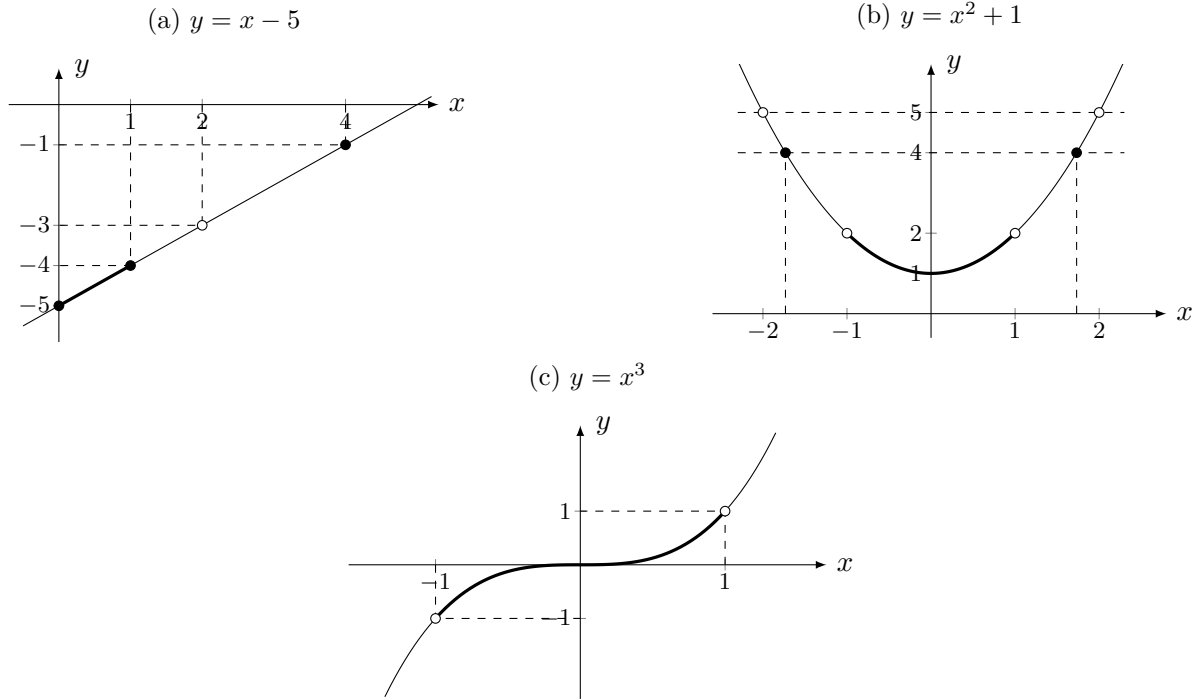
- (c) Funkcija $x \mapsto x^3$ strogo raste i poprima sve realne vrijednosti, pa je $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ i $f(A) = \langle f(-1), f(1) \rangle = \langle -1, 1 \rangle$.

1. način (pomoću grafa). $f^{-1}(B) = \langle -1, 0 \rangle$.

2. način (računski).

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x^3 \leq 0\}.$$

Uvjet $x^3 \leq 0$ daje $x \leq 0$. Uvjet $x^3 > -1$ zapišemo kao $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) > 0$. Kvadratni faktor je uvijek pozitivan (diskriminanta mu je $-3 < 0$, a vodeći koeficijent $1 > 0$), pa je uvjet ekvivalentan s $x > -1$. Dakle, $f^{-1}(B) = \langle -1, 0 \rangle$.



Podobljani dijelovi grafova prikazuju restrikcije na skup A ; puni, odnosno prazni kružići označavaju rubne točke koje pripadaju, odnosno ne pripadaju skupovima $f(A)$ i $f^{-1}(B)$ (i pripadnim dijelovima grafa). $\square$

Zadatak 4.19. Neka je $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. Odredite D_f i $f^{-1}(\langle -\infty, -2 \rangle)$.

Rješenje. Uvjet $x^2 - 1 \neq 0$ daje $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Po definiciji praslike

$$f^{-1}(\langle -\infty, -2 \rangle) = \{x \in D_f \mid f(x) < -2\} = \left\{x \in D_f \mid \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} < -2\right\}.$$

Rješavamo nejednadžbu:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} + 2 < 0 \iff \frac{x^2 + 1 + 2x^2 - 2}{x^2 - 1} < 0 \iff \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 1} < 0.$$

Brojnik ima nultočke $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, a nazivnik ± 1 ; oba su kvadratna izraza s otvorom prema gore. Tablica predznaka:

x	$\langle -\infty, -1 \rangle$	$\langle -1, -\frac{1}{\sqrt{3}} \rangle$	$\langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle$	$\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 \rangle$	$\langle 1, +\infty \rangle$
$3x^2 - 1$	+	+	-	+	+
$x^2 - 1$	+	-	-	-	+
$\frac{3x^2 - 1}{x^2 - 1}$	+	-	+	-	+

Dakle,

$$f^{-1}(\langle -\infty, -2 \rangle) = \langle -1, -\frac{1}{\sqrt{3}} \rangle \cup \langle \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 \rangle.$$

$\square$

Zadatak 4.20. Odredite prirodnu domenu i sliku funkcije $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$. Je li f injekcija na prirodnoj domeni? Odredite $f(\langle 1, +\infty \rangle)$ i $f(\langle -1, 0 \rangle)$.

Rješenje. Prirodna domena je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Vrijedi

$$f(x) = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

Slika. Neka je $y = 1 - \frac{2}{x+1}$. Tada je $\frac{2}{x+1} = 1 - y$, što je moguće samo za $y \neq 1$, i tada

$$x+1 = \frac{2}{1-y}, \quad x = \frac{2}{1-y} - 1.$$

Dakle, $(\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{1\})(\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) f(x) = y$, a vrijednost 1 se ne postiže, pa je $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Injektivnost. Iz $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi $1 - \frac{2}{x_1+1} = 1 - \frac{2}{x_2+1}$, pa $\frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{x_2+1}$, tj. $x_1+1 = x_2+1$ i $x_1 = x_2$. Dakle, f je injekcija na D_f .

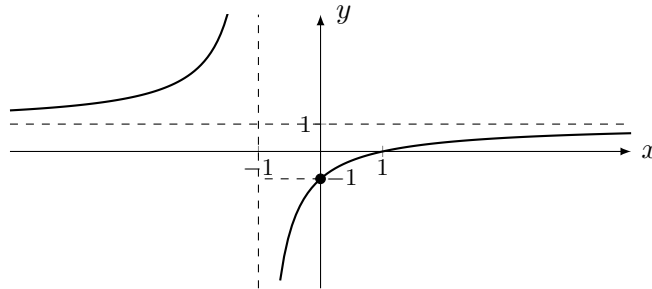
Slike intervala. Budući da je f injekcija, $y \in f(S)$ vrijedi točno kada pripadni jedinstveni $x = \frac{2}{1-y} - 1$ leži u S .

Za $S = \langle 1, +\infty \rangle$:

$$\frac{2}{1-y} - 1 > 1 \iff \frac{2}{1-y} - 2 > 0 \iff \frac{2y}{1-y} > 0 \iff y \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Dakle, $f(\langle 1, +\infty \rangle) = \langle 0, 1 \rangle$.

Za $S = \langle -1, 0] \rangle$ trebaju vrijediti $\frac{2}{1-y} - 1 > -1$ i $\frac{2}{1-y} - 1 \leq 0$. Prvi uvjet glasi $\frac{2}{1-y} > 0$, tj. $y < 1$. Drugi uvjet glasi $\frac{2-1+y}{1-y} \leq 0$, tj. $\frac{y+1}{1-y} \leq 0$, odnosno $y \in \langle -\infty, -1] \cup \langle 1, +\infty \rangle$. Presjek je $\langle -\infty, -1] \rangle$, pa je $f(\langle -1, 0] \rangle = \langle -\infty, -1] \rangle$.



□

Zadatak 4.21. Neka je $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

- (a) Odredite D_f .
- (b) Odredite $f^{-1}(\{4, 6\})$.
- (c) Odredite $f^{-1}([2, 8])$.

Rješenje. (a) Mora biti $x-1 \geq 0$, $x + 2\sqrt{x-1} \geq 0$ i $x - 2\sqrt{x-1} \geq 0$. Iz prvog uvjeta je $x \geq 1$, pa je drugi uvjet automatski ispunjen. Treći uvjet također vrijedi za svaki $x \geq 1$ jer je

$$x - 2\sqrt{x-1} = (x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0.$$

Dakle, $D_f = [1, +\infty)$.

Prije rješavanja preostalih dijelova pojednostavnimo izraz. Budući da je $f(x) \geq 0$, vrijedi $f(x) = \sqrt{f(x)^2}$, pa za $x \in D_f$ imamo

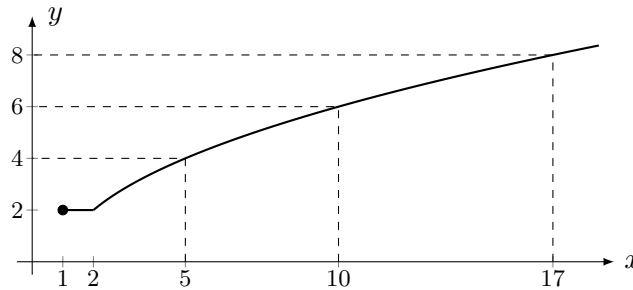
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x + 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} \cdot \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + x - 2\sqrt{x-1}} \\ &= \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} = \sqrt{2x + 2\sqrt{(x-2)^2}} = \sqrt{2x + 2|x-2|} \\ &= \begin{cases} \sqrt{2x - 2x + 4}, & 1 \leq x \leq 2, \\ \sqrt{4x - 4}, & x > 2 \end{cases} = \begin{cases} 2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2\sqrt{x-1}, & x > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Na $[1, 2]$ funkcija je jednaka 2, pa vrijednosti 4 i 6 mogu nastati samo za $x > 2$:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x-1} = 4 &\iff \sqrt{x-1} = 2 \iff x = 5, \\ 2\sqrt{x-1} = 6 &\iff \sqrt{x-1} = 3 \iff x = 10. \end{aligned}$$

Dakle, $f^{-1}(\{4, 6\}) = \{5, 10\}$.

(c) Na $[1, 2]$ je $f(x) = 2 \in [2, 8]$. Za $x > 2$ je $f(x) = 2\sqrt{x-1} > 2$, a uvjet $2\sqrt{x-1} < 8$ daje $\sqrt{x-1} < 4$, tj. $x < 17$. Dakle, $f^{-1}([2, 8]) = [1, 17]$.



□

Zadatak 4.22. Neka je $f(x) = (2 + \sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x-1}$. Odredite $f^{-1}(\{\frac{4}{2-\sqrt{3}}\})$.

Rješenje. Vrijedi $D_f = \mathbb{R}$ i

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{4}{2-\sqrt{3}}\right\}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid (2 + \sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}}\right\}.$$

Budući da je $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$, vrijedi $(2 + \sqrt{3})^a = (2 - \sqrt{3})^{-a}$. Pomnožimo jednadžbu s $(2 - \sqrt{3})^{x^2-2x+1} > 0$:

$$1 + (2 - \sqrt{3})^{2(x^2-2x)} = 4(2 - \sqrt{3})^{x^2-2x}.$$

Uz supstituciju $t = (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x} > 0$ dobivamo $t^2 - 4t + 1 = 0$, pa je

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Iz $t_1 = 2 + \sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^{-1}$ slijedi $x^2 - 2x = -1$, tj. $(x-1)^2 = 0$, pa je $x = 1$. Iz $t_2 = 2 - \sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^1$ slijedi $x^2 - 2x = 1$, tj. $x^2 - 2x - 1 = 0$, pa je $x = 1 \pm \sqrt{2}$. (Pritom koristimo injektivnost eksponencijalne funkcije s bazom $2 - \sqrt{3} \in (0, 1)$.) Dakle,

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{4}{2-\sqrt{3}}\right\}\right) = \{1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}\}.$$

□

Zadatak 4.23. Neka je $f(x) = 5^x - 5^{3-x}$. Odredite $f^{-1}(\langle -\infty, 20 \rangle]$.

Rješenje. Vrijedi $D_f = \mathbb{R}$ i

$$f^{-1}(\langle -\infty, 20 \rangle] = \{x \in \mathbb{R} \mid 5^x - 5^{3-x} \leq 20\}.$$

Pomnožimo nejednadžbu s $5^x > 0$: $5^{2x} - 20 \cdot 5^x - 125 \leq 0$. Uz $t = 5^x$ dobivamo $t^2 - 20t - 125 \leq 0$. Nultočke su

$$t_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 500}}{2} = 10 \pm 15, \quad \text{tj. } t_1 = -5, \quad t_2 = 25,$$

pa je $t \in [-5, 25]$. Kako je $t = 5^x > 0$, uvjet postaje $5^x \leq 25 = 5^2$, tj. $x \leq 2$ (eksponencijalna funkcija s bazom $5 > 1$ strogo raste). Dakle,

$$f^{-1}(\langle -\infty, 20 \rangle] = \langle -\infty, 2 \rangle].$$

□

Zadatak 4.24. Neka je $f: A \rightarrow B$ funkcija, $S, T \subseteq A$ i $E, F \subseteq B$. Dokažite:

- (a) $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$ i $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$;
- (b) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$ i $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$.

Mora li u posljednjoj tvrdnji vrijediti jednakost?

Rješenje. (a) Za svaki $x \in A$ vrijedi

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(E \cup F) &\iff f(x) \in E \cup F \iff f(x) \in E \text{ ili } f(x) \in F \\ &\iff x \in f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F). \end{aligned}$$

Za presjek ponavljamo isti niz ekvivalencija s veznikom „i”.

(b) Imamo redom

$$\begin{aligned} y \in f(S \cup T) &\iff (\exists x \in S \cup T) y = f(x) \iff (\exists x \in S) y = f(x) \text{ ili } (\exists x \in T) y = f(x) \\ &\iff y \in f(S) \cup f(T). \end{aligned}$$

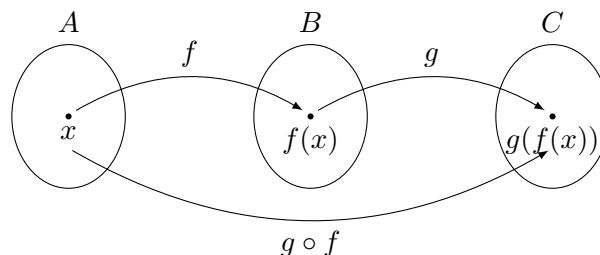
Ako je $y \in f(S \cap T)$, onda je $y = f(x)$ za neki $x \in S \cap T$. Tada je $x \in S$ i $x \in T$, pa je $y \in f(S)$ i $y \in f(T)$, tj. $y \in f(S) \cap f(T)$.

Jednakost u drugoj tvrdnji općenito ne vrijedi. Za $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $S = \{-1\}$ i $T = \{1\}$ vrijedi $f(S \cap T) = f(\emptyset) = \emptyset$, a $f(S) \cap f(T) = \{1\}$. Ako je f injekcija, jednakost vrijedi: iz $y = f(s) = f(t)$, $s \in S$, $t \in T$, slijedi $s = t \in S \cap T$. □

4.4 Kompozicija funkcija

Definicija 4.25. Neka su $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ funkcije. *Kompozicija* funkcija f i g je funkcija $g \circ f: A \rightarrow C$ definirana s

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A.$$



Za definiciju kompozicije dovoljno je da slika funkcije f bude sadržana u domeni funkcije g : ako je $f: A \rightarrow B$, $g: C \rightarrow D$ i $f(A) \subseteq C$ (npr. $B \subseteq C$), onda je $g \circ f: A \rightarrow D$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, dobro definirana funkcija. Ako su f i g zadane formulama na prirodnim domenama, kompozicija je definirana točno za one x iz domene od f za koje je $f(x)$ u domeni od g :

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}.$$

Kompozicija općenito nije komutativna: $f \circ g$ i $g \circ f$ su najčešće različite funkcije.

Zadatak 4.26. Odredite kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$ te prirodne domene i slike tih funkcija ako su f i g zadane na svojim prirodnim domenama:

- (a) $f(x) = x - 2$, $g(x) = 3x + 7$;
 (b) $f(x) = \log_3(9x)$, $g(x) = \left(\frac{1}{27}\right)^{2x+1}$.

Rješenje. (a) Ovdje je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Imamo

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(3x + 7) = (3x + 7) - 2 = 3x + 5, & D_{f \circ g} &= \mathbb{R}, & (f \circ g)(\mathbb{R}) &= \mathbb{R}, \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x - 2) = 3(x - 2) + 7 = 3x + 1, & D_{g \circ f} &= \mathbb{R}, & (g \circ f)(\mathbb{R}) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Slike su $\mathbb{R}$ jer je svaka linearna funkcija $x \mapsto ax + b$ s $a \neq 0$ bijekcija sa $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$.

- (b) Ovdje je $f: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$. Budući da je $g(x) > 0$ za sve x , kompozicija $f \circ g$ definirana je na cijelom $\mathbb{R}$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log_3\left(9 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{2x+1}\right) = \log_3(3^2 \cdot 3^{-3(2x+1)}) = \log_3 3^{-6x-1} = -6x - 1,$$

pa je $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$ i $(f \circ g)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Druga kompozicija definirana je samo za $x \in D_f = \langle 0, +\infty \rangle$ jer je $D_g = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(\log_3(9x)) = \left(\frac{1}{27}\right)^{2\log_3(9x)+1} = 3^{-3(2\log_3(9x)+1)} = 3^{-3} \cdot (3^{\log_3(9x)})^{-6} \\ &= 3^{-3} \cdot (9x)^{-6} = 3^{-3} \cdot 3^{-12} \cdot x^{-6} = 3^{-15} x^{-6}. \end{aligned}$$

Dakle, $D_{g \circ f} = \langle 0, +\infty \rangle$ (uvijek je $D_{g \circ f} \subseteq D_f$!), iako dobivena formula ima smisla i za $x < 0$. Funkcija $x \mapsto x^{-6}$ preslikava $\langle 0, +\infty \rangle$ na $\langle 0, +\infty \rangle$, pa je $(g \circ f)(\langle 0, +\infty \rangle) = \langle 0, +\infty \rangle$. $\square$

Zadatak 4.27 (1. kolokvij 2016.). Zadane su funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ i $g(x) = x^2$.

- (a) Odredite prirodne domene i slike funkcija f i g .
 (b) Za koje x je moguće definirati kompoziciju $f \circ g$, a za koje $g \circ f$?
 (c) Odredite $f \circ g$ i $g \circ f$.

Rješenje. (a) Za f mora biti $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4) \geq 0$, pa je $D_f = \langle -\infty, 1 \rangle \cup [4, +\infty)$. Izraz $x^2 - 5x + 4$ na D_f poprima sve vrijednosti iz $[0, +\infty)$ (već na $[4, +\infty)$ raste od 0 i nije omeđen odozgo), a funkcija $u \mapsto \sqrt{u}$ preslikava $[0, +\infty)$ na $[0, +\infty)$. Dakle, $f(D_f) = [0, +\infty)$.

Za g je $D_g = \mathbb{R}$ i $g(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$.

(b) Kompozicija $f \circ g$ definirana je za one $x \in D_g$ za koje je $g(x) \in D_f$:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1 \text{ ili } x^2 \geq 4\} = \langle -\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty),$$

tj. $f \circ g$ je moguće definirati za $x \in \mathbb{R} \setminus (\langle -2, -1 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle)$. Analogno je $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$. Budući da je $D_g = \mathbb{R}$, kompoziciju $g \circ f$ moguće je definirati za sve $x \in D_f = \langle -\infty, 1] \cup [4, +\infty)$.

(c) Za x iz odgovarajućih domena vrijedi

$$(f \circ g)(x) = f(x^2) = \sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}, \quad (g \circ f)(x) = (\sqrt{x^2 - 5x + 4})^2 = x^2 - 5x + 4.$$

Formula za $g \circ f$ ima smisla na cijelom $\mathbb{R}$, ali je kompozicija definirana samo na D_f . □

Zadatak 4.28. Za $f(x) = x^2 - 4x + 4$ i $g(x) = 3^x$ odredite obje kompozicije i njihove slike.

Rješenje. Obje funkcije definirane su na $\mathbb{R}$, pa su obje kompozicije definirane na $\mathbb{R}$:

$$(f \circ g)(x) = (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 4 = (3^x - 2)^2, \quad (g \circ f)(x) = 3^{(x-2)^2}.$$

Izraz $3^x - 2$ poprima sve vrijednosti iz $\langle -2, +\infty \rangle$, pa njegov kvadrat poprima sve vrijednosti iz $[0, +\infty)$ (za $y \geq 0$ biramo $3^x = 2 + \sqrt{y}$). Dakle, slika funkcije $f \circ g$ je $[0, +\infty)$. Izraz $(x-2)^2$ poprima točno sve vrijednosti iz $[0, +\infty)$, a $u \mapsto 3^u$ strogo raste i preslikava $[0, +\infty)$ na $[1, +\infty)$, pa je slika funkcije $g \circ f$ jednaka $[1, +\infty)$. □

Zadatak 4.29. Neka su $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ funkcije. Dokažite:

- (a) ako su f i g injekcije, onda je i $g \circ f$ injekcija;
- (b) ako su f i g surjekcije, onda je i $g \circ f$ surjekcija;
- (c) ako je $g \circ f$ injekcija, onda je f injekcija;
- (d) ako je $g \circ f$ surjekcija, onda je g surjekcija.

Rješenje. (a) Neka su $x_1, x_2 \in A$ takvi da je $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Tada

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \xrightarrow{g \text{ inj.}} f(x_1) = f(x_2) \xrightarrow{f \text{ inj.}} x_1 = x_2,$$

pa je $g \circ f$ injekcija.

- (b) Neka je $z \in C$ proizvoljan. Jer je g surjekcija, postoji $y \in B$ takav da je $g(y) = z$; jer je f surjekcija, postoji $x \in A$ takav da je $f(x) = y$. Tada je $(g \circ f)(x) = g(y) = z$.
- (c) Dokaz provodimo obratom po kontrapoziciji. Pretpostavimo da f nije injekcija, tj. da postoje $x_1 \neq x_2$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$. Primjenom funkcije g dobivamo $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, tj. $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ uz $x_1 \neq x_2$, pa ni $g \circ f$ nije injekcija.
- (d) Neka je $g \circ f$ surjekcija i neka je $d \in C$ proizvoljan. Tada postoji $a \in A$ takav da je $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = d$. Ako označimo $c = f(a) \in B$, onda je $g(c) = d$. Dakle, za svaki $d \in C$ postoji $c \in B$ takav da je $g(c) = d$, pa je g surjekcija. □

Zadatak 4.30. Neka su $f: X \rightarrow Y$ i $g: Z \rightarrow W$ funkcije takve da je $f(X) \subseteq Z$. Neka je $A \subseteq X$ i $B \subseteq W$. Dokažite:

- (a) $(g \circ f)(A) = g(f(A))$;

$$(b) (g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)).$$

Rješenje. (a) Imamo redom

$$\begin{aligned} z \in (g \circ f)(A) &\iff (\exists x \in A) (g \circ f)(x) = z \iff (\exists x \in A) g(f(x)) = z \\ &\iff (\exists y \in f(A)) g(y) = z \iff z \in g(f(A)). \end{aligned}$$

(b) Imamo redom

$$\begin{aligned} x \in (g \circ f)^{-1}(B) &\iff (g \circ f)(x) \in B \iff g(f(x)) \in B \\ &\iff f(x) \in g^{-1}(B) \iff x \in f^{-1}(g^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Ovdje su sve oznake $^{-1}$ praslike; funkcije ne moraju biti bijekcije. $\square$

4.4.1 Slika pomoću kompozicije

Prethodni zadatak omogućuje određivanje slika i praslika složenijih funkcija: ako je $f = g \circ h$, onda je $f(A) = g(h(A))$ i $f^{-1}(B) = h^{-1}(g^{-1}(B))$.

Zadatak 4.31. Zadanoj funkciji odredite sliku tako da je prikazete kao kompoziciju funkcija:

- (a) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 5x^2 + 6$;
 (b) $f: \langle -1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3|x| + 1$.

Rješenje. (a) Vrijedi $f = g \circ h$, gdje je

$$h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2, \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3).$$

Funkcija h strogo raste na $[0, 1]$, pa je $h([0, 1]) = [0, 1]$. Tjeme parabole Γ_g je u $x = -\frac{5}{2}$, pa g strogo raste na $[0, 1]$ i $g([0, 1]) = [g(0), g(1)] = [6, 12]$. Dakle,

$$f([0, 1]) = (g \circ h)([0, 1]) = g(h([0, 1])) = g([0, 1]) = [6, 12].$$

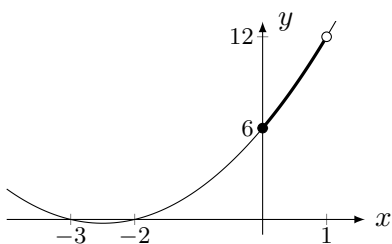
(b) Vrijedi $f = g \circ h$, gdje je

$$h: \langle -1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = |x|, \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x^2 + 3x + 1 = 2(x + 1)(x + \frac{1}{2}).$$

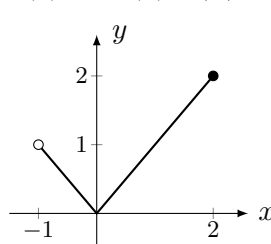
Iz grafa funkcije h vidimo $h(\langle -1, 2]) = [0, 2]$ (vrijednost 0 postiže se u 0, a 2 u 2). Tjeme parabole Γ_g je u $x = -\frac{3}{4}$, pa g strogo raste na $[0, 2]$ i $g([0, 2]) = [g(0), g(2)] = [1, 15]$. Dakle,

$$f(\langle -1, 2]) = g(h(\langle -1, 2])) = g([0, 2]) = [1, 15].$$

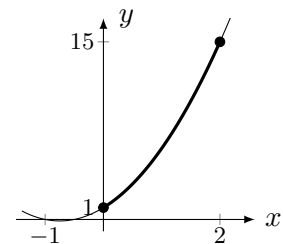
(a) $\Gamma_g, g(x) = x^2 + 5x + 6$



(b) $\Gamma_h, h(x) = |x|$



(b) $\Gamma_g, g(x) = 2x^2 + 3x + 1$



$\square$

Zadatak 4.32. Neka je $f(x) = 4^x - 2^{x+1} - 3$. Odredite $f([0, 2))$ i $f^{-1}(\langle 5, 45 \rangle)$.

Rješenje. Vrijedi $f = g \circ h$, gdje je $h(x) = 2^x$ i $g(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$. Funkcija h strogo raste, pa je $h([0, 2)) = [1, 4)$. Tjeme parabole Γ_g je u $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$, pa g strogo raste na $[1, 4)$; $g(1) = -4$, $g(4) = 5$. Dakle,

$$f([0, 2)) = (g \circ h)([0, 2)) = g(h([0, 2))) = g([1, 4)) = [-4, 5).$$

Za prasluku koristimo zadatak 4.30:

$$f^{-1}(\langle 5, 45 \rangle) = (g \circ h)^{-1}(\langle 5, 45 \rangle) = h^{-1}(g^{-1}(\langle 5, 45 \rangle)).$$

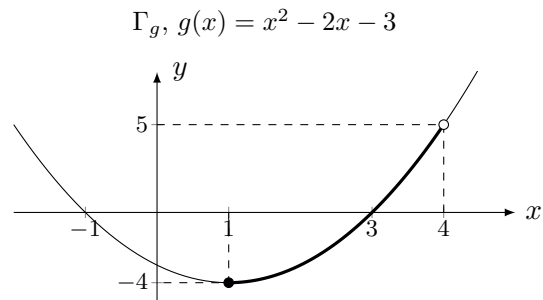
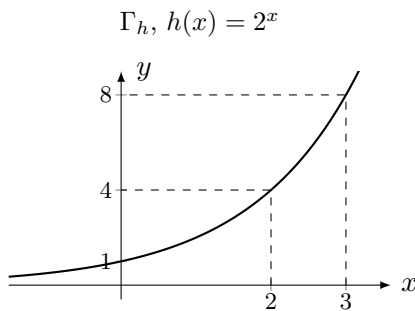
Najprije $g^{-1}(\langle 5, 45 \rangle)$: tražimo $x^2 - 2x - 3 > 5$ i $x^2 - 2x - 3 < 45$, tj. $x^2 - 2x - 8 > 0$ i $x^2 - 2x - 48 < 0$. Nultočke prvog izraza su 4 i -2, a drugog 8 i -6, pa je

$$x \in (\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle) \cap \langle -6, 8 \rangle = \langle -6, -2 \rangle \cup \langle 4, 8 \rangle.$$

Zatim

$$h^{-1}(\langle -6, -2 \rangle \cup \langle 4, 8 \rangle) = h^{-1}(\langle -6, -2 \rangle) \cup h^{-1}(\langle 4, 8 \rangle) = \emptyset \cup \langle 2, 3 \rangle = \langle 2, 3 \rangle,$$

jer je $2^x > 0$ za sve x , a $4 < 2^x < 8$ vrijedi točno za $2 < x < 3$. Dakle, $f^{-1}(\langle 5, 45 \rangle) = \langle 2, 3 \rangle$.



□

4.5 Inverzna funkcija

Definicija 4.33. *Identiteta* na nepraznom skupu A je funkcija $1_A: A \rightarrow A$, $1_A(x) = x$.

Definicija 4.34. Neka je $f: A \rightarrow B$ funkcija. Funkciju $f^{-1}: B \rightarrow A$ takvu da je

$$f \circ f^{-1} = 1_B \quad \text{i} \quad f^{-1} \circ f = 1_A$$

zovemo *inverzna funkcija* funkcije f .

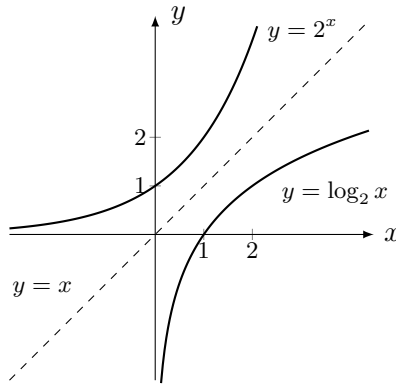
Teorem 4.35. *Funkcija $f: A \rightarrow B$ ima inverznu funkciju ako i samo ako je bijekcija. Tada je*

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x) \quad (x \in A, y \in B),$$

i f^{-1} je također bijekcija. Ako su $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ bijekcije, onda je i $g \circ f$ bijekcija i vrijedi $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Inverz bijekcije f određujemo tako da jednadžbu $y = f(x)$ riješimo po x ; postojanje i jedinstvenost rješenja $x \in A$ za svaki $y \in B$ upravo je bijektivnost.

Napomena 4.36. Grafovi funkcije i njezine inverzne funkcije simetrični su s obzirom na pravac $y = x$: točka (x, y) leži na grafu od f ako i samo ako točka (y, x) leži na grafu od f^{-1} .



Zadatak 4.37. Odredite maksimalne skupove $A, B \subseteq \mathbb{R}$ takve da je s $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ zadana bijekcija $f: A \rightarrow B$. Odredite inverznu funkciju $f^{-1}: B \rightarrow A$.

Rješenje. Očito mora biti $x \neq 2$, tj. $2 \notin A$. Na skupu $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ funkcija je injekcija:

$$\frac{x_1+1}{x_1-2} = \frac{x_2+1}{x_2-2} \Rightarrow x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 2 = x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 2 \Rightarrow 3x_2 = 3x_1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Dakle, $A = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Za surjektivnost rješavamo $y = f(x)$:

$$y = \frac{x+1}{x-2} \iff yx - 2y = x + 1 \iff x(y-1) = 2y+1 \iff x = \frac{2y+1}{y-1},$$

što je moguće samo za $y \neq 1$ (za $y = 1$ dobivamo $0 = 3$). Dobiveni x je različit od 2 jer bi iz $\frac{2y+1}{y-1} = 2$ slijedilo $1 = -2$. Pokazali smo

$$(\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{1\})(\exists! x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}) y = f(x), \quad \text{pri čemu je } x = \frac{2y+1}{y-1}.$$

Dakle, $B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ je bijekcija i

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}.$$

□

Zadatak 4.38. Ispitajte je li funkcija $f(x) = x^4 - 4x^2 - 5$ injekcija na zadanom intervalu i, ako jest, odredite njezinu sliku i inverz:

- (a) $[2, 3]$;
- (b) $[1, 2]$.

Rješenje. Vrijedi $f = g \circ h$, gdje je

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2, \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1).$$

Tjeme parabole Γ_g je u $x = 2$, $g(2) = -9$.

- (a) Restrikcija $h|_{[2,3]}: [2,3] \rightarrow \mathbb{R}$ je injekcija jer h strogo raste na $[2,3]$, i vrijedi $h([2,3]) = [4,9]$. Restrikcija $g|_{[4,9]}$ je injekcija jer g strogo raste na $[4,9]$, i vrijedi $g([4,9]) = [g(4), g(9)] = [-5, 40]$. Zato je

$$f|_{[2,3]} = g|_{[4,9]} \circ h|_{[2,3]}$$

injekcija kao kompozicija injekcija (zadatak 4.29). Ako za kodomene uzmemo slike,

$$h|_{[2,3)}: [2,3) \rightarrow [4,9), \quad g|_{[4,9)}: [4,9) \rightarrow [-5,40)$$

su surjekcije, pa i bijekcije. Stoga je i

$$f|_{[2,3)}: [2,3) \rightarrow f([2,3)) = g(h([2,3))) = g([4,9)) = [-5,40)$$

bijekcija, a slika je $[-5,40)$. Njezin inverz je

$$(f|_{[2,3)})^{-1} = (g|_{[4,9)} \circ h|_{[2,3)})^{-1} = (h|_{[2,3)})^{-1} \circ (g|_{[4,9)})^{-1}.$$

Inverz od $g|_{[4,9)}$. Za $z \in [-5,40)$ tražimo $y \in [4,9)$ takav da je $y^2 - 4y - 5 = z$, tj. $y^2 - 4y - (5+z) = 0$:

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4(5+z)}}{2} = 2 \pm \sqrt{9+z}.$$

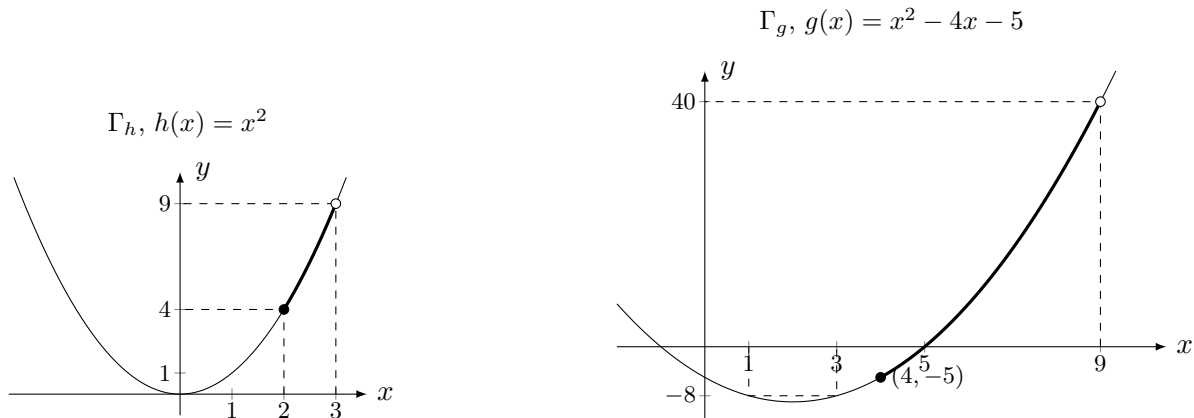
Kako je $y \geq 4$, uzimamo $y = 2 + \sqrt{9+z}$, pa je $(g|_{[4,9)})^{-1}(z) = 2 + \sqrt{9+z}$.

Inverz od $h|_{[2,3)}$. Za $y \in [4,9)$ tražimo $x \in [2,3)$ takav da je $x^2 = y$. Slijedi $|x| = \sqrt{y}$, a zbog $x > 0$ je $x = \sqrt{y}$, pa je $(h|_{[2,3)})^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Konačno, $(f|_{[2,3)})^{-1}: [-5,40) \rightarrow [2,3)$,

$$(f|_{[2,3)})^{-1}(z) = (h|_{[2,3)})^{-1}(2 + \sqrt{9+z}) = \sqrt{2 + \sqrt{9+z}}.$$

- (b) Restrikcija $h|_{[1,2]}$ je injekcija jer je h strogo rastuća na $[1,2]$, i $h([1,2]) = [1,4]$. Međutim, $g|_{[1,4]}$ nije injekcija jer je $g(1) = g(3) = -8$. Zato ni $f|_{[1,2]}$ nije injekcija: vrijedi $f(1) = f(\sqrt{3}) = -8$, a $1 \neq \sqrt{3}$.



Desno je podebljan dio grafa od g nad $[4,9)$; isprekidano su označene jednake vrijednosti $g(1) = g(3) = -8$. $\square$

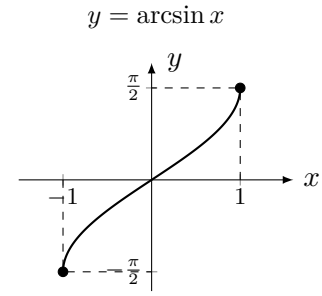
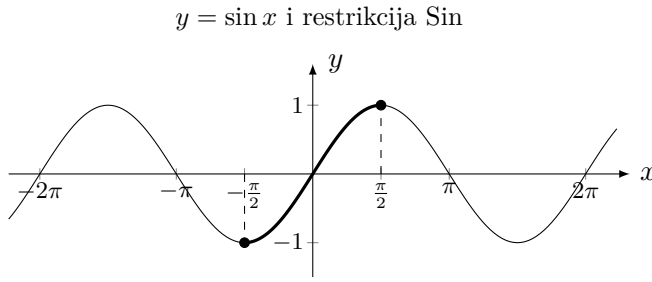
4.5.1 Ciklometrijske (arkus) funkcije

Funkcija $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ nije bijekcija jer nije injekcija; primjerice $\sin(-\pi) = \sin \pi = 0$. No, „sužavanjem” domene na segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dobivamo bijekciju

$$\text{Sin} = \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1],$$

koja prema prethodnom teoremu ima inverznu funkciju

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad (\text{arkus sinus}).$$



Analogno se definiraju arkus kosinus, arkus tangens i arkus kotangens kao inverzi restrikcija

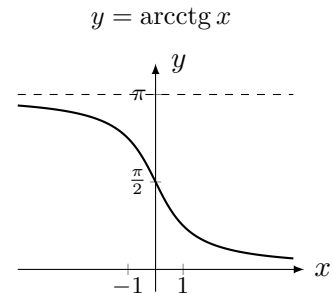
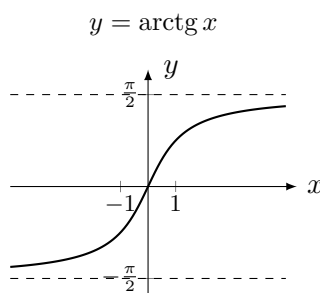
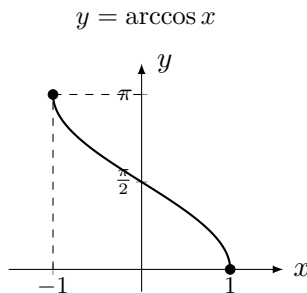
$$\text{Cos} = \cos|_{[0, \pi]}: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], \quad \text{Tg} = \text{tg}|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}: \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\text{Ctg} = \text{ctg}|_{\langle 0, \pi \rangle}: \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ove četiri funkcije jednim imenom zovemo *ciklometrijske funkcije*:

funkcija	domena	slika
arcsin	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
arctg	$\mathbb{R}$	$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
arcctg	$\mathbb{R}$	$\langle 0, \pi \rangle$

Funkcije arcsin i arctg strogo rastu, a arccos i arcctg strogo padaju (vidi zadatak o monotonosti inverza u odjeljku 4.7).



Vrijedi $\arcsin(\sin x) = x$ za $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i $\sin(\arcsin y) = y$ za $y \in [-1, 1]$; analogno za ostale ciklometrijske funkcije.

Zadatak 4.39. Odredite inverzne funkcije sljedećih funkcija (uz prikladne domene i kodomene):

- (a) $f(x) = \frac{2x}{x-4}$;
- (b) $f(x) = (4^{2x+1} + 5)^3$;
- (c) $f(x) = 2 \sin x \cos x$;
- (d) $f(x) = 2 \log_3 x - \log_9 x^2$;
- (e) $f(x) = \sqrt{\arctg(2^x) - 1}$.

Rješenje. U svakom dijelu rješavamo jednadžbu $y = f(x)$ po x , a zatim varijable preimenujemo kako bismo inverz zapisali kao funkciju varijable x .

(a) Za $x \neq 4$:

$$y = \frac{2x}{x-4} \iff xy - 4y = 2x \iff x(y-2) = 4y \iff x = \frac{4y}{y-2} \quad (y \neq 2).$$

Za $y = 2$ rješenja nema, a za $y \neq 2$ dobiveni x je jedinstven i različit od 4. Dakle, $f: \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ je bijekcija i

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{4\}, \quad f^{-1}(x) = \frac{4x}{x-2}.$$

(b) Domena je $\mathbb{R}$. Kako 4^{2x+1} poprima sve vrijednosti iz $\langle 0, +\infty \rangle$, slika funkcije je $\langle 125, +\infty \rangle$. Za $y > 125$:

$$y = (4^{2x+1} + 5)^3 \iff 4^{2x+1} + 5 = \sqrt[3]{y} \iff 4^{2x+1} = \sqrt[3]{y} - 5 \iff 2x+1 = \log_4(\sqrt[3]{y} - 5).$$

Dakle, $x = \frac{1}{2}(\log_4(\sqrt[3]{y} - 5) - 1)$, pa je $f: \mathbb{R} \rightarrow \langle 125, +\infty \rangle$ bijekcija i

$$f^{-1}: \langle 125, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_4(\sqrt[3]{x} - 5) - \frac{1}{2}.$$

(c) Vrijedi $f(x) = \sin 2x$. Na $\mathbb{R}$ ta funkcija nije injekcija, ali njezina restrikcija na $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ bijektivno preslikava taj segment na $[-1, 1]$ (jer je tada $2x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). Za $y \in [-1, 1]$:

$$y = \sin 2x \iff 2x = \arcsin y \iff x = \frac{1}{2} \arcsin y.$$

Dakle, $(f|_{[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]})^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $(f|_{[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]})^{-1}(x) = \frac{1}{2} \arcsin x$.

(d) Prirodna domena je $\langle 0, +\infty \rangle$. Za $x > 0$ vrijedi

$$\log_9 x^2 = \frac{\log_3 x^2}{\log_3 9} = \frac{2 \log_3 x}{2} = \log_3 x,$$

pa je $f(x) = 2 \log_3 x - \log_3 x = \log_3 x$. Iz $y = \log_3 x$ slijedi $x = 3^y$. Dakle, $f: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je bijekcija i $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$, $f^{-1}(x) = 3^x$.

(e) Prirodna domena: $\operatorname{arctg}(2^x) \geq 1$, tj. $2^x \geq \operatorname{tg} 1$ (jer tg strogo raste na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ i $1 < \frac{\pi}{2}$), odnosno $x \geq \log_2(\operatorname{tg} 1)$. Na toj domeni f strogo raste kao kompozicija strogo rastućih funkcija. Kako je $\operatorname{arctg}(2^x) \in [1, \frac{\pi}{2})$ za $x \geq \log_2(\operatorname{tg} 1)$, slika je $[0, \sqrt{\pi/2 - 1})$. Za y iz slike:

$$\begin{aligned} y = \sqrt{\operatorname{arctg}(2^x) - 1} &\iff y^2 + 1 = \operatorname{arctg}(2^x) \\ &\iff 2^x = \operatorname{tg}(y^2 + 1) \iff x = \log_2(\operatorname{tg}(y^2 + 1)), \end{aligned}$$

pri čemu je $y^2 + 1 \in [1, \frac{\pi}{2})$, pa je $\operatorname{tg}(y^2 + 1) > 0$. Dakle,

$$f^{-1}: [0, \sqrt{\pi/2 - 1}) \rightarrow [\log_2(\operatorname{tg} 1), +\infty), \quad f^{-1}(x) = \log_2(\operatorname{tg}(x^2 + 1)).$$

□

4.6 Svojstva funkcija: parnost i omeđenost

4.6.1 Parnost

Definicija 4.40. Neka je f funkcija takva da za svaki $x \in D_f$ vrijedi i $-x \in D_f$. Kažemo da je f

- *parna* ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi $f(-x) = f(x)$;
- *neparna* ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi $f(-x) = -f(x)$.

Graf parne funkcije simetričan je s obzirom na os y , a graf neparne funkcije s obzirom na ishodište. Ako domena nije simetrična s obzirom na 0, funkcija nije ni parna ni neparna. Da funkcija nije parna (neparna), dokazujemo protuprimjerom, tj. jednim $x \in D_f$ za koji jednakost ne vrijedi.

Zadatak 4.41. Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ parna, a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neparna funkcija. Dokažite da su $f \circ g$ i $g \circ f$ parne funkcije.

Rješenje. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned}(f \circ g)(-x) &= f(g(-x)) \stackrel{g \text{ nep.}}{=} f(-g(x)) \stackrel{f \text{ parna}}{=} f(g(x)) = (f \circ g)(x), \\(g \circ f)(-x) &= g(f(-x)) \stackrel{f \text{ parna}}{=} g(f(x)) = (g \circ f)(x).\end{aligned}$$

U drugom računu nije korištena neparnost funkcije g . □

Zadatak 4.42. Ispitajte parnost sljedećih funkcija:

- $f(x) = |x - 4| + |x + 4|$;
- $f(x) = \frac{\cos x^5}{x} + \frac{\sin x^{10}}{x}$;
- $f(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x - 1}{x}$;
- $f(x) = \ln \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$.

Rješenje. (a) $D_f = \mathbb{R}$ i

$$f(-x) = |-x - 4| + |-x + 4| = |-(x + 4)| + |-(x - 4)| = |x + 4| + |x - 4| = f(x),$$

pa je f parna.

(b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je simetrična i

$$f(-x) = \frac{\cos((-x)^5)}{-x} + \frac{\sin((-x)^{10})}{-x} = \frac{\cos(-x^5)}{-x} + \frac{\sin x^{10}}{-x} = -\frac{\cos x^5}{x} - \frac{\sin x^{10}}{x} = -f(x),$$

jer je kosinus parna funkcija. Dakle, f je neparna.

(c) $D_f = \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$ je simetrična. Zbog neparnosti tangensa

$$f(-x) = \frac{2 \operatorname{tg}(-x) - 1}{-x} = \frac{-2 \operatorname{tg} x - 1}{-x} = \frac{2 \operatorname{tg} x + 1}{x}.$$

Općenito je $f(-x) \neq f(x)$ i $f(-x) \neq -f(x)$; primjerice za $x = \frac{\pi}{4}$ imamo $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{4}{\pi}$ i $f(-\frac{\pi}{4}) = \frac{12}{\pi}$. Dakle, f nije ni parna ni neparna.

(d) Argument logaritma je pozitivan točno kada je $-1 < \sin 2x < 1$ (jer je $|\sin 2x| \leq 1$), tj. kada je $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; ta je domena simetrična. Zbog neparnosti sinusa

$$f(-x) = \ln \frac{1 + \sin(-2x)}{1 - \sin(-2x)} = \ln \frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x} = \ln \left(\frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} \right)^{-1} = -\ln \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} = -f(x),$$

pa je f neparna. □

4.6.2 Omeđenost

Definicija 4.43. Funkcija $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ je

- *omeđena odozdo* ako $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in D_f) m \leq f(x)$;
- *omeđena odozgo* ako $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in D_f) f(x) \leq M$.

Funkcija je *omeđena* ako je omeđena odozdo i odozgo.

Brojeve m i M ne moramo birati optimalno: dovoljno je pronaći bilo koju donju, odnosno gornju među.

Zadatak 4.44. Ispitajte omeđenost sljedećih funkcija:

- (a) $f(x) = 5 \sin(\pi x + \sqrt{2})$;
- (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$;
- (c) $f(x) = -3^{-x+2}$;
- (d) $f(x) = \frac{3x^2}{4 + x^2}$;
- (e) $f(x) = \arcsin \frac{x+2}{x-1} + \sqrt{1-x^2}$;
- (f) $f(x) = \log \frac{3x+2}{2-3x}$.

Rješenje. (a) Iz $-1 \leq \sin(\pi x + \sqrt{2}) \leq 1$ slijedi $-5 \leq f(x) \leq 5$, pa je f omeđena ($m = -5$, $M = 5$).

(b) Domena je određena uvjetom $-x^2 + 4x - 3 = (x-1)(3-x) > 0$, tj. $D_f = \langle 1, 3 \rangle$. Vrijedi

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \sqrt{-x^2 + 4x - 4 + 1} = \sqrt{1 - (x-2)^2} \leq 1,$$

pa je $f(x) \geq 1$ i f je omeđena odozdo ($m = 1$). Nadalje, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$: ako je x „blizu” 1 ili 3, nazivnik je „blizu” 0, pa je $f(x)$ „jako velik”. Precizno: za bilo koji $M \geq 1$ broj $x = 2 + \sqrt{1 - 1/M^2}$ pripada intervalu $[2, 3)$ i vrijedi $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1/M^2}} = M$. Dakle, f poprima proizvoljno velike vrijednosti i nije omeđena odozgo.

(c) Kako je $3^{-x+2} > 0$, vrijedi $f(x) < 0$, pa je f omeđena odozgo ($M = 0$). Nadalje, $f(x) = -9 \cdot 3^{-x} = -9 \cdot (\frac{1}{3})^x$, a eksponencijalna funkcija $x \mapsto (\frac{1}{3})^x$ nije omeđena odozgo (npr. $(\frac{1}{3})^{-n} = 3^n \geq n$ za $n \in \mathbb{N}$). Zato f nije omeđena odozdo: $f(-n) = -9 \cdot 3^n \leq -9n$.

(d) 1. *način.* Očito je $f(x) \geq 0$. Za $x \neq 0$ vrijedi $f(x) = \frac{3x^2}{4+x^2} < \frac{3x^2}{x^2} = 3$, a $f(0) = 0 < 3$. Dakle, $0 \leq f(x) \leq 3$ i f je omeđena ($m = 0$, $M = 3$).

2. *način.* $f(x) = \frac{3x^2+12-12}{x^2+4} = 3 - \frac{12}{x^2+4}$. Kako je $\frac{12}{x^2+4} > 0$, slijedi $f(x) < 3$, a uz $f(x) \geq 0$ funkcija je omeđena.

(e) Za svaki x iz domene vrijedi

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x+2}{x-1} \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1.$$

Zbrajanjem dobivamo $-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2} + 1$, pa je f omeđena ($m = -\frac{\pi}{2}$, $M = \frac{\pi}{2} + 1$). (Domena je $[-1, -\frac{1}{2}]$, ali za omeđenost je ne moramo odrediti.)

(f) Odredimo sliku funkcije f . Vrijedi

$$\frac{3x+2}{2-3x} = \frac{3x-2+4}{2-3x} = -1 + \frac{4}{2-3x},$$

pa funkcija $x \mapsto \frac{3x+2}{2-3x}$ poprima sve realne vrijednosti osim -1 , posebno sve vrijednosti iz $\langle 0, +\infty \rangle$ (za $t > 0$ uzmemo $x = \frac{2(t-1)}{3(t+1)}$). Funkcija $x \mapsto \log x$ preslikava $\langle 0, +\infty \rangle$ na $\mathbb{R}$, pa je slika funkcije f jednaka $\mathbb{R}$. Dakle, f nije omeđena ni odozdo ni odozgo.

□

4.7 Monotonost

Definicija 4.45. Neka je f realna funkcija i $I \subseteq D_f$. Kažemo da funkcija f

- *raste* na I ako $(\forall x_1, x_2 \in I) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$;
- *strogo raste* na I ako $(\forall x_1, x_2 \in I) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$;
- *pada* na I ako $(\forall x_1, x_2 \in I) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$;
- *strogo pada* na I ako $(\forall x_1, x_2 \in I) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

Funkcija koja raste ili pada je *monotona*, a ona koja strogo raste ili strogo pada je *strogo monotona*. Govorimo i o rastućoj, strogo rastućoj, padajućoj i strogo padajućoj funkciji.

U definiciji rasta i pada može se ekvivalentno pisati $x_1 \leq x_2$ umjesto $x_1 < x_2$ jer za $x_1 = x_2$ nejednakosti $f(x_1) \leq f(x_2)$ i $f(x_1) \geq f(x_2)$ trivijalno vrijede.

Zadatak 4.46. Neka je $f: A \rightarrow B$ strogo rastuća funkcija, $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Dokažite da za $x_1, x_2 \in A$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2).$$

Rješenje. Implikacija $(\Rightarrow)$ je definicija stroge rasta.

$(\Leftarrow)$ Neka su $x_1, x_2 \in A$ takvi da je $f(x_1) < f(x_2)$. Pretpostavimo suprotno, da ne vrijedi $x_1 < x_2$, tj. da je $x_1 \geq x_2$. Tada:

1° ako je $x_1 = x_2$, onda je $f(x_1) = f(x_2)$;

2° ako je $x_1 > x_2$, onda je $f(x_1) > f(x_2)$ jer f strogo raste.

U oba slučaja je $f(x_1) \geq f(x_2)$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. □

Zadatak 4.47. Pokažite da je svaka strogo monotona funkcija injekcija.

Rješenje. Neka je $f: A \rightarrow B$ strogo rastuća i neka su $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$. Tada imamo dvije mogućnosti:

1° $x_1 < x_2$, pa je $f(x_1) < f(x_2)$;

2° $x_2 < x_1$, pa je $f(x_2) < f(x_1)$.

U oba slučaja je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Pokazali smo $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, što je definicija injektivnosti. Za strogo padajuću funkciju dokaz je analogan. □

Zadatak 4.48. Neka je $f: A \rightarrow B$ strogo rastuća bijekcija, $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Pokažite da je i $f^{-1}: B \rightarrow A$ strogo rastuća.

Rješenje. Neka su $y_1, y_2 \in B$, $y_1 < y_2$. Pretpostavimo suprotno, da je $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Budući da f strogo raste, pa posebno i raste, slijedi

$$f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)).$$

Kako je $f \circ f^{-1} = 1_B$, to znači $y_1 \geq y_2$, što je kontradikcija. Dakle, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Analogno se dokazuje da je inverz strogo padajuće bijekcije strogo padajući. $\square$

Zadatak 4.49. Bez upotrebe derivacija odredite intervale monotonosti sljedećih funkcija:

- (a) $f(x) = 2^{2x+4}$;
- (b) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 + 1)$;
- (c) $f(x) = \frac{3x+7}{x+2}$;
- (d) $f(x) = |2^x - 4|$.

Rješenje. (a) $D_f = \mathbb{R}$. Za $x_1 < x_2$ vrijedi

$$2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 4 < 2x_2 + 4 \Rightarrow 2^{2x_1+4} < 2^{2x_2+4} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

jer eksponencijalna funkcija s bazom većom od 1 strogo raste. Dakle, f strogo raste na cijeloj domeni.

(b) $D_f = \mathbb{R}$. Logaritamska funkcija s bazom $\frac{1}{5} < 1$ strogo pada.

1° Za $0 \leq x_1 < x_2$ vrijedi $x_1^2 < x_2^2$, pa $x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1$ i stoga $\log_{\frac{1}{5}}(x_1^2 + 1) > \log_{\frac{1}{5}}(x_2^2 + 1)$.

2° Za $x_1 < x_2 \leq 0$ vrijedi $x_1^2 > x_2^2$, pa $x_1^2 + 1 > x_2^2 + 1$ i stoga $\log_{\frac{1}{5}}(x_1^2 + 1) < \log_{\frac{1}{5}}(x_2^2 + 1)$.

Dakle, f strogo raste na $\langle -\infty, 0 \rangle$ i strogo pada na $[0, +\infty)$.

(c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ i

$$f(x) = \frac{3x+6+1}{x+2} = 3 + \frac{1}{x+2}.$$

Neka su $x_1 < x_2$ s iste strane točke -2 , tj. oba u $\langle -\infty, -2 \rangle$ ili oba u $\langle -2, +\infty \rangle$. Tada su $x_1 + 2$ i $x_2 + 2$ istog predznaka i $0 < x_1 + 2 < x_2 + 2$ ili $x_1 + 2 < x_2 + 2 < 0$; u oba slučaja $\frac{1}{x_1+2} > \frac{1}{x_2+2}$, pa je $f(x_1) > f(x_2)$. Dakle, f strogo pada na $\langle -\infty, -2 \rangle$ i strogo pada na $\langle -2, +\infty \rangle$.

Funkcija *ne pada* na cijeloj domeni $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -2, +\infty \rangle$: primjerice $-3 < -1$, ali $f(-3) = 2 < 4 = f(-1)$.

(d) Vrijedi

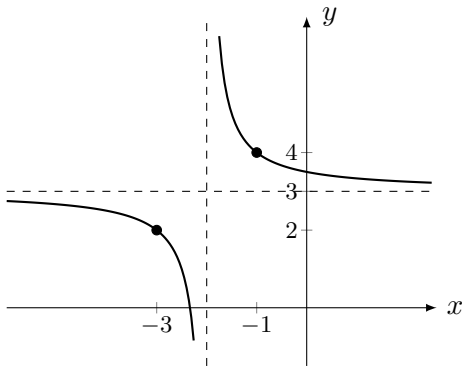
$$f(x) = |2^x - 4| = \begin{cases} 2^x - 4, & 2^x - 4 \geq 0 \iff 2^x \geq 4 \iff x \geq 2, \\ -2^x + 4, & 2^x - 4 < 0 \iff x < 2. \end{cases}$$

1° Za $2 \leq x_1 < x_2$ vrijedi $2^{x_1} < 2^{x_2}$, pa $2^{x_1} - 4 < 2^{x_2} - 4$, tj. $f(x_1) < f(x_2)$.

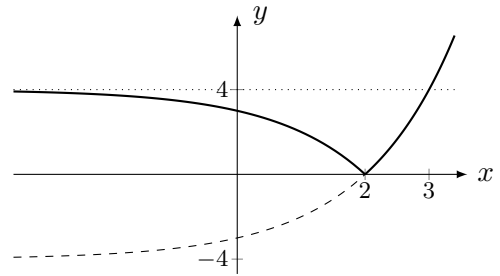
2° Za $x_1 < x_2 \leq 2$ vrijedi $2^{x_1} < 2^{x_2}$, pa $-2^{x_1} + 4 > -2^{x_2} + 4$, tj. $f(x_1) > f(x_2)$.

Dakle, f strogo pada na $\langle -\infty, 2 \rangle$ i strogo raste na $[2, +\infty)$. Graf dobivamo tako da dio grafa funkcije $x \mapsto 2^x - 4$ ispod osi x zrcalimo preko te osi.

(c) $y = 3 + \frac{1}{x+2}$



(d) $y = |2^x - 4|$



Na grafu (d) isprekidano je prikazan dio grafa funkcije $x \mapsto 2^x - 4$ koji se zrcali, a točkasto asimptota $y = 4$. □

4.8 Zadaci za samostalan rad

4.1. Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \log_{16-x^2}(x-1)$.

4.2. Za $f(x) = x^2 - 2x$ odredite $f([0, 3])$ i $f^{-1}([0, 3])$.

4.3. Dokažite da je $f: [2, +\infty) \rightarrow [-3, +\infty)$, $f(x) = (x-2)^2 - 3$, bijekcija i odredite f^{-1} .

4.4. Neka je $f: A \rightarrow B$, $S \subseteq A$ i $T \subseteq B$. Dokažite $S \subseteq f^{-1}(f(S))$ i $f(f^{-1}(T)) = T \cap f(A)$. Pokažite primjerom da u prvoj tvrdnji ne mora vrijediti jednakost.

4.5. Ispitajte parnost i omeđenost funkcije $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

4.6. Odredite intervale monotonosti funkcije $f(x) = |x^2 - 4|$.

4.7. Za $f(x) = \sqrt{x-1}$ i $g(x) = \frac{1}{x-2}$ odredite $f \circ g$ i $g \circ f$ te njihove prirodne domene.

4.8. Ispitajte parnost funkcije $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

4.9. Odredite prirodnu domenu i sliku funkcije $f(x) = \arcsin(2x-1)$ te njezinu inverznu funkciju.

Poglavlje 5

Jednadžbe i nejednadžbe

Pri određivanju domena, slika i praslika funkcija već smo rješavali razne jednadžbe i nejednadžbe. U ovom poglavlju dodatno uvježbavamo njihovo rješavanje.

5.1 Ekvivalentni prijelazi

Pri rješavanju jednadžbi i nejednadžbi u svakom koraku treba znati je li novi zapis *ekvivalentan* prethodnom (ima isti skup rješenja) ili iz njega samo *slijedi*. U drugom slučaju skup rješenja može se povećati, pa dobivene kandidate moramo provjeriti uvrštavanjem u početnu jednadžbu ili ih presjeći s uvjetima.

Napomena 5.1.

- Na početku zapisujemo *uvjete*: za koje su vrijednosti nepoznanice definirani svi izrazi u zadatku (nazivnici različiti od nule, izrazi pod parnim korijenom nenegativni, argumenti logaritama pozitivni, baze logaritama pozitivne i različite od 1).
- Množenjem jednadžbe izrazom koji je na promatranom skupu različit od nule dobivamo ekvivalentnu jednadžbu.
- Jednadžbu ne smijemo dijeliti izrazom koji može biti jednak nuli: tako možemo izgubiti rješenja. Takav slučaj razmatramo zasebno.
- Nejednakost smijemo pomnožiti pozitivnim brojem; množenje negativnim brojem mijenja smjer nejednakosti. Ne smijemo je množiti izrazom čiji predznak ne znamo.
- Kvadriranje jednadžbe općenito nije ekvivalentan prijelaz (iz $A = B$ slijedi $A^2 = B^2$, ali ne i obratno), pa kandidate nakon kvadriranja treba provjeriti. Kubiranje, međutim, jest ekvivalentan prijelaz jer je $t \mapsto t^3$ bijekcija s $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$.

Napomena 5.2 (Primjena monotone funkcije na nejednakost). Neka su x, y iz skupa I na kojem je funkcija f definirana.

- Ako je f strogo rastuća na I , onda vrijedi $x < y \iff f(x) < f(y)$ i $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$: primjenom funkcije f na obje strane smjer nejednakosti se ne mijenja.
- Ako je f strogo padajuća na I , onda vrijedi $x < y \iff f(x) > f(y)$ i $x \leq y \iff f(x) \geq f(y)$: smjer nejednakosti se mijenja.

Ako f na skupu kojem pripadaju obje strane nije monotona, iz $x \leq y$ općenito ne možemo ništa zaključiti o odnosu $f(x)$ i $f(y)$.

Posebno, funkcija $t \mapsto t^2$ strogo pada na $\langle -\infty, 0]$, a strogo raste na $[0, +\infty)$, ali na $\mathbb{R}$ nije monotona. Zato nejednakost smijemo kvadrirati (i dobiti ekvivalentnu nejednakost) *samo ako su obje strane nenegativne*. Primjerice, $-3 < 2$, ali $9 > 4$. Slično, eksponencijalna i logaritamska funkcija s bazom većom od 1 strogo rastu, a s bazom iz $\langle 0, 1 \rangle$ strogo padaju.

5.2 Racionalne jednadžbe, parametri i apsolutne vrijednosti

Zadatak 5.3. Riješite jednadžbu

$$\frac{7}{x^2 - 1} + \frac{8}{x^2 - 2x + 1} = \frac{25 - 9x}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

Rješenje. Nakon faktorizacije nazivnika jednadžba glasi

$$\frac{7}{(x-1)(x+1)} + \frac{8}{(x-1)^2} = \frac{25-9x}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Rješenje mora zadovoljavati uvjet $x \neq \pm 1$. Uz taj uvjet izraz $(x-1)^2(x+1)$ različit je od nule, pa množenjem njime dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$7(x-1) + 8(x+1) = 25-9x \iff 15x+1 = 25-9x \iff 24x = 24 \iff x = 1.$$

Broj $x = 1$ ne zadovoljava uvjet $x \neq \pm 1$, pa jednadžba nema rješenja. □

Zadatak 5.4. U ovisnosti o parametrima $a, b \in \mathbb{R}$ riješite jednadžbu

$$x(a-x) + (b-x)^2 = a + b^2 - 4.$$

Rješenje. Raspisivanjem lijeve strane dobivamo $ax - x^2 + b^2 - 2bx + x^2 = a + b^2 - 4$, odnosno

$$(a-2b)x = a-4.$$

Kod linearne jednadžbe oblika $kx = l$ ne smijemo odmah dijeliti s k , nego razlikujemo slučajeve.

1° Ako je $a-2b \neq 0$, tj. $a \neq 2b$, jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \frac{a-4}{a-2b}$.

2° Ako je $a-2b = 0$, tj. $a = 2b$, jednadžba glasi $0 \cdot x = a-4$.

- Ako je pritom $a \neq 4$, jednadžba nema rješenja (lijeva je strana 0, a desna različita od nule).
- Ako je $a = 4$ (tada je $b = 2$), jednadžba glasi $0 \cdot x = 0$, pa je svaki $x \in \mathbb{R}$ rješenje.

Sažeto:

uvjet na parametre	skup rješenja
$a \neq 2b$	$\left\{ \frac{a-4}{a-2b} \right\}$
$a = 2b, a \neq 4$	$\emptyset$
$a = 4, b = 2$	$\mathbb{R}$

□

Zadatak 5.5. Riješite jednadžbu

$$\left| x + \left| \frac{1}{2}x + \left| \frac{1}{3}x - 1 \right| \right| \right| = 1.$$

Rješenje. Apsolutne vrijednosti uklanjamo redom, počevši od najdublje. Rješavanje dijelimo na dva slučaja prema predznaku izraza $\frac{1}{3}x - 1$.

1° $\frac{1}{3}x - 1 \geq 0$, tj. $x \geq 3$. Tada jednadžba glasi

$$\left| x + \left| \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x - 1 \right| \right| = 1, \quad \text{tj.} \quad \left| x + \left| \frac{5}{6}x - 1 \right| \right| = 1.$$

Za $x \geq 3$ vrijedi $\frac{5}{6}x - 1 \geq \frac{5}{6} \cdot 3 - 1 = \frac{3}{2} > 0$, pa jednadžba postaje

$$\left| x + \frac{5}{6}x - 1 \right| = 1 \iff \left| \frac{11}{6}x - 1 \right| = 1 \iff \frac{11}{6}x - 1 = \pm 1.$$

Dobivamo $x = 0$ ili $x = \frac{12}{11}$, ali nijedan od tih brojeva ne zadovoljava $x \geq 3$. U ovom slučaju nema rješenja.

2° $\frac{1}{3}x - 1 < 0$, tj. $x < 3$. Tada je $\left| \frac{1}{3}x - 1 \right| = -\frac{1}{3}x + 1$, pa jednadžba glasi

$$\left| x + \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x + 1 \right| \right| = 1, \quad \text{tj.} \quad \left| x + \left| \frac{1}{6}x + 1 \right| \right| = 1.$$

2.1° Ako je $\frac{1}{6}x + 1 \geq 0$, tj. $x \geq -6$ (uz $x < 3$ to je $-6 \leq x < 3$), jednadžba postaje

$$\left| x + \frac{1}{6}x + 1 \right| = 1 \iff \frac{7}{6}x + 1 = \pm 1,$$

pa je $x = 0$ ili $x = -\frac{12}{7}$. Oba broja pripadaju intervalu $[-6, 3)$, pa su to rješenja.

2.2° Ako je $\frac{1}{6}x + 1 < 0$, tj. $x < -6$, jednadžba postaje

$$\left| x - \frac{1}{6}x - 1 \right| = 1 \iff \frac{5}{6}x - 1 = \pm 1,$$

pa je $x = \frac{12}{5}$ ili $x = 0$. Nijedan od tih brojeva nije manji od -6 , pa ovdje nema rješenja.

Rješenja jednadžbe su $x_1 = 0$ i $x_2 = -\frac{12}{7}$. □

5.3 Iracionalne jednadžbe

Zadatak 5.6. Riješite jednadžbu $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$.

Rješenje. Uvjeti su $x^4 - x^2 \geq 0$ i $1 - \sqrt{x^4 - x^2} \geq 0$. Umjesto da ih raspisujemo (to bi bilo predugo), kvadriramo i na kraju dobivene kandidate provjerimo uvrštavanjem u početnu jednadžbu. Kvadriranjem dobivamo

$$1 - \sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x + 1, \quad \text{tj.} \quad \sqrt{x^4 - x^2} = 2x - x^2.$$

Ponovnim kvadriranjem slijedi

$$x^4 - x^2 = 4x^2 - 4x^3 + x^4 \iff 4x^3 - 5x^2 = 0 \iff x^2(4x - 5) = 0,$$

pa su kandidati $x = 0$ i $x = \frac{5}{4}$. Kako kvadriranje nije ekvivalentan prijelaz, kandidate provjeravamo:

- za $x = 0$ lijeva je strana $\sqrt{1 - \sqrt{0}} = 1$, a desna $0 - 1 = -1$, pa $x = 0$ nije rješenje;
- za $x = \frac{5}{4}$ vrijedi $x^4 - x^2 = \frac{625}{256} - \frac{25}{16} = \frac{25 \cdot 9}{256}$, pa je lijeva strana

$$\sqrt{1 - \sqrt{\frac{25 \cdot 9}{256}}} = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - 1.$$

Jedinstveno rješenje jednadžbe je $x = \frac{5}{4}$.

Do istog zaključka dolazimo i bez provjere, ako pratimo uvjete: lijeva je strana nenegativna, pa mora biti $x - 1 \geq 0$, a nakon prvog kvadriranja i $2x - x^2 \geq 0$; zajedno $1 \leq x \leq 2$, što isključuje $x = 0$. $\square$

Zadatak 5.7. U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ riješite jednadžbu

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}.$$

Rješenje. Treći korijen definiran je na cijelom $\mathbb{R}$, pa nema uvjeta. Funkcija $t \mapsto t^3$ je bijekcija, pa kubiranjem dobivamo ekvivalentnu jednadžbu:

$$a+x + 3\sqrt[3]{(a+x)^2(a-x)} + 3\sqrt[3]{(a+x)(a-x)^2} + a-x = 2a,$$

odnosno

$$3\sqrt[3]{(a+x)(a-x)} (\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x}) = 0.$$

Umnožak je nula ako i samo ako je barem jedan faktor nula.

$$1^\circ \sqrt[3]{(a+x)(a-x)} = 0 \iff a+x=0 \text{ ili } a-x=0 \iff x=\pm a.$$

$$2^\circ \sqrt[3]{a+x} = -\sqrt[3]{a-x} \iff a+x = -(a-x) \iff a = -a \iff a = 0. \text{ Ovaj uvjet ne ovisi o } x: \text{ za } a=0 \text{ ispunjen je za svaki } x \in \mathbb{R}, \text{ a za } a \neq 0 \text{ ni za jedan } x.$$

Diskusija: ako je $a \neq 0$, jednadžba ima dva rješenja, $x_1 = a$ i $x_2 = -a$; ako je $a = 0$, svaki $x \in \mathbb{R}$ je rješenje. $\square$

5.4 Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe

U ovom poglavlju log označava logaritam s bazom 10, kao u predavanjima.

Zadatak 5.8. Riješite jednadžbe:

$$(a) \quad 9^x - 15^x - 2 \cdot 25^x = 0;$$

$$(b) \quad 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

Rješenje. (a) Ideja je svesti potencije na zajedničku bazu. Jednadžba glasi $3^{2x} - 3^x 5^x - 2 \cdot 5^{2x} = 0$. Dijeljenjem s $5^{2x} \neq 0$ dobivamo

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{5}\right)^x - 2 = 0.$$

Supstitucijom $t = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ dobivamo $t^2 - t - 2 = 0$, pa je $t_1 = 2$, $t_2 = -1$. Jednadžba $\left(\frac{3}{5}\right)^x = -1$ nema rješenja jer je eksponencijalna funkcija pozitivna, a iz $\left(\frac{3}{5}\right)^x = 2$ slijedi

$$x = \log_{\frac{3}{5}} 2 = \frac{\log 2}{\log 3 - \log 5}.$$

(b) Ideja je svesti potencije na zajednički eksponent. Jednadžba glasi

$$2^{2x} - \frac{3^x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot 3^x - \frac{2^{2x}}{2} \iff \frac{3}{2} \cdot 2^{2x} = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) 3^x = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 3^x.$$

Dijeljenjem s 12 dobivamo

$$\frac{1}{8} \cdot 2^{2x} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot 3^x \iff 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}} \iff 4^{x-\frac{3}{2}} = 3^{x-\frac{3}{2}} \iff \left(\frac{4}{3}\right)^{x-\frac{3}{2}} = 1.$$

Eksponecijalna funkcija s bazom $\frac{4}{3}$ je injekcija i vrijedi $\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 1$, pa je $x - \frac{3}{2} = 0$, tj. $x = \frac{3}{2}$.

□

Napomena 5.9. Eksponecijalnu jednadžbu $(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}}$, kod koje je ključno uočiti $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$, riješili smo u zadatku 4.22 (određivanje praslike).

Zadatak 5.10. Riješite jednadžbe:

(a) $\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+5}) = \log_2 9$;

(b) $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$.

Rješenje. (a) Uvjeti su $2x+3 \geq 0$, tj. $x \geq -\frac{3}{2}$, i $x+5 \geq 0$, tj. $x \geq -5$, te $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+5} > 0$. Posljednji uvjet vrijedi čim su korijeni definirani: oba su pribrojnika nenegativna i ne mogu istodobno biti jednaka nuli. Sve zajedno: $x \geq -\frac{3}{2}$.

Prijelazom na bazu 2 (vrijedi $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$) dobivamo

$$\frac{\log_2(\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+5})}{\log_2 \sqrt{2}} = \log_2 3^2 \iff 2 \log_2(\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+5}) = 2 \log_2 3,$$

a zbog injektivnosti logaritamske funkcije

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+5} = 3.$$

Kvadriranjem dobivamo $2x+3 + 2\sqrt{(2x+3)(x+5)} + x+5 = 9$, tj. $2\sqrt{(2x+3)(x+5)} = 1 - 3x$. Ponovnim kvadriranjem slijedi

$$4(2x^2 + 13x + 15) = 1 - 6x + 9x^2 \iff x^2 - 58x - 59 = 0 \iff (x - 59)(x + 1) = 0.$$

Oba kandidata zadovoljavaju uvjet $x \geq -\frac{3}{2}$, ali zbog kvadriranja ih moramo provjeriti:

$$x = -1 : \sqrt{1} + \sqrt{4} = 3 \checkmark, \quad x = 59 : \sqrt{121} + \sqrt{64} = 19 \neq 3.$$

Rješenje jednadžbe je $x = -1$.

(b) Uvjet je $x+1 > 0$, tj. $x > -1$. Obje strane jednadžbe tada su pozitivne, pa logaritmiranjem (logaritamska funkcija je injekcija) dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$\log((x+1)^{\log(x+1)}) = \log(100(x+1)) \iff (\log(x+1))^2 = 2 + \log(x+1).$$

Supstitucijom $t = \log(x+1)$ dobivamo $t^2 - t - 2 = 0$, pa je $t_1 = 2$, $t_2 = -1$. Slijedi

$$\begin{aligned} \log(x+1) = 2 &\iff x+1 = 10^2 \iff x = 99, \\ \log(x+1) = -1 &\iff x+1 = 10^{-1} \iff x = -\frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Oba broja zadovoljavaju uvjet $x > -1$, pa je skup rješenja $\{-\frac{9}{10}, 99\}$.

□

5.5 Nejednadžbe

Zadatak 5.11. U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ riješite nejednadžbu

$$\frac{3a^2}{2x-a} \leq 2x-3a.$$

Rješenje. Uvjet je $x \neq \frac{a}{2}$. Ne znamo predznak nazivnika, pa nejednadžbu ne množimo s $2x-a$, nego sve prebacujemo na lijevu stranu i svodimo na zajednički nazivnik:

$$\frac{3a^2}{2x-a} - 2x + 3a \leq 0 \iff \frac{3a^2 - (2x-3a)(2x-a)}{2x-a} \leq 0 \iff \frac{4x(2a-x)}{2x-a} \leq 0.$$

Nultočke brojnika i nazivnika su 0, $\frac{a}{2}$ i $2a$; njihov poredak ovisi o predznaku parametra a .

1° $a > 0$. Tada je $0 < \frac{a}{2} < 2a$ i tablica predznaka glasi

	$\langle -\infty, 0 \rangle$	$\langle 0, \frac{a}{2} \rangle$	$\langle \frac{a}{2}, 2a \rangle$	$\langle 2a, +\infty \rangle$
$4x$	–	+	+	+
$2a-x$	+	+	+	–
$2x-a$	–	–	+	+
$\frac{4x(2a-x)}{2x-a}$	+	–	+	–

Nultočke brojnika 0 i $2a$ su rješenja (nejednakost je nestroga), a nultočka nazivnika $\frac{a}{2}$ nije. Skup rješenja je $[0, \frac{a}{2}) \cup [2a, +\infty)$.

2° $a = 0$. Nejednadžba glasi $\frac{0}{2x} \leq 2x$ uz uvjet $x \neq 0$, tj. $0 \leq 2x$, $x \neq 0$. Skup rješenja je $\langle 0, +\infty \rangle$.

3° $a < 0$. Tada je $2a < \frac{a}{2} < 0$ i tablica predznaka glasi

	$\langle -\infty, 2a \rangle$	$\langle 2a, \frac{a}{2} \rangle$	$\langle \frac{a}{2}, 0 \rangle$	$\langle 0, +\infty \rangle$
$4x$	–	–	–	+
$2a-x$	+	–	–	–
$2x-a$	–	–	+	+
$\frac{4x(2a-x)}{2x-a}$	+	–	+	–

Skup rješenja je $[2a, \frac{a}{2}) \cup [0, +\infty)$. □

Zadatak 5.12. Riješite nejednadžbu $|x^3 - x^2| < |x^2 + x|$.

Rješenje. Koristimo $|xy| = |x||y|$ i $|x^2| = |x|^2 = x^2$. Nejednadžba glasi

$$x^2|x-1| < |x||x+1|.$$

Izrazi u apsolutnim vrijednostima mijenjaju predznak u točkama -1 , 0 i 1 , pa razlikujemo četiri slučaja.

1° $x < -1$. Tada je $|x-1| = 1-x$, $|x| = -x$, $|x+1| = -x-1$, pa

$$x^2(1-x) < -x(-x-1) \iff x^2 - x^3 < x^2 + x \iff x^3 + x > 0 \iff x(x^2 + 1) > 0.$$

Kako je $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, slijedi $x > 0$, što je u suprotnosti s $x < -1$. U ovom slučaju nema rješenja.

2° $-1 \leq x < 0$. Tada je $|x-1| = 1-x$, $|x| = -x$, $|x+1| = x+1$, pa

$$-x^2(x-1) < -x(x+1) \iff -x^3 + x^2 < -x^2 - x \iff x(x^2 - 2x - 1) > 0.$$

Kako je $x < 0$, to je ekvivalentno s $x^2 - 2x - 1 < 0$. Nultočke su $1 \pm \sqrt{2}$, a parabola $y = x^2 - 2x - 1$ (slika dolje) negativna je između njih, pa je $x \in \langle 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \rangle$. Uz uvjet $-1 \leq x < 0$ (vrijedi $-1 < 1 - \sqrt{2} < 0$) dobivamo $x \in \langle 1 - \sqrt{2}, 0 \rangle$.

3° $0 \leq x < 1$. Tada je $|x - 1| = 1 - x$, $|x| = x$, $|x + 1| = x + 1$, pa

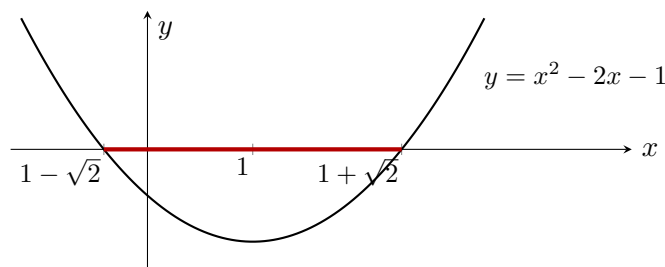
$$-x^2(x - 1) < x(x + 1) \iff -x^3 + x^2 < x^2 + x \iff -x(x^2 + 1) < 0 \iff x > 0.$$

Uz uvjet dobivamo $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

4° $x \geq 1$. Tada su svi izrazi u apsolutnim vrijednostima nenegativni, pa

$$x^2(x - 1) < x(x + 1) \iff x^3 - x^2 < x^2 + x \iff x(x^2 - 2x - 1) < 0.$$

Kako je $x \geq 1 > 0$, to je ekvivalentno s $x^2 - 2x - 1 < 0$, tj. $x \in \langle 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \rangle$. Uz uvjet dobivamo $x \in [1, 1 + \sqrt{2})$.



Unija svih slučajeva daje skup rješenja

$$\langle 1 - \sqrt{2}, 0 \rangle \cup \langle 0, 1 \rangle \cup [1, 1 + \sqrt{2}) = \langle 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \rangle \setminus \{0\}.$$

Drugi način. Za $x = 0$ nejednakost glasi $0 < 0$, pa 0 nije rješenje. Za $x \neq 0$ dijelimo s $|x| > 0$ i dobivamo $|x||x - 1| < |x + 1|$. Obje su strane nenegativne, pa je kvadriranje ekvivalentan prijelaz (napomena 5.2):

$$\begin{aligned} x^2(x - 1)^2 < (x + 1)^2 &\iff (x(x - 1) - (x + 1))(x(x - 1) + (x + 1)) < 0 \\ &\iff (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 1) < 0, \end{aligned}$$

što je zbog $x^2 + 1 > 0$ ekvivalentno s $x^2 - 2x - 1 < 0$. Ponovno dobivamo $\langle 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \rangle \setminus \{0\}$. $\square$

Zadatak 5.13. Riješite nejednadžbu $\sqrt{4 - x^2} > 2 - 2x$.

Rješenje. Uvjet je $4 - x^2 \geq 0$, tj. $x^2 \leq 4$, odnosno $x \in [-2, 2]$.

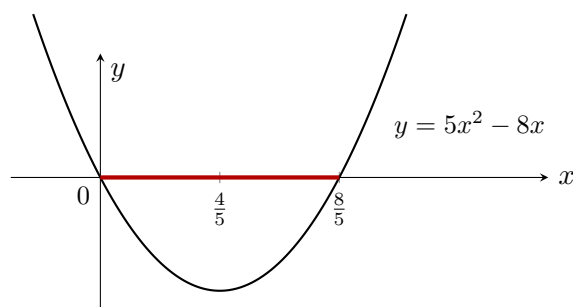
Željeli bismo kvadrirati da se riješimo korijena. Smijemo li? Prema napomeni 5.2, kvadriranjem dobivamo ekvivalentnu nejednakost ako su obje strane nenegativne. Lijeva strana je uvijek nenegativna, a desna je nenegativna za $2 - 2x \geq 0$, tj. $x \leq 1$. Zato na skupu $[-2, 2]$ razlikujemo dva slučaja.

1° $x \in [-2, 1]$. Desna strana je nenegativna, pa kvadriramo:

$$4 - x^2 > 4 - 8x + 4x^2 \iff 5x^2 - 8x < 0 \iff x(5x - 8) < 0.$$

Nultočke su 0 i $\frac{8}{5}$, a parabola $y = 5x^2 - 8x$ negativna je između njih (slika dolje), pa je $x \in \langle 0, \frac{8}{5} \rangle$. Uz uvjet $x \in [-2, 1]$ dobivamo $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

2° $x \in (1, 2]$. Lijeva strana je nenegativna, a desna negativna, pa nejednakost uvijek vrijedi: svaki $x \in (1, 2]$ je rješenje.



Konačno rješenje je unija slučajeva 1° i 2°: $x \in \langle 0, 2 \rangle$. □

Zadatak 5.14. Riješite nejednadžbu $\sqrt{2(5^x + 24)} - \sqrt{5^x - 7} \geq \sqrt{5^x + 7}$.

Rješenje. Uvjeti su $5^x + 24 \geq 0$ i $5^x + 7 \geq 0$ (oba vrijede za svaki x) te $5^x - 7 \geq 0$, tj. $5^x \geq 7$, odnosno $x \geq \log_5 7 \approx 1,209$.

Htjeli bismo kvadrirati, ali to ne smijemo odmah jer lijeva strana može biti negativna. Zato drugi korijen prebacimo na desnu stranu:

$$\sqrt{2(5^x + 24)} \geq \sqrt{5^x - 7} + \sqrt{5^x + 7}.$$

Sada su obje strane nenegativne, pa je kvadriranje ekvivalentan prijelaz:

$$2(5^x + 24) \geq 5^x - 7 + 2\sqrt{(5^x - 7)(5^x + 7)} + 5^x + 7 \iff \sqrt{5^{2x} - 49} \leq 24.$$

Objе su strane ponovno nenegativne, pa kvadriramo još jednom:

$$25^x - 49 \leq 576 \iff 25^x \leq 625 = 25^2 \iff x \leq 2,$$

jer je eksponencijalna funkcija s bazom $25 > 1$ strogo rastuća. Uz uvjet $x \geq \log_5 7$ dobivamo skup rješenja $[\log_5 7, 2]$. □

Zadatak 5.15. Riješite nejednadžbu $|x - 2|^{1-|x|} < |x - 2|^x$.

Rješenje. Potencije su s istom bazom $|x - 2|$. Potencija s realnim eksponentom definirana je za pozitivnu bazu, pa mora biti $|x - 2| \neq 0$, tj. $x \neq 2$. Za $|x - 2| = 1$, tj. $x \in \{1, 3\}$, obje strane jednake su 1, pa ti brojevi nisu rješenja. Dakle, $x \notin \{1, 2, 3\}$.

Nejednadžbu logaritmiramo logaritmom s bazom $|x - 2|$; prema napomeni 5.2, smjer nejednakosti ovisi o tome raste li ta funkcija ili pada.

1° $|x - 2| > 1$, tj. $x \in \langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$. Funkcija $\log_{|x-2|}$ strogo raste, pa je nejednadžba ekvivalentna s $1 - |x| < x$.

- Ako je $x \geq 0$, to je $1 - x < x$, tj. $x > \frac{1}{2}$.
- Ako je $x < 0$, to je $1 + x < x$, tj. $1 < 0$, što nema rješenja.

Dakle, $x \in \langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle$, a uz uvjet ovog slučaja $x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$.

2° $0 < |x - 2| < 1$, tj. $x \in \langle 1, 3 \rangle \setminus \{2\}$. Funkcija $\log_{|x-2|}$ strogo pada, pa je nejednadžba ekvivalentna s $1 - |x| > x$. Kako je $x \in \langle 1, 3 \rangle$, vrijedi $x > 0$ i $|x| = x$, pa dobivamo $1 - x > x$, tj. $x < \frac{1}{2}$, što je u suprotnosti s $x > 1$. U ovom slučaju nema rješenja.

Konačno rješenje je

$$x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle.$$

□

Zadatak 5.16. Riješite nejednadžbu

$$\frac{1}{\log_{x-3}(x+1)} + \frac{1}{\log_x(x^2+2x+1)} < 1.$$

Rješenje. Uvjeti: baze logaritama moraju biti pozitivne i različite od 1, tj. $x-3 > 0$, $x > 0$, $x-3 \neq 1$, $x \neq 1$; argumenti moraju biti pozitivni, tj. $x+1 > 0$ i $x^2+2x+1 = (x+1)^2 > 0$; nazivnici moraju biti različiti od nule, tj. $x+1 \neq 1$ i $(x+1)^2 \neq 1$. Sve zajedno: $x > 3$, $x \neq 4$.

Uz te uvjete je $x^2+2x+1 = (x+1)^2$ i $\log_x(x+1)^2 = 2\log_x(x+1)$. Koristeći $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ dobivamo

$$\begin{aligned} \log_{x+1}(x-3) + \frac{1}{2}\log_{x+1} x < 1 &\iff \log_{x+1}(x-3) + \log_{x+1} \sqrt{x} < 1 \\ \iff \log_{x+1}((x-3)\sqrt{x}) < \log_{x+1}(x+1). \end{aligned}$$

Razlikujemo dva slučaja prema bazi $x+1$.

1° $x+1 > 1$, tj. $x > 0$. Logaritam s bazom $x+1$ strogo raste, pa je nejednadžba ekvivalentna s $(x-3)\sqrt{x} < x+1$. Obje su strane pozitivne (jer je $x > 3$), pa kvadriramo:

$$x(x-3)^2 < (x+1)^2 \iff x^3 - 6x^2 + 9x < x^2 + 2x + 1 \iff x^3 - 7x^2 + 7x - 1 < 0.$$

Grupiranjem dobivamo $x^3 - 1 - 7x(x-1) = (x-1)(x^2+x+1) - 7x(x-1) = (x-1)(x^2-6x+1)$, pa nejednadžba glasi

$$(x-1)(x^2-6x+1) < 0.$$

Kako je $x-1 > 0$ (jer je $x > 3$), slijedi $x^2-6x+1 < 0$. Nultočke su $x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$, pa je $x \in \langle 3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2} \rangle$. Uz uvjete $x > 3$, $x \neq 4$ dobivamo $x \in \langle 3, 3+2\sqrt{2} \rangle \setminus \{4\}$.

2° $0 < x+1 < 1$, tj. $-1 < x < 0$. To je nemoguće jer je $x > 3$.

Konačno rješenje je $x \in \langle 3, 3+2\sqrt{2} \rangle \setminus \{4\}$. □

5.6 Zadaci za samostalan rad

5.1. Riješite jednadžbu $\sqrt{x+2} = x$.

5.2. Riješite nejednadžbu $|2x-3| \leq x+1$.

5.3. Riješite jednadžbu $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

5.4. Riješite jednadžbu $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$.

5.5. U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ riješite jednadžbu $(a-1)x = a^2 - 1$.

5.6. Riješite nejednadžbu $\frac{x-1}{x+2} \geq 2$.

5.7. Riješite nejednadžbu $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2) > 0$.

5.8. Riješite nejednadžbu $|x-1| + |x+2| \leq 5$.

5.9. Riješite nejednadžbu $\sqrt{x+4} > x-2$.

Poglavlje 6

Trigonometrija

Na predavanjima su definirane trigonometrijske funkcije, proučena su njihova osnovna svojstva, nacrtani su njihovi grafovi, izvedene su osnovne formule i identiteti te su riješeni najjednostavniji oblici trigonometrijskih jednadžbi i nejednadžbi. Na vježbama to primjenjujemo na složenije zadatke.

6.1 Formule i identiteti

Podsjetimo se formula koje najčešće koristimo:

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1, & \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x, \\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b, & \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \\ \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}, & \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}, \\ \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}, & \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.\end{aligned}$$

Pritom je $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ za $\cos x \neq 0$ i $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ za $\sin x \neq 0$.

Napomena 6.1 (Univerzalna trigonometrijska supstitucija). Za $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, stavimo $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Tada je

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Doista, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}$, a nakon dijeljenja brojnika i nazivnika s $\cos^2 \frac{x}{2} \neq 0$ dobivamo $\frac{2t}{1+t^2}$; analogno za $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$. Tako se svaki izraz u $\sin x$ i $\cos x$ svodi na racionalni izraz u t .

Zadatak 6.2. Dokažite da vrijedi (na prirodnoj domeni lijeve strane):

- (a) $\frac{\sin(2x+y) + \sin(2x-y)}{\cos(x+2y) - \cos(x-2y)} = -\frac{\cos x}{\sin y};$
- (b) $\operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$, za $x \neq \frac{\pi}{4}(2k+1) = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;
- (c) $\frac{\sin x - \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} = -\operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

Rješenje. (a) Adicijske formule daju

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2x+y) + \sin(2x-y)}{\cos(x+2y) - \cos(x-2y)} &= \frac{\sin 2x \cos y + \cos 2x \sin y + \sin 2x \cos y - \cos 2x \sin y}{\cos x \cos 2y - \sin x \sin 2y - \cos x \cos 2y - \sin x \sin 2y} \\ &= \frac{2 \sin 2x \cos y}{-2 \sin x \sin 2y} = \frac{2 \sin x \cos x \cos y}{-2 \sin x \sin y \cos y} = -\frac{\cos x}{\sin y}.\end{aligned}$$

Skraćivanje je dopušteno jer je nazivnik lijeve strane $-2 \sin x \sin 2y = -4 \sin x \sin y \cos y$ različit od nule. (Desna strana definirana je i za neke x, y za koje lijeva nije.)

(b) Krenimo od desne strane te brojnik i nazivnik pomnožimo s $\cos x + \sin x$ (to je različito od 0, jer je $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \cos 2x \neq 0$):

$$\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{\cos 2x} + \operatorname{tg} 2x.$$

Uvjet $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ upravo je uvjet $\cos 2x \neq 0$.

(c) Lijeva strana definirana je kad je $\cos x + \cos 2x = 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \neq 0$; tada je $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, pa smijemo staviti $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Koristeći univerzalnu supstituciju,

$$\begin{aligned}\frac{\sin x - \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} &= \frac{\sin x - 2 \sin x \cos x}{\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\frac{2t}{1+t^2} - 2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} - \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}} \\ &= \frac{\frac{2t + 2t^3 - 4t + 4t^3}{(1+t^2)^2}}{\frac{1-t^4 + 1 - 2t^2 + t^4 - 4t^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{6t^3 - 2t}{2 - 6t^2} = -\frac{t(6t^2 - 2)}{6t^2 - 2} = -t = -\operatorname{tg} \frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Skraćivanje s $6t^2 - 2$ je dopušteno jer je $2 - 6t^2$ (do na pozitivni faktor) upravo nazivnik lijeve strane.

Drugi način. Formule za pretvorbu zbroja u umnožak daju

$$\frac{\sin x - \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} = \frac{2 \cos \frac{3x}{2} \sin(-\frac{x}{2})}{2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}} = -\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = -\operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

□

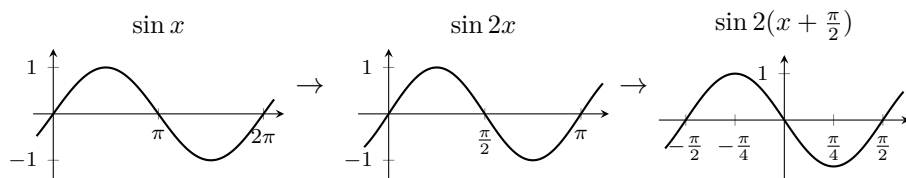
6.2 Grafovi trigonometrijskih funkcija

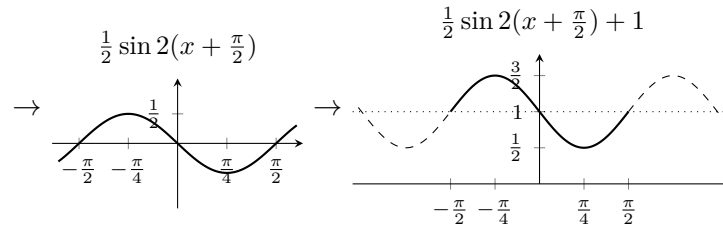
Zadatak 6.3. Skicirajte grafove sljedećih funkcija:

$$(a) f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \pi) + 1, \quad (b) f(x) = -3 \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right), \quad (c) f(x) = \operatorname{tg} 2x - 1.$$

Rješenje. Zadatke rješavamo korak po korak, transformirajući jednostavnije (poznate) grafove u složenije. Pritom pazimo na redoslijed: graf funkcije $x \mapsto g(x+c)$ dobiva se pomakom grafa od g za c ulijevo (za $c < 0$ udesno), graf od $x \mapsto g(ax)$, $a > 0$, sažimanjem prema osi y faktorom a , graf od $bg(x)$ množenjem ordinata s b , a graf od $g(x) + d$ pomakom za d prema gore.

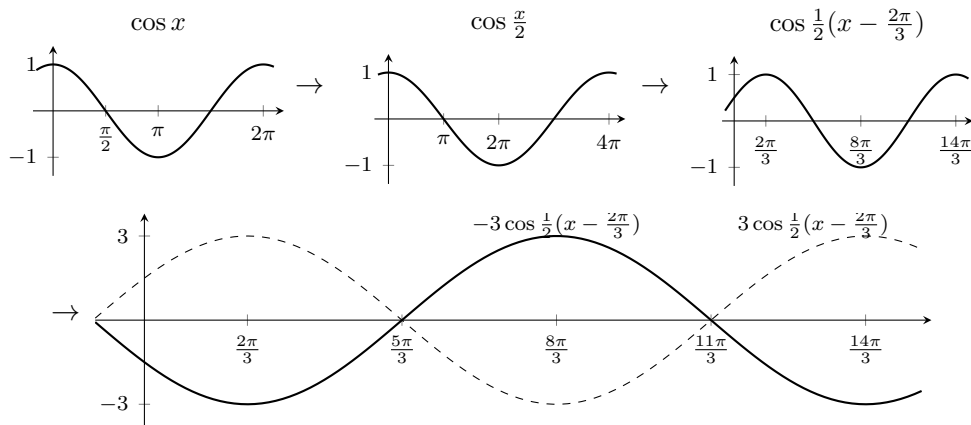
(a) Pišemo $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2(x + \frac{\pi}{2}) + 1$. Crtamo najprije „uzorak” $\sin x$, zatim $\sin 2x$ (period π), pa pomak za $\frac{\pi}{2}$ ulijevo, množenje ordinata s $\frac{1}{2}$ i pomak za 1 prema gore. Jednu periodu nacrtamo, a graf zatim periodički produžimo (isprekidano).





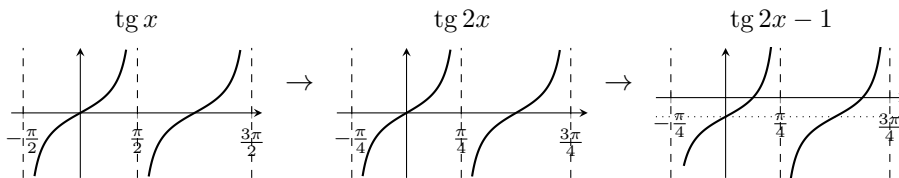
Funkcija f ima period π , sliku $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ i vrijedi $f(x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$.

(b) Pišemo $f(x) = -3 \cos \frac{1}{2} \left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$. Od $\cos x$ dobivamo $\cos \frac{x}{2}$ (period 4π), zatim pomakom za $\frac{2\pi}{3}$ udesno $\cos \frac{1}{2} \left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$, množenjem ordinata s 3 graf $3 \cos \frac{1}{2} \left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ (isprekidano) i konačno zrcaljenjem preko osi x graf funkcije f (puna crta).



Funkcija f ima amplitudu 3, period 4π i sliku $[-3, 3]$.

(c) Graf tangensa sažmemo faktorom 2 prema osi y (period postaje $\frac{\pi}{2}$, asimptote $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$), a zatim ga spustimo za 1 (točkasti pravac je $y = -1$).



Funkcija f ima period $\frac{\pi}{2}$, sliku $\mathbb{R}$ i domenu $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. □

6.3 Trigonometrijske jednadžbe

Svaku jednadžbu nastojimo svesti na neki od osnovnih oblika (u svim formulama $k \in \mathbb{Z}$):

- $\sin x = a, |a| \leq 1$: $x = (-1)^k \arcsin a + k\pi$, tj. $x = \arcsin a + 2k\pi$ ili $x = \pi - \arcsin a + 2k\pi$;
- $\cos x = a, |a| \leq 1$: $x = \pm \arccos a + 2k\pi$;
- $\operatorname{tg} x = a$: $x = \arctg a + k\pi$; $\operatorname{ctg} x = a$: $x = \operatorname{arcc} a + k\pi$.

Za $|a| > 1$ jednadžbe $\sin x = a$ i $\cos x = a$ nemaju rješenja.

Zadatak 6.4. Riješite jednadžbe:

(a) $\operatorname{ctg}^2 2x - 4 \operatorname{ctg} 2x + 3 = 0$;

(b) $8 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3;$

(c) $3 \sin x - 4 \cos x = 2;$

(d) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0;$

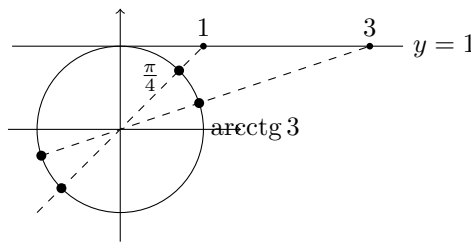
(e) $2 \sin x = 5x^2 + 2x + 3.$

Rješenje. (a) Uvjet je $\sin 2x \neq 0$. Supstitucijom $t = \operatorname{ctg} 2x$ dobivamo $t^2 - 4t + 3 = 0$, pa je $t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$, tj. $t_1 = 3$, $t_2 = 1$.

$$\operatorname{ctg} 2x = 3 \iff 2x = \operatorname{arctg} 3 + k\pi \iff x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 + \frac{k\pi}{2},$$

$$\operatorname{ctg} 2x = 1 \iff 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \iff x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},$$

$k \in \mathbb{Z}$. (Vrijedi $\operatorname{arctg} 3 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.) Za sva ta rješenja kotangens je definiran. Na jediničnoj kružnici rješenja za kut $2x$ očitavamo na pravcu kotangensa $y = 1$:



(b) Jedinicu zapišemo kao $\sin^2 x + \cos^2 x$:

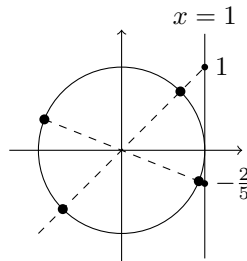
$$8 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) \iff 5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0.$$

Željeli bismo podijeliti jednadžbu s $\cos^2 x$. Smijemo li? Hoćemo li tako izgubiti neka rješenja? Ako je $\cos^2 x = 0$, tj. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, onda je $\sin^2 x = 1$ i lijeva strana iznosi $5 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 5 \neq 0$. Takvi x nisu rješenja, pa dijeljenjem ne gubimo rješenja:

$$5 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Uz $t = \operatorname{tg} x$ je $5t^2 - 3t - 2 = 0$, $t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{10} = \frac{3 \pm 7}{10}$, tj. $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{2}{5}$. Dakle,

$$\operatorname{tg} x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \operatorname{tg} x = -\frac{2}{5} \iff x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{5} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



(c) Koristimo univerzalnu supstituciju $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, za $x \neq \pi + 2k\pi$:

$$3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - 4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2 \quad / \cdot (1+t^2)$$

$$6t - 4 + 4t^2 = 2 + 2t^2 \iff 2t^2 + 6t - 6 = 0 \iff t^2 + 3t - 3 = 0, \quad t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Iz $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ slijedi $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t + k\pi$, pa su rješenja

$$x = 2 \operatorname{arctg} \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad x = 2 \operatorname{arctg} \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Isključene vrijednosti $x = \pi + 2k\pi$ treba provjeriti zasebno: za njih je $3 \sin x - 4 \cos x = 0 + 4 = 4 \neq 2$, pa nisu rješenja.

Drugi način. Kako je $3^2 + 4^2 = 5^2$, odaberemo $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$; tada je $\cos \varphi = \frac{3}{5}$, $\sin \varphi = \frac{4}{5}$ i $3 \sin x - 4 \cos x = 5 \sin(x - \varphi)$. Jednadžba $\sin(x - \varphi) = \frac{2}{5}$ daje $x = \varphi + \arcsin \frac{2}{5} + 2k\pi$ ili $x = \varphi + \pi - \arcsin \frac{2}{5} + 2k\pi$, što su (drukčije zapisana) ista rješenja.

(d) Koristimo formule za pretvorbu zbroja u umnožak, grupirajući prvi i četvrti te drugi i treći pribrojnik:

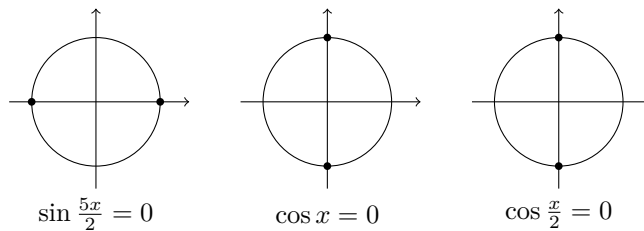
$$\sin x + \sin 4x + \sin 2x + \sin 3x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

$$1^\circ \sin \frac{5x}{2} = 0 \iff \frac{5x}{2} = k\pi \iff x = \frac{2k\pi}{5}.$$

$$2^\circ \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0 \iff 2 \cos x \cos \frac{x}{2} = 0, \text{ pa je } \cos x = 0, \text{ tj. } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ ili } \cos \frac{x}{2} = 0, \text{ tj. } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ odnosno } x = \pi + 2k\pi.$$

Sva su rješenja

$$x = \frac{2k\pi}{5} \quad \text{ili} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ili} \quad x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

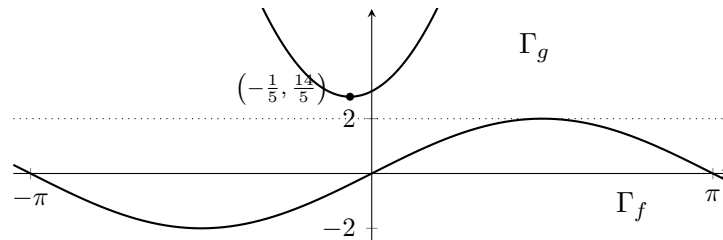


(Točke na kružnicama prikazuju redom kutove $\frac{5x}{2}$, x i $\frac{x}{2}$.)

(e) Jednadžbu rješavamo grafički: skiciramo grafove funkcija $f(x) = 2 \sin x$ i $g(x) = 5x^2 + 2x + 3$. Diskriminanta od g je $D = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = -56 < 0$, pa g nema realnih nultočaka, a tjeme parabole je

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{5}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{60 - 4}{20} = \frac{14}{5} > 2.$$

Dakle, $g(x) \geq \frac{14}{5} > 2 \geq f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$, pa jednadžba nema rješenja.



□

6.4 Trigonometrijske nejednadžbe

Nejednadžbe rješavamo na jediničnoj kružnici: najprije nađemo rješenja u jednom periodu, a zatim dodamo višekratnike perioda. Na slikama podebljani lukovi označavaju rješenja; pune rubne točke pripadaju skupu rješenja, a prazne ne pripadaju.

Zadatak 6.5. Riješite nejednadžbe:

$$(a) \sin x \geq \frac{1}{2}, \quad (b) |\cos x| < 0,6, \quad (c) \operatorname{ctg} 2x < \sqrt{3}.$$

Rješenje. (a) Rješenja jednadžbe $\sin x = \frac{1}{2}$ u $[0, 2\pi)$ su $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{5\pi}{6}$. Točke kružnice s ordinatom barem $\frac{1}{2}$ čine luk od $\frac{\pi}{6}$ do $\frac{5\pi}{6}$, pa je u jednom periodu $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$. Skup rješenja je

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ za neki } k \in \mathbb{Z} \right\},$$

ili, drukčije zapisano,

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right].$$

(b) $|\cos x| < 0,6 \iff -0,6 < \cos x < 0,6$. Kako je $0 < 0,6 < 1$ i $\arccos$ strogo pada, broj $\arccos 0,6$ leži u $(0, \frac{\pi}{2})$ (slika desno). Na kružnici tražimo točke s apscisom između $-0,6$ i $0,6$:

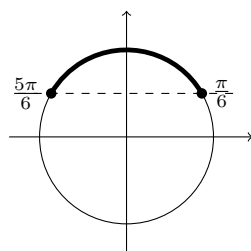
$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\langle \arccos 0,6 + 2k\pi, \pi - \arccos 0,6 + 2k\pi \rangle \cup \langle \pi + \arccos 0,6 + 2k\pi, 2\pi - \arccos 0,6 + 2k\pi \rangle \right),$$

odnosno, jer se drugi luk dobiva iz prvoga pomakom za π ,

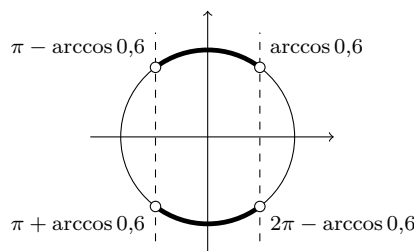
$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle \arccos 0,6 + k\pi, \pi - \arccos 0,6 + k\pi \rangle.$$

(c) Uz $t = 2x$ tražimo $\operatorname{ctg} t < \sqrt{3}$. Na pravcu kotangensa $y = 1$ odaberemo točke s apscisom manjom od $\sqrt{3}$; kako je $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ i kotangens strogo pada na $\langle 0, \pi \rangle$, u tom je intervalu $\frac{\pi}{6} < t < \pi$ (u $t = \pi$ kotangens nije definiran). Zbog perioda π :

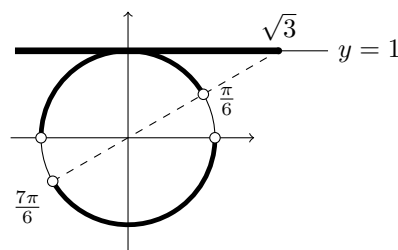
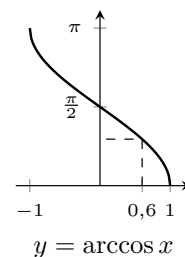
$$\frac{\pi}{6} + k\pi < 2x < \pi + k\pi \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} \right\rangle.$$



(a) $\sin x \geq \frac{1}{2}$



(b) $|\cos x| < 0,6$



(c) $\operatorname{ctg} t < \sqrt{3}, t = 2x$

□

Zadatak 6.6. Riješite nejednadžbe:

(a) $\operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{3}) \leq -1$;

(b) $2\sin^2 x - \sin x \leq 1$;

(c) $0,2^{\cos 2x} - \frac{1}{25^{\cos^2 x}} < 4 \cdot 125^{-\frac{1}{2}}$;

(d) $\cos x \cos 2x < 0$.

Rješenje. (a) Uz $t = 2x - \frac{\pi}{3}$ rješavamo $\operatorname{tg} t \leq -1$. Na pravcu tangensa $x = 1$ odabiremo točke s ordinatom najviše -1 . Tangens strogo raste na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ i $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}) = -1$, pa je $-\frac{\pi}{2} < t \leq -\frac{\pi}{4}$; lijevi je rub strog jer tangens u $-\frac{\pi}{2}$ nije definiran. Zbog perioda π :

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < 2x - \frac{\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi \iff -\frac{\pi}{6} + k\pi < 2x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi \iff -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2},$$

$$\text{tj. } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \right].$$

(b) Uz $t = \sin x$ dobivamo $2t^2 - t - 1 \leq 0$. Nultočke su $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$, tj. $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$, a parabola je otvorena prema gore, pa je $t \in [-\frac{1}{2}, 1]$. Dakle, $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$, a kako je $\sin x \leq 1$ uvijek, preostaje $\sin x \geq -\frac{1}{2}$:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right].$$

(c) Sve potencije zapišemo s bazom $\frac{1}{5}$:

$$0,2^{\cos 2x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x - 1} = 5 \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x}, \quad \frac{1}{25^{\cos^2 x}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x}, \quad 125^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Nejednadžba postaje

$$5 \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x} - \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x} < 4 \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \iff \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Eksponecijalna funkcija s bazom $\frac{1}{5} < 1$ strogo pada, pa je $2\cos^2 x > \frac{3}{2}$, tj. $\cos^2 x > \frac{3}{4}$, odnosno $|\cos x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$, tj. $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ili $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dakle,

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left\langle -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right\rangle.$$

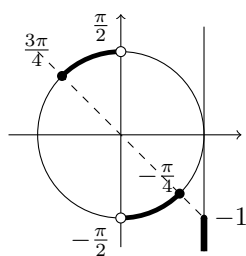
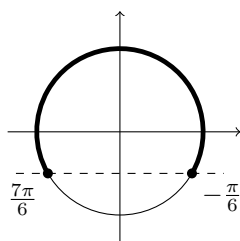
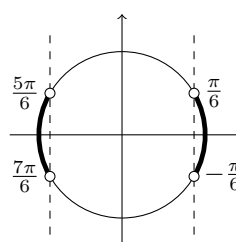
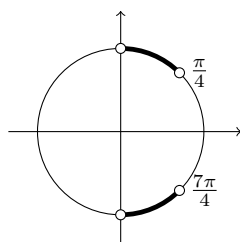
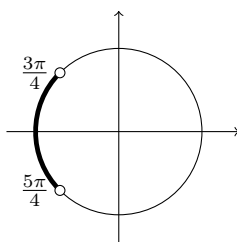
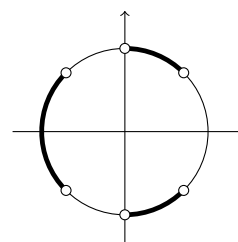
(d) Umnožak je negativan ako su faktori suprotnih predznaka. Koristimo $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

1° Sustav $\cos x > 0$, $\cos 2x < 0$. Prvi uvjet daje (u $[0, 2\pi)$) $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, a drugi $\cos^2 x < \frac{1}{2}$, tj. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Presjek (zapisan u $[0, 2\pi)$) je $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4})$.

2° Sustav $\cos x < 0$, $\cos 2x > 0$. Prvi uvjet daje $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, a drugi $\cos^2 x > \frac{1}{2}$, tj. $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ili $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Presjek je $x \in (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$.

Konačno,

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left\langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right\rangle \right).$$

(a) $\operatorname{tg} t \leq -1$ (b) $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ (c) $|\cos x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 1° $\cos x > 0, \cos 2x < 0$ 2° $\cos x < 0, \cos 2x > 0$ (d) $\cos x \cos 2x < 0$

□

6.5 Zadaci za samostalan rad

6.1. Riješite $2 \sin x = \sqrt{3}$.

6.2. Riješite $\cos 2x = \cos x$.

6.3. Riješite $\sin x + \cos x = 1$.

6.4. Riješite $\sin 2x > \frac{1}{2}$.

6.5. Odredite amplitudu, period i sliku funkcije $f(x) = 2 \cos(3x - \pi) - 4$ te skicirajte njezin graf.

6.6. Riješite $\operatorname{tg}^2 x \leq 1$.

Poglavlje 7

Matematička indukcija

7.1 Princip matematičke indukcije

Podsjetimo se da je $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ i $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Temelj svih dokaza u ovom poglavlju je jedan od Peanovih aksioma.

Aksiom matematičke indukcije. *Neka skup $S \subseteq \mathbb{N}$ ima sljedeća dva svojstva:*

- (a) $1 \in S$,
- (b) $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in S \Rightarrow n + 1 \in S)$.

Tada je $S = \mathbb{N}$.

Teorem 7.1 (Princip matematičke indukcije). *Neka je $P(n)$ tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju n . Pretpostavimo da vrijedi:*

- (1) *tvrdnja je istinita za $n = 1$, tj. vrijedi $P(1)$;*
- (2) *ako je tvrdnja istinita za neki n , onda je istinita i za $n + 1$, tj. $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$.*

Tada je $P(n)$ istinita za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Teorem se dokazuje primjenom aksioma na skup $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ je istinita}\}$. Zapisano formulom:

$$\left(P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \Rightarrow P(n + 1)) \right) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) P(n).$$

Uvjet (1) zove se *baza indukcije*, a uvjet (2) *korak indukcije*. Dokaz indukcijom zato zapisujemo u tri dijela:

- **Baza indukcije (B.I.):** provjeravamo da vrijedi $P(1)$.
- **Pretpostavka indukcije (P.I.):** pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $P(n)$.
- **Korak indukcije (K.I.):** koristeći pretpostavku indukcije dokazujemo da vrijedi $P(n + 1)$.

Nakon toga zaključujemo: prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Napomena 7.2 (Princip domina). Indukciju možemo zamisliti kao niz domino pločica poredanih tako da, ako padne n -ta pločica, past će i $(n + 1)$ -va; to je korak indukcije. Ako srušimo prvu pločicu (baza indukcije), past će sve pločice.

Napomena 7.3. U pretpostavci indukcije bilo bi pogrešno pretpostaviti da tvrdnja vrijedi za *svaki* $n \in \mathbb{N}$: to je upravo ono što dokazujemo. Pretpostavljamo samo da tvrdnja vrijedi za neki (proizvoljan, ali fiksiran) n i iz toga izvodimo tvrdnju za $n + 1$. Isto tako, provjera tvrdnje za nekoliko početnih vrijednosti od n nije dokaz.

Zadatak 7.4. Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi:

- (a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
 (b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
 (c) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.

Rješenje. (a) **B.I.** Za $n = 1$ imamo $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$, pa tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

K.I. Koristeći pretpostavku indukcije dobivamo

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &\stackrel{\text{P.I.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Pokazali smo sljedeće: ako tvrdnja vrijedi za n , onda vrijedi i za $n+1$. Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

- (b) **B.I.** Za $n = 1$ imamo $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

K.I. Tada je

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &\stackrel{\text{P.I.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} (2n^2 + n + 6n + 6) \\ &= \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{n+1}{6} (2n(n+2) + 3(n+2)) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

- (c) **B.I.** Za $n = 1$ imamo $1 = 1^2$.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$.

K.I. Sljedeći neparni pribrojnik je $2(n+1) - 1 = 2n+1$, pa je

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2n+1) \stackrel{\text{P.I.}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$. □

Napomena 7.5 (Baza indukcije). Baza ne mora biti $n = 1$: indukciju možemo započeti od bilo kojeg cijelog broja n_0 (primjerice od $n_0 = 0$, ako tvrdnju dokazujemo za sve $n \in \mathbb{N}_0$). Tada dobivamo da tvrdnja vrijedi za sve cijele brojeve $n \geq n_0$; vidi odjeljak 7.3.

Provjera baze najčešće je trivijalna, ali se ne smije izostaviti. Ako baza ne vrijedi, zaključak ne vrijedi, čak i kada je korak indukcije ispravan. Primjerice, za tvrdnju

$$P(n) : \quad 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

korak formalno vrijedi: iz $P(n)$ slijedi $2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$. No $P(n)$ nije istinita ni za jedan $n \in \mathbb{N}$, jer je lijeva strana paran, a desna neparan broj. Baza ne vrijedi: $2 \neq 2^2 - 1 = 3$.

7.2 Djeljivost

U zadacima o djeljivosti pretpostavku indukcije zapisujemo u obliku jednakosti: ako je izraz djeljiv s m , onda postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je izraz jednak $m \cdot k$.

Zadatak 7.6. Dokažite da je broj $3^{2n+2} - 8n - 9$ djeljiv sa 64 za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.

Rješenje. B.I. Za $n = 0$ imamo $3^2 - 8 \cdot 0 - 9 = 0$, što je djeljivo sa 64.

P.I. Pretpostavimo da je za neki $n \in \mathbb{N}_0$ broj $3^{2n+2} - 8n - 9$ djeljiv sa 64, tj. da postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $3^{2n+2} - 8n - 9 = 64k$.

K.I. Treba dokazati da je $3^{2(n+1)+2} - 8(n+1) - 9$ djeljivo sa 64. Vrijedi

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+2} - 8(n+1) - 9 &= 9 \cdot 3^{2n+2} - 8n - 17 = 9(3^{2n+2} - 8n - 9) + 9 \cdot 8n + 9 \cdot 9 - 8n - 17 \\ &\stackrel{\text{P.I.}}{=} 9 \cdot 64k + 64n + 64 = 64(9k + n + 1), \end{aligned}$$

a $9k + n + 1 \in \mathbb{Z}$. Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Zadatak 7.7. Dokažite:

- (a) broj $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ djeljiv je sa 133 za svaki $n \in \mathbb{N}_0$;
- (b) broj $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ djeljiv je sa 7 za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.

Rješenje. (a) B.I. Za $n = 0$ imamo $11^2 + 12 = 121 + 12 = 133$.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}_0$ postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133k$.

K.I. Vrijedi

$$\begin{aligned} 11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1} &= 11 \cdot 11^{n+2} + 12^2 \cdot 12^{2n+1} \\ &= 12^2(12^{2n+1} + 11^{n+2}) - 144 \cdot 11^{n+2} + 11 \cdot 11^{n+2} \\ &\stackrel{\text{P.I.}}{=} 144 \cdot 133k - 133 \cdot 11^{n+2} = 133(144k - 11^{n+2}), \end{aligned}$$

a $144k - 11^{n+2} \in \mathbb{Z}$. Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) **B.I.** Za $n = 0$ imamo $37^2 + 16 + 1 = 1386 = 7 \cdot 198$.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}_0$ postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n = 7k$.

K.I. Vrijedi

$$\begin{aligned} 37^{n+3} + 16^{n+2} + 23^{n+1} &= 37 \cdot 37^{n+2} + 16 \cdot 16^{n+1} + 23 \cdot 23^n \\ &= 37(37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n) - 37 \cdot 16^{n+1} - 37 \cdot 23^n \\ &\quad + 16 \cdot 16^{n+1} + 23 \cdot 23^n \\ &\stackrel{\text{P.I.}}{=} 37 \cdot 7k - 21 \cdot 16^{n+1} - 14 \cdot 23^n = 7(37k - 3 \cdot 16^{n+1} - 2 \cdot 23^n), \end{aligned}$$

a izraz u zagradi je cijeli broj. Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Zadatak 7.8. Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ djeljiv s 54.

Rješenje. B.I. Za $n = 1$ imamo $2^3 - 9 + 3 - 2 = 0$, što je djeljivo s 54.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2 = 54k$.

K.I. Vrijedi

$$\begin{aligned}
2^{2n+3} - 9(n+1)^2 + 3(n+1) - 2 &= 4 \cdot 2^{2n+1} - 9n^2 - 18n - 9 + 3n + 3 - 2 \\
&= (2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2) + 3 \cdot 2^{2n+1} - 18n - 6 \\
&\stackrel{\text{P.I.}}{=} 54k + 6(2^{2n} - 3n - 1).
\end{aligned}$$

Uočimo da će cijeli izraz biti djeljiv s 54 ako je $2^{2n} - 3n - 1$ djeljivo s 9 za svaki $n \in \mathbb{N}$, jer je tada $6(2^{2n} - 3n - 1)$ djeljivo s 54. Tu pomoćnu tvrdnju dokazujemo zasebnom indukcijom.

Pomoćna tvrdnja 1: $9 \mid 2^{2n} - 3n - 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

B.I. Za $n = 1$ imamo $2^2 - 3 - 1 = 0$, što je djeljivo s 9.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ postoji $k_1 \in \mathbb{Z}$ takav da je $2^{2n} - 3n - 1 = 9k_1$.

K.I. Vrijedi

$$2^{2n+2} - 3(n+1) - 1 = 4 \cdot 2^{2n} - 3n - 4 = (2^{2n} - 3n - 1) + 3(2^{2n} - 1) \stackrel{\text{P.I.}}{=} 9k_1 + 3(2^{2n} - 1).$$

Ovaj će izraz biti djeljiv s 9 ako je $2^{2n} - 1$ djeljivo s 3 za svaki $n \in \mathbb{N}$. I to dokazujemo indukcijom.

Pomoćna tvrdnja 2: $3 \mid 2^{2n} - 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

B.I. Za $n = 1$ imamo $2^2 - 1 = 3$.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ postoji $k_2 \in \mathbb{Z}$ takav da je $2^{2n} - 1 = 3k_2$.

K.I. Vrijedi

$$2^{2n+2} - 1 = 4 \cdot 2^{2n} - 1 = (2^{2n} - 1) + 3 \cdot 2^{2n} \stackrel{\text{P.I.}}{=} 3k_2 + 3 \cdot 2^{2n} = 3(k_2 + 2^{2n}).$$

Prema principu matematičke indukcije pomoćna tvrdnja 2 vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$. Zato je $3(2^{2n} - 1)$ djeljivo s 9, pa korak indukcije u pomoćnoj tvrdnji 1 vrijedi; prema principu matematičke indukcije i pomoćna tvrdnja 1 vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$. Konačno, $6(2^{2n} - 3n - 1)$ je djeljivo s 54, pa vrijedi i korak indukcije u početnom zadatku.

U ovom smo se zadatku, dakle, tri puta pozvali na princip matematičke indukcije, i to tako da se dokazi ne oslanjaju na nedokazane pretpostavke: svaka pomoćna tvrdnja dokazana je za sve $n \in \mathbb{N}$ prije nego što je upotrijebljena. $\square$

7.3 Inačice principa matematičke indukcije

Iz aksioma matematičke indukcije mogu se izvesti i sljedeće inačice.

Propozicija 7.9 (Indukcija od n_0). *Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ i neka skup $S \subseteq \mathbb{N}$ ima svojstva*

(1) $n_0 \in S$,

(2) $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in S \Rightarrow n + 1 \in S)$.

Tada je $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\} \subseteq S$.

Odgovarajući princip glasi: ako vrijedi $P(n_0)$ i ako za svaki $n \geq n_0$ iz $P(n)$ slijedi $P(n + 1)$, onda $P(n)$ vrijedi za svaki $n \geq n_0$. Analogno se dokazuje i verzija za $\mathbb{N}_0$: ako je $T \subseteq \mathbb{N}_0$, $0 \in T$ i $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(n \in T \Rightarrow n + 1 \in T)$, onda je $T = \mathbb{N}_0$. Tu smo verziju koristili u zadacima s bazom $n = 0$.

Propozicija 7.10 (Indukcija s korakom 2). *Neka skup $S \subseteq \mathbb{N}$ ima svojstva*

$$(1) 1 \in S \text{ i } 2 \in S,$$

$$(2) (\forall n \in \mathbb{N})(n \in S \Rightarrow n + 2 \in S).$$

Tada je $S = \mathbb{N}$.

Iz $1 \in S$ korakom dobivamo sve neparne brojeve $3, 5, 7, \dots$, a iz $2 \in S$ sve parne brojeve $4, 6, 8, \dots$. Zato su potrebne obje baze: bez $2 \in S$ ne bismo dobili nijedan paran broj.

Propozicija 7.11 (Jaka indukcija). *Neka skup $S \subseteq \mathbb{N}$ ima svojstva*

$$(1) 1 \in S,$$

$$(2) (\forall n \in \mathbb{N})(1, 2, \dots, n \in S \Rightarrow n + 1 \in S).$$

Tada je $S = \mathbb{N}$.

Izrečeno pomoću tvrdnji: ako vrijedi $P(1)$ i ako iz istinitosti *svih* tvrdnji $P(1), P(2), \dots, P(n)$ slijedi $P(n + 1)$, onda $P(n)$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Čest poseban slučaj glasi:

(i) vrijede $P(1)$ i $P(2)$;

(ii) za $n \geq 2$ iz $P(n - 1) \wedge P(n)$ slijedi $P(n + 1)$.

Tada $P(n)$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ovu inačicu koristimo kada $(n + 1)$ -vi član niza ovisi o dvama prethodnim članovima; ako ovisi o trima prethodnim, trebaju nam tri baze, itd. (vidi odjeljak 7.5).

7.4 Nejednakosti

Zadatak 7.12. Dokažite da za svaki $n \geq 10$ vrijedi $2^n > 10n^2$.

Rješenje. B.I. Za $n = 10$ imamo $2^{10} = 1024 > 1000 = 10 \cdot 10^2$.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \geq 10$ vrijedi $2^n > 10n^2$.

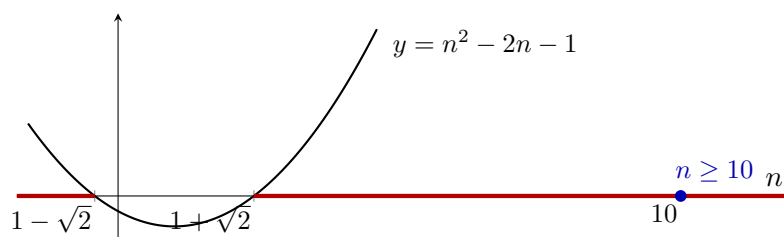
K.I. Želimo dokazati $2^{n+1} > 10(n + 1)^2$. Prema pretpostavci indukcije je

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \stackrel{\text{P.I.}}{>} 2 \cdot 10n^2,$$

pa bi bilo dovoljno da vrijedi $2 \cdot 10n^2 \geq 10(n + 1)^2$. Provjerimo to:

$$20n^2 \geq 10n^2 + 20n + 10 \iff n^2 - 2n - 1 \geq 0.$$

Nultočke polinoma $n^2 - 2n - 1$ su $1 \pm \sqrt{2}$, pa je on nenegativan za $n \leq 1 - \sqrt{2}$ i za $n \geq 1 + \sqrt{2} \approx 2,41$. Na slici je crveno označen skup na kojem je $y = n^2 - 2n - 1 \geq 0$. Posebno, nejednakost vrijedi za svaki $n \geq 10$.



Dakle, za $n \geq 10$ vrijedi

$$2^{n+1} \stackrel{\text{P.I.}}{>} 20n^2 \geq 10(n+1)^2,$$

pri čemu smo drugu nejednakost upravo dokazali. Prema principu matematičke indukcije (s bazom $n_0 = 10$) tvrdnja vrijedi za svaki $n \geq 10$. $\square$

Zadatak 7.13. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

(a) $\sqrt{4 + \sqrt{4 + \cdots + \sqrt{4}}} < 3$, gdje se na lijevoj strani pojavljuje n korijena;

(b) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n} \leq \frac{n^2 + 3n}{4}$.

Rješenje. (a) Uvedimo oznaku $A_n = \sqrt{4 + \sqrt{4 + \cdots + \sqrt{4}}}$ (n korijena). Tada je $A_1 = \sqrt{4}$ i $A_{n+1} = \sqrt{4 + A_n}$ za $n \in \mathbb{N}$. Svi su A_n pozitivni, pa su svi korijeni definirani.

B.I. Za $n = 1$ imamo $A_1 = \sqrt{4} = 2 < 3$.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $A_n < 3$.

K.I. Kako je funkcija $t \mapsto \sqrt{t}$ strogo rastuća, vrijedi

$$A_{n+1} = \sqrt{4 + A_n} \stackrel{\text{P.I.}}{<} \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7} < 3.$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(b) **B.I.** Za $n = 1$ imamo $1 \leq \frac{1+3}{4} = 1$.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \leq \frac{n^2 + 3n}{4}$.

K.I. Prema pretpostavci indukcije je

$$1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \stackrel{\text{P.I.}}{\leq} \frac{n^2 + 3n}{4} + \sqrt{n+1}.$$

Tvrdnja bi vrijedila i za $n+1$ kada bi vrijedilo

$$\frac{n^2 + 3n}{4} + \sqrt{n+1} \leq \frac{(n+1)^2 + 3(n+1)}{4} = \frac{n^2 + 2n + 1 + 3n + 3}{4}.$$

Provjerimo to:

$$\begin{aligned} \frac{n^2 + 3n}{4} + \sqrt{n+1} \leq \frac{n^2 + 5n + 4}{4} &\iff 0 \leq \sqrt{n+1} \leq \frac{n}{2} + 1 \\ &\iff n+1 \leq \frac{n^2}{4} + n+1 \iff \frac{n^2}{4} \geq 0, \end{aligned}$$

što je istina. Pritom smo kvadrirali nejednakost nenegativnih brojeva, što je ekvivalentan prijelaz jer je $t \mapsto t^2$ strogo rastuća na $[0, +\infty)$. Dakle,

$$1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n+1} \stackrel{\text{P.I.}}{\leq} \frac{n^2 + 3n}{4} + \sqrt{n+1} \leq \frac{(n+1)^2 + 3(n+1)}{4}.$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Zadatak 7.14. Dokažite da za svaki $n \geq 2$ vrijedi

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

Rješenje. B.I. Za $n = 2$ imamo $\frac{2}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2$, tj. $1 < 1 + \frac{5}{6} < 2$.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \geq 2$ vrijedi

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

K.I. Označimo

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1} - 1}}_{2^{n+1} - 1 - 2^n + 1 = 2^n \text{ članova}}.$$

Treba dokazati $\frac{n+1}{2} < A < n + 1$.

- Prvi dio zbroja A je prema pretpostavci indukcije veći od $\frac{n}{2}$. U drugom dijelu svaki je član veći od $\frac{1}{2^{n+1}}$ (nazivnici su manji od 2^{n+1}), a članova ima 2^n . Dakle,

$$A > \frac{n}{2} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

- Prvi dio zbroja A je prema pretpostavci indukcije manji od n . U drugom dijelu prvi je član jednak $\frac{1}{2^n}$, a svaki je sljedeći manji od $\frac{1}{2^n}$. Dakle,

$$A < n + 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = n + 1.$$

Prema principu matematičke indukcije (s bazom $n_0 = 2$) tvrdnja vrijedi za svaki $n \geq 2$. □

Zadatak 7.15. Dokažite da za sve $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $a + b > 0$ i za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a + b)^n.$$

Rješenje. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b > 0$, proizvoljni, ali fiksni. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n .

B.I. Za $n = 1$ imamo $2^0(a + b) \geq (a + b)^1$, tj. $a + b \geq a + b$, što je istina.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a + b)^n$.

K.I. Želimo dokazati $2^n(a^{n+1} + b^{n+1}) \geq (a + b)^{n+1}$. Raspišimo desnu stranu; kako je $a + b > 0$, množenjem pretpostavke indukcije s $a + b$ dobivamo

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n \stackrel{\text{P.I.}}{\geq} (a + b)2^{n-1}(a^n + b^n).$$

Kada bi vrijedilo $2^{n-1}(a^n + b^n)(a + b) \leq 2^n(a^{n+1} + b^{n+1})$, imali bismo

$$(a + b)^{n+1} \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)(a + b) \leq 2^n(a^{n+1} + b^{n+1}),$$

što želimo dokazati. Pokažimo zato tu nejednakost. Množenjem s $\frac{1}{2^{n-1}} > 0$ dobivamo ekvivalentne nejednakosti

$$\begin{aligned} a^{n+1} + ab^n + a^nb + b^{n+1} &\leq 2a^{n+1} + 2b^{n+1} \\ \iff a^{n+1} - ab^n - a^nb + b^{n+1} &\geq 0 \\ \iff a(a^n - b^n) - b(a^n - b^n) &\geq 0 \\ \iff (a - b)(a^n - b^n) &\geq 0. \end{aligned}$$

Posljednju nejednakost dokazujemo razlikujući dva slučaja.

- I. $a \geq b$. Iz $a + b > 0$ slijedi $a > -b$, pa je $a \geq |b| \geq 0$. Zato je $a^n \geq |b|^n \geq b^n$. Dakle, $a - b \geq 0$ i $a^n - b^n \geq 0$, pa je $(a - b)(a^n - b^n) \geq 0$.
- II. $a < b$. Iz $a + b > 0$ slijedi $-a < b$, pa je $b > |a| \geq 0$. Zato je $b^n > |a|^n \geq a^n$. Dakle, $a - b < 0$ i $a^n - b^n < 0$, pa je $(a - b)(a^n - b^n) > 0$.

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$. Kako su a i b bili proizvoljni brojevi takvi da je $a + b > 0$, tvrdnja vrijedi za sve takve $a, b \in \mathbb{R}$. $\square$

7.5 Jaka indukcija i rekurzivno zadani nizovi

Zadatak 7.16. Niz $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prirodnih brojeva zadan je s

$$T_1 = T_2 = T_3 = 1, \quad T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} \quad \text{za } n \geq 4.$$

Dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $T_n < 2^n$.

Rješenje. Svaki član niza od četvrtog nadalje ovisi o trima prethodnim članovima, pa koristimo jaku indukciju s trima bazama.

B.I. Za $n = 1$: $T_1 = 1 < 2$; za $n = 2$: $T_2 = 1 < 4$; za $n = 3$: $T_3 = 1 < 8$.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \geq 3$ vrijedi

$$T_{n-2} < 2^{n-2}, \quad T_{n-1} < 2^{n-1}, \quad T_n < 2^n.$$

K.I. Kako je $n + 1 \geq 4$, vrijedi

$$T_{n+1} = T_n + T_{n-1} + T_{n-2} \stackrel{\text{P.I.}}{<} 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} = 2^{n+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{8} \cdot 2^{n+1} < 2^{n+1}.$$

Prema principu jake indukcije tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$. Da smo provjerili samo bazu $n = 1$, korak za $n + 1 = 2$ i $n + 1 = 3$ ne bi bio opravdan, jer T_2 i T_3 nisu dobiveni rekurzijom. $\square$

Zadatak 7.17. Neka je $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, takav da je $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Dokažite da je $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Označimo $s_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ i $m = s_1 = x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Množenjem dobivamo

$$m s_n = \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} = s_{n+1} + s_{n-1},$$

odnosno $s_{n+1} = m s_n - s_{n-1}$ za $n \geq 2$. Član s_{n+1} ovisi o dvama prethodnim članovima, pa koristimo inačicu indukcije s dvjema bazama.

B.I. $s_1 = m \in \mathbb{Z}$ i $s_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 = m^2 - 2 \in \mathbb{Z}$.

P.I. Pretpostavimo da za neki $n \geq 2$ vrijedi $s_{n-1} \in \mathbb{Z}$ i $s_n \in \mathbb{Z}$.

K.I. Tada je $s_{n+1} = m s_n - s_{n-1} \in \mathbb{Z}$, jer su zbroj, razlika i umnožak cijelih brojeva cijeli brojevi.

Prema principu matematičke indukcije (inačica s bazama $P(1)$, $P(2)$ i korakom $P(n-1) \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$) vrijedi $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. $\square$

7.6 Zadaci za samostalan rad

- 7.1.** Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- 7.2.** Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
- 7.3.** Dokažite da za svaki $x \neq 1$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.
- 7.4.** Dokažite da za svaki $n \geq 3$ vrijedi $2^{n-1} \geq n + 1$.
- 7.5.** Dokažite da je $4^n + 15n - 1$ djeljivo s 9 za svaki $n \in \mathbb{N}$.
- 7.6.** Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n! \geq 2^{n-1}$ te odredite za koje n vrijedi jednakost.
- 7.7.** (Bernoullijeva nejednakost) Dokažite da za svaki $x \geq -1$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
- 7.8.** Niz (a_n) zadan je s $a_1 = a_2 = 1$ i $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ za $n \geq 2$. Dokažite da je $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
- 7.9.** Ako je $x + \frac{1}{x} = 3$, izračunajte $x^4 + \frac{1}{x^4}$ bez određivanja broja x .

Poglavlje 8

Djeljivost i kongruencije

8.1 Djeljivost i prosti brojevi

U ovom poglavlju radimo sa skupovima

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{i} \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Na $\mathbb{N}$ su osnovne računske operacije zbrajanje i množenje, a na $\mathbb{Z}$ zbrajanje, oduzimanje i množenje. Dijeljenje općenito ne vodi do cijelog broja, pa ga zamjenjujemo dijeljenjem s ostatkom.

Teorem 8.1 (o dijeljenju s ostatkom). *Neka je $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada postoje jedinstveni $q \in \mathbb{Z}$ i $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ takvi da vrijedi*

$$m = n \cdot q + r.$$

Broj q zovemo kvocijent, a broj r ostatak pri dijeljenju broja m brojem n .

Napomena 8.2 (Oznaka za ostatak). Ostatak pri dijeljenju broja m brojem n kraće ćemo pisati $m \bmod n$. Primjerice, $38 \bmod 5 = 3$ jer je $38 = 5 \cdot 7 + 3$, a $(-38) \bmod 5 = 2$ jer je $-38 = 5 \cdot (-8) + 2$. Ostatak je uvijek nenegativan. Zapis $-38 = 5 \cdot (-7) - 3$ točna je jednakost, ali -3 nije ostatak. Oznaku $m \bmod n$ (broj) ne treba miješati s oznakom $a \equiv b \pmod{n}$ iz odjeljka o kongruencijama (tvrdnja).

Korisno je zapamtiti: ako je $m \bmod n = r \neq 0$, onda je $(-m) \bmod n = n - r$. Zaista, iz $m = nq + r$ slijedi $-m = n(-q - 1) + (n - r)$, a $0 < n - r < n$.

Zadatak 8.3. Podijelite 137 i -137 s 12.

Rješenje. Iz $12 \cdot 11 \leq 137 < 12 \cdot 12$ dobivamo $137 = 12 \cdot 11 + 5$, pa je kvocijent 11, a ostatak 5. Prema prethodnoj napomeni je $(-137) \bmod 12 = 12 - 5 = 7$; zaista, $-137 = 12 \cdot (-12) + 7$. Kvocijent je -12 , a ostatak 7. $\square$

Definicija 8.4. Neka su $m, n \in \mathbb{Z}$. Kažemo da n *dijeli* m , odnosno da je m *djeljiv* s n , i pišemo $n \mid m$, ako postoji $q \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = n \cdot q$. Tada kažemo i da je n *djelitelj* od m , a m *višekratnik* od n . Ako n ne dijeli m , pišemo $n \nmid m$.

Pazite na redoslijed: u zapisu $n \mid m$ lijevo stoji djelitelj. Tako je $2 \mid 6$, ali $6 \nmid 2$.

Primjer 8.5.

$$\begin{array}{ll} 2 \mid 4 \text{ jer je } 4 = 2 \cdot 2, & 5 \mid -5 \text{ jer je } -5 = 5 \cdot (-1), \\ -2 \mid 4 \text{ jer je } 4 = (-2) \cdot (-2), & 7 \mid 0 \text{ jer je } 0 = 7 \cdot 0, \\ 2 \mid -4 \text{ jer je } -4 = 2 \cdot (-2), & 0 \mid 0 \text{ jer je, npr., } 0 = 0 \cdot 31. \end{array}$$

Napomena 8.6 (Kako dokazati $n \nmid m$). Za $n \in \mathbb{N}$ teorem o dijeljenju s ostatkom daje: $n \mid m$ ako i samo ako je $m \bmod n = 0$. Zbog jedinstvenosti ostatka dovoljno je naći prikaz $m = nq + r$ s $0 < r < n$.

- Ako je $n = 0$: $0 \mid m$ samo za $m = 0$. Primjerice, $0 \nmid 7$ jer bi inače bilo $7 = 0 \cdot q = 0$, što je proturječenje.
- Ako je $n > 0$: $3 \nmid 8$ jer je $8 = 3 \cdot 2 + 2$ i $0 < 2 < 3$, tj. $8 \bmod 3 = 2 \neq 0$. Također $5 \nmid -17$ jer je $-17 = 5 \cdot (-4) + 3$, tj. $(-17) \bmod 5 = 3 \neq 0$.
- Ako je $n < 0$: vrijedi $n \mid m \iff -n \mid m$ jer je $m = nq = (-n)(-q)$. Zato, primjerice, $-5 \nmid 16$ jer $5 \nmid 16$ ($16 = 5 \cdot 3 + 1$).

Zadatak 8.7. Ispitajte svojstva relacije $\mid$ na skupovima $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$.

Rješenje. Na oba skupa relacija je:

- *refleksivna*: $k \mid k$ jer je $k = k \cdot 1$;
- *tranzitivna*: ako $a \mid b$ i $b \mid c$, onda je $b = ak$ i $c = b\ell$ za neke $k, \ell \in \mathbb{Z}$, pa je $c = (ak)\ell = a(k\ell)$, tj. $a \mid c$;
- nije *simetrična*: $2 \mid 6$ (jer je $6 = 2 \cdot 3$), ali $6 \nmid 2$ (jer je $2 \bmod 6 = 2 \neq 0$);
- nije *irefleksivna*: $3 \mid 3$ jer je $3 = 3 \cdot 1$.

Antisimetričnost ovisi o skupu.

- (a) Na $\mathbb{Z}$ relacija nije antisimetrična: $5 \mid -5$ i $-5 \mid 5$ (jer je $-5 = 5 \cdot (-1)$ i $5 = (-5) \cdot (-1)$), ali $5 \neq -5$.
- (b) Na $\mathbb{N}$ relacija jest antisimetrična. Neka $a \mid b$ i $b \mid a$, tj. $b = ak$ i $a = b\ell$. Tada je $a = b\ell = a(k\ell)$, pa dijeljenjem s $a > 0$ dobivamo $k\ell = 1$. Kako su $a, b > 0$, i k, ℓ su prirodni brojevi, pa je $k = \ell = 1$ i $a = b$.

Dakle, $\mid$ je relacija parcijalnog uređaja na $\mathbb{N}$, ali ne i na $\mathbb{Z}$. □

Zadatak 8.8. Neka su $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dokažite:

- (a) ako $a \mid b$ i $a \mid c$, onda $a \mid b + c$ i $a \mid b - c$;
- (b) ako $a \mid b$ ili $a \mid c$, onda $a \mid bc$.

Vrijede li obrati tih tvrdnji?

Rješenje. (a) Iz $a \mid b$ i $a \mid c$ slijedi $b = ak$ i $c = a\ell$ za neke $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Tada je $b + c = a(k + \ell)$ i $b - c = a(k - \ell)$, a $k \pm \ell \in \mathbb{Z}$. Dakle, $a \mid b + c$ i $a \mid b - c$. Općenitije, $a \mid ub + vc$ za sve $u, v \in \mathbb{Z}$.

(b) Ako je $b = ak$, onda je $bc = a(kc)$, pa $a \mid bc$. Slučaj $a \mid c$ je analogan.

Obrati ne vrijede.

- (a) Vrijedi $2 \mid 3 - 1$ i $2 \mid 3 + 1$, ali $2 \nmid 3$ i $2 \nmid 1$.
- (b) Vrijedi $6 \mid 2 \cdot 3$, ali $6 \nmid 2$ i $6 \nmid 3$. □

Zadatak 8.9. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi $3 \mid n^3 - n$.

Rješenje. Prvi način. Vrijedi $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$, a to je produkt triju uzastopnih cijelih brojeva. Ostaci tih brojeva pri dijeljenju s 3 su tri uzastopna broja u ciklusu 0, 1, 2, 0, 1, 2, ..., pa su to upravo 0, 1, 2 u nekom poretaku. Dakle, jedan od faktora djeljiv je s 3, pa je i produkt.

Drugi način. Razlikujemo slučajeve prema ostatku n mod 3. Pritom je $k \in \mathbb{Z}$.

- $n = 3k$: $n^3 - n = 27k^3 - 3k = 3(9k^3 - k)$.
- $n = 3k + 1$: $n^3 - n = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 - 3k - 1 = 3(9k^3 + 9k^2 + 2k)$.
- $n = 3k + 2$: $n^3 - n = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 - 3k - 2 = 3(9k^3 + 18k^2 + 11k + 2)$.

U svakom slučaju $3 \mid n^3 - n$.

Usput, među brojevima $n - 1$ i n jedan je paran, pa je $n^3 - n$ djeljiv i s 2. Kako je djeljiv s 2 i s 3, djeljiv je i sa 6 (vidi korolar 8.33 u sljedećem odjeljku). $\square$

Zadatak 8.10. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi $5 \mid n^5 - n$ i $7 \mid n^7 - n$.

Rješenje. Rastavimo

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1).$$

Promatramo ostatak n mod 5; neka je $k \in \mathbb{Z}$.

- Ako je $n \bmod 5 \in \{0, 1, 4\}$, onda je jedan od faktora n , $n - 1$, $n + 1$ djeljiv s 5 (za $n = 5k + 4$ je $n + 1 = 5(k + 1)$).
- $n = 5k + 2$: $n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1)$.
- $n = 5k + 3$: $n^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5(5k^2 + 6k + 2)$.

U svakom slučaju jedan faktor je djeljiv s 5, pa $5 \mid n^5 - n$.

Analogno, $n^7 - n = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$. Ako je $n \bmod 7 \in \{0, 1, 6\}$, s 7 je djeljiv jedan od faktora n , $n - 1$, $n + 1$. U preostalim slučajevima:

- $n = 7k + 2$: $n^2 + n + 1 = 49k^2 + 35k + 7 = 7(7k^2 + 5k + 1)$;
- $n = 7k + 3$: $n^2 - n + 1 = 49k^2 + 35k + 7 = 7(7k^2 + 5k + 1)$;
- $n = 7k + 4$: $n^2 + n + 1 = 49k^2 + 63k + 21 = 7(7k^2 + 9k + 3)$;
- $n = 7k + 5$: $n^2 - n + 1 = 49k^2 + 63k + 21 = 7(7k^2 + 9k + 3)$.

Dakle, $7 \mid n^7 - n$. $\square$

Definicija 8.11. Kažemo da je prirodan broj p *prost* (ili *prim-broj*) ako vrijedi:

- (i) $p > 1$,
- (ii) $(\forall n \in \mathbb{N}) (n \mid p \Rightarrow n \in \{1, p\})$.

Prirodan broj veći od 1 koji nije prost zove se *složen*. Broj 1 nije ni prost ni složen.

Prvih nekoliko prostih brojeva je 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ... Jedini paran prost broj je 2. Svaki prirodan broj $n > 1$ ima barem jednog prostog djelitelja.

Teorem 8.12 (Euklid). *Prostih brojeva ima beskonačno mnogo.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno: neka su $p_1, \dots, p_k$ svi prosti brojevi. Broj $N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1 > 1$ ima prostog djelitelja p , a p mora biti jedan od brojeva p_i . No $p_i \mid N$ i $p_i \mid p_1 \cdots p_k$ povlače $p_i \mid N - p_1 \cdots p_k = 1$, što je nemoguće jer je $p_i > 1$. To je proturječenje. (Nije tvrdnja da je sam N prost: npr. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$.) $\square$

Teorem 8.13 (Osnovni teorem aritmetike). *Za svaki prirodan broj $n > 1$ postoje jedinstveni prosti brojevi $q_1 < q_2 < \cdots < q_l$ i prirodni brojevi $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ takvi da je*

$$n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_l^{\alpha_l}.$$

Drugim riječima, svaki prirodan broj veći od 1 može se na jedinstven način, do na poredak faktora, zapisati kao produkt prostih brojeva.

Primjer 8.14. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$, $899 = 29 \cdot 31$. Prost broj, npr. $7 = 7$, produkt je jednog prostog broja. Broj 1 smatramo produktom nula prostih brojeva (praznim produktom).

Zadatak 8.15. Neka je m produkt prvih 100 prostih brojeva.

- (a) Odredite posljednju znamenku broja m .
- (b) Odredite ostatak pri dijeljenju broja m s 4.

Rješenje. (a) Vrijedi $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p_{100} = 10 \cdot (3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots p_{100})$, pa $10 \mid m$. Posljednja znamenka broja m je 0.

(b) Vrijedi $m = 2 \cdot (p_2 p_3 \cdots p_{100})$. Prost brojevi $p_2, \dots, p_{100}$ su neparni, pa im je i produkt neparan, recimo $2k + 1$. Tada je $m = 2(2k + 1) = 4k + 2$, a kako je $0 \leq 2 < 4$, ostatak je 2. $\square$

Zadatak 8.16. Može li zbroj četiriju uzastopnih cijelih brojeva biti prost broj?

Rješenje. Zbroj je $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 = 2(2n + 3)$, dakle paran. Ako je prost, mora biti jednak jedinom parnom prostom broju 2. Iz $2(2n + 3) = 2$ slijedi $2n + 3 = 1$, tj. $n = -1$. Dakle, može, ali samo u jednom slučaju: $(-1) + 0 + 1 + 2 = 2$. Posebno, zbroj četiriju uzastopnih *prirodnih* brojeva nikad nije prost. $\square$

Zadatak 8.17. Ako je n neparan, odredite ostatak pri dijeljenju broja n^2 s 8.

Rješenje. Neka je $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Tada je

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1.$$

Broj $k(k + 1)$ produkt je dvaju uzastopnih cijelih brojeva, pa je paran: $k(k + 1) = 2\ell$. Slijedi $n^2 = 8\ell + 1$, a kako je $0 \leq 1 < 8$, ostatak je 1. $\square$

Zadatak 8.18. Neka su $n_1 = \overline{abc}$ i $n_2 = \overline{def}$ dva troznamenkasta prirodna broja čiji je zbroj djeljiv s 37. Dokažite da je tada i šesteroznamenkasti broj $n = \overline{abcdef}$ djeljiv s 37.

Rješenje. Iz $37 \mid n_1 + n_2$ slijedi $n_1 + n_2 = 37k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Uočimo da je $999 = 27 \cdot 37$. Tada je

$$n = \overline{abc000} + \overline{def} = 1000 n_1 + n_2 = 999 n_1 + (n_1 + n_2) = 37 \cdot 27 n_1 + 37k = 37(27n_1 + k),$$

pa $37 \mid n$. $\square$

8.2 Najveća zajednička mjera i Euklidov algoritam

Definicija 8.19. Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ takvi da nisu oba jednaka 0. Za $d \in \mathbb{N}$ kažemo da je *najveća zajednička mjera* brojeva a i b , i pišemo $d = M(a, b)$, ako vrijedi:

- (i) $d \mid a$ i $d \mid b$,
- (ii) ako $c \in \mathbb{Z}$ zadovoljava $c \mid a$ i $c \mid b$, onda $c \mid d$.

Napomena 8.20. U skripti za predavanja $M(m, n)$ definira se za $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; ovdje dopuštamo da jedan od brojeva bude 0. Važno je da je d prirodan broj.

- *Jedinstvenost.* Ako su d i d' dvije najveće zajedničke mjere brojeva a i b , onda prema (ii) vrijedi $d \mid d'$ i $d' \mid d$. Kako su $d, d' \in \mathbb{N}$, a relacija $\mid$ je antisimetrična na $\mathbb{N}$, slijedi $d = d'$.
- Budući da predznak ne utječe na djeljivost, vrijedi $M(a, b) = M(|a|, |b|)$, pa se pri računanju možemo ograničiti na nenegativne brojeve.
- Za $a \neq 0$ vrijedi $M(a, 0) = |a|$. Naime, svaki cijeli broj dijeli 0, pa su zajednički djelitelji brojeva a i 0 upravo djelitelji od a . Među njima $|a|$ ima svojstva (i) i (ii).

Teorem 8.21. Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, ne oba jednaka 0. Tada je $M(a, b)$ najmanji prirodan broj oblika $ka + lb$, gdje su $k, l \in \mathbb{Z}$:

$$M(a, b) = \min(\{ka + lb \mid k, l \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}).$$

Dokaz. Skup $S = \{ka + lb \mid k, l \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$ nije prazan jer sadrži $a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 > 0$. Svaki neprazan podskup od $\mathbb{N}$ ima najmanji element, pa postoji $c = \min S$. Neka je $c = k_0a + \ell_0b$ i $d = M(a, b)$. Dokazujemo $d \mid c$ i $c \mid d$.

$d \mid c$: kako $d \mid a$ i $d \mid b$, vrijedi $d \mid k_0a$ i $d \mid \ell_0b$, pa $d \mid k_0a + \ell_0b = c$.

$c \mid d$: dovoljno je dokazati $c \mid a$ i $c \mid b$, jer tada iz svojstva (ii) slijedi $c \mid d$. Pretpostavimo da $c \nmid a$. Tada je $a = qc + r$, gdje je $0 < r < c$. No

$$r = a - qc = a - q(k_0a + \ell_0b) = (1 - qk_0)a + (-q\ell_0)b,$$

pri čemu su $1 - qk_0, -q\ell_0 \in \mathbb{Z}$. Dakle $r \in S$ i $r < c$, što je u proturječju s $c = \min S$. Zato $c \mid a$, a analogno $c \mid b$.

Kako su $c, d \in \mathbb{N}$, iz $c \mid d$ i $d \mid c$ slijedi $c = d$. □

Korolar 8.22 (Bézoutova jednakost). Za $a, b \in \mathbb{Z}$, ne oba jednaka 0, postoje $k, l \in \mathbb{Z}$ takvi da je $M(a, b) = ka + lb$.

Zadatak 8.23. Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, ne oba jednaka 0. Dokažite:

- (a) $M(a, b) = M(a, a + b)$;
- (b) $M(a, b) = M(b, a - b)$;
- (c) $M(a, b) = M(b, a \bmod b)$ ako je $b \in \mathbb{N}$.

Rješenje. (a) Neka je $d = M(a, b)$ i $e = M(a, a + b)$. Iz $d \mid a$ i $d \mid b$ slijedi $d \mid a + b$, pa je d zajednički djelitelj brojeva a i $a + b$; prema svojstvu (ii) za e vrijedi $d \mid e$. Obratno, iz $e \mid a$ i $e \mid a + b$ slijedi $e \mid (a + b) - a = b$, pa je e zajednički djelitelj brojeva a i b , i zato $e \mid d$. Kako su $d, e \in \mathbb{N}$, slijedi $d = e$.

(b) Isto: iz $d \mid a$ i $d \mid b$ slijedi $d \mid a - b$; obratno, iz $c \mid b$ i $c \mid a - b$ slijedi $c \mid (a - b) + b = a$. Parovi a, b i $b, a - b$ imaju iste zajedničke djelitelje, pa i istu najveću zajedničku mjeru.

(c) Neka je $a = bq + r$, $r = a \bmod b$. Iz $c \mid a$ i $c \mid b$ slijedi $c \mid a - bq = r$, a iz $c \mid b$ i $c \mid r$ slijedi $c \mid bq + r = a$. Parovi a, b i b, r imaju iste zajedničke djelitelje, pa je $M(a, b) = M(b, r)$. (Za $r = 0$ to je $M(a, b) = M(b, 0) = b$.) $\square$

Primjer 8.24. Uzastopnom primjenom tvrdnje (c) dobivamo

$$M(420, 195) = M(195, 30) = M(30, 15) = M(15, 0) = 15,$$

jer je $420 = 195 \cdot 2 + 30$, $195 = 30 \cdot 6 + 15$ i $30 = 15 \cdot 2 + 0$.

Prethodni primjer opisuje opći postupak.

Napomena 8.25 (Euklidov algoritam). Neka su $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq b$. Veći broj podijelimo manjim, a zatim veći broj zamijenimo ostatkom. Postupak ponavljamo dok ostatak ne postane 0:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_1 + r_1, & 0 \leq r_1 < b, \\ b &= r_1 \cdot q_2 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2, \\ &\vdots \\ r_{i-1} &= r_i \cdot q_{i+1} + 0. \end{aligned}$$

Ostaci strogo padaju, pa postupak završava. Posljednji ostatak različit od nule jest najveća zajednička mjera: zbog prethodnog zadatka je $M(a, b) = M(b, r_1) = M(r_1, r_2) = \dots = M(r_i, 0) = r_i$. Ako su brojevi negativni, predznake zanemarimo jer je $M(a, b) = M(|a|, |b|)$.

Zadatak 8.26. Euklidovim algoritmom odredite $M(3094, 19950)$ te je prikažite u obliku $k \cdot 19950 + \ell \cdot 3094$, gdje su $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Rješenje. Euklidov algoritam daje

$$\begin{aligned} 19950 &= 3094 \cdot 6 + 1386, & 3094 &= 1386 \cdot 2 + 322, & 1386 &= 322 \cdot 4 + 98, \\ 322 &= 98 \cdot 3 + 28, & 98 &= 28 \cdot 3 + 14, & 28 &= 14 \cdot 2 + 0. \end{aligned}$$

Posljednji ostatak različit od nule je 14, pa je $M(3094, 19950) = 14$. Kraće to zapisujemo u retku, s količnicima ispod:

brojevi	19950	3094	1386	322	98	28	14	0
količnici		6	2	4	3	3	2	

(svaki broj podijeljen sljedećim daje količnik upisan ispod sljedećeg i ostatak upisan iza njega).

Prikaz preko linearne kombinacije. Krenemo od pretposljednje jednakosti i redom uvrštavamo ostatke iz prethodnih jednakosti, svaki put sređujući koeficijente:

$$\begin{aligned} 14 &= 98 - 3 \cdot 28 = 98 - 3 \cdot (322 - 3 \cdot 98) = 10 \cdot 98 - 3 \cdot 322 \\ &= 10 \cdot (1386 - 4 \cdot 322) - 3 \cdot 322 = 10 \cdot 1386 - 43 \cdot 322 \\ &= 10 \cdot 1386 - 43 \cdot (3094 - 2 \cdot 1386) = 96 \cdot 1386 - 43 \cdot 3094 \\ &= 96 \cdot (19950 - 6 \cdot 3094) - 43 \cdot 3094 = 96 \cdot 19950 - 619 \cdot 3094. \end{aligned}$$

Dakle, $M(3094, 19950) = 14 = 96 \cdot 19950 + (-619) \cdot 3094$.

Kraći zapis (shema). Iste koeficijente možemo dobiti ispod tablice. Ispod posljednjeg ostatka različitog od nule (14) pišemo 0, a ispod broja lijevo od njega (28) pišemo 1. Dalje idemo ulijevo:

novi broj jednak je broju dva mjesta desno umanjenom za umnožak susjeda desno i količnika iznad tog susjeda:

brojevi	19950	3094	1386	322	98	28	14	0
količnici		6	2	4	3	3	2	
koeficijenti	-619	96	-43	10	-3	1	0	

Redom: $-3 = 0 - 3 \cdot 1$, $10 = 1 - 3 \cdot (-3)$, $-43 = -3 - 4 \cdot 10$, $96 = 10 - 2 \cdot (-43)$, $-619 = -43 - 6 \cdot 96$. Za svaka dva susjedna broja u prvom retku vrijedi: mjera je jednaka zbroju umnožaka ukriž, tj. svaki od ta dva broja množimo koeficijentom ispod drugoga. Na početku tablice to daje traženi prikaz

$$14 = 96 \cdot 19950 + (-619) \cdot 3094,$$

a na kraju trivijalnu jednakost $14 = 0 \cdot 28 + 1 \cdot 14$.

Pravilo slijedi iz jednakosti algoritma. Neka su u, v susjedni brojevi u prvom retku, s koeficijentom y ispod u i x ispod v , takvi da je $14 = x \cdot u + y \cdot v$. Ako je w broj lijevo od u , onda je $w = u \cdot q + v$, gdje je q količnik ispod u . Tada je $v = w - qu$, pa

$$14 = xu + y(w - qu) = y \cdot w + (x - qy) \cdot u,$$

a $x - qy$ je upravo koeficijent koji shema upisuje ispod w . Dakle, jednakost ostaje istinita pri svakom koraku ulijevo. $\square$

Zadatak 8.27. Odredite $M(483327, 226304)$ i prikažite je kao cjelobrojnu linearnu kombinaciju brojeva 483327 i 226304.

Rješenje. Primijenimo shemu iz prethodnog zadatka:

brojevi	483327	226304	30719	11271	8177	3094	1989	1105	884	221	0
količnici		2	7	2	1	2	1	1	1	4	
koef.	472	-221	30	-11	8	-3	2	-1	1	0	

Tablica sadrži dijeljenja $483327 = 226304 \cdot 2 + 30719$, $226304 = 30719 \cdot 7 + 11271$ itd., a posljednje dijeljenje je $884 = 221 \cdot 4 + 0$. Dakle, $M(483327, 226304) = 221$ i

$$221 = 472 \cdot 226304 + (-221) \cdot 483327.$$

Provjera: $472 \cdot 226304 = 106815488$ i $221 \cdot 483327 = 106815267$, a razlika je 221. $\square$

Zadatak 8.28. Odredite $k, \ell \in \mathbb{Z}$ takve da je $M(3050, 2107) = k \cdot 3050 + \ell \cdot 2107$.

Rješenje. Euklidov algoritam:

$$\begin{aligned} 3050 &= 2107 \cdot 1 + 943, & 2107 &= 943 \cdot 2 + 221, & 943 &= 221 \cdot 4 + 59, \\ 221 &= 59 \cdot 3 + 44, & 59 &= 44 \cdot 1 + 15, & 44 &= 15 \cdot 2 + 14, \\ 15 &= 14 \cdot 1 + 1, & 14 &= 1 \cdot 14 + 0. \end{aligned}$$

Dakle $M(3050, 2107) = 1$, tj. brojevi su relativno prosti (vidi definiciju niže). Shema:

brojevi	3050	2107	943	221	59	44	15	14	1	0
količnici		1	2	4	3	1	2	1	14	
koef.	-207	143	-64	15	-4	3	-1	1	0	

Slijedi $1 = 143 \cdot 3050 + (-207) \cdot 2107$, tj. $k = 143$, $\ell = -207$. Provjera: $143 \cdot 3050 = 436150$, $207 \cdot 2107 = 436149$. $\square$

Definicija 8.29. Za brojeve $a, b \in \mathbb{Z}$ kažemo da su *relativno prosti* ako je $M(a, b) = 1$.

Propozicija 8.30. Brojevi a i b relativno su prosti ako i samo ako postoje $k, \ell \in \mathbb{Z}$ takvi da je $ka + \ell b = 1$.

Dokaz. Ako je $M(a, b) = 1$, takvi k, ℓ postoje prema Bézoutovoj jednakosti. Obratno, ako je $ka + \ell b = 1$, onda je 1 u skupu iz teorema 8.21, a očito je najmanji prirodan broj, pa je $M(a, b) = 1$. $\square$

Ta je karakterizacija vrlo korisna u dokazima.

Zadatak 8.31. Dokažite da se razlomak $\frac{7n+1}{21n+4}$ ne može skratiti ni za koji $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Treba dokazati da su $7n+1$ i $21n+4$ relativno prosti. Primjenom tvrdnje $M(a, b) = M(a, b-a)$ dobivamo

$$M(7n+1, 21n+4) = M(7n+1, 14n+3) = M(7n+1, 7n+2) = M(7n+1, 1) = 1,$$

jer je općenito $M(a, 1) = 1$: jedini prirodan djelitelj od 1 je 1.

Drugi način: $3 \cdot (7n+1) + (-1) \cdot (21n+4) = -1$, pa je $(-3)(7n+1) + 1 \cdot (21n+4) = 1$ i prema propoziciji 8.30 brojevi su relativno prosti. $\square$

Lema 8.32 (Euklidova lema). Ako $a \mid bc$ i $M(a, b) = 1$, onda $a \mid c$.

Dokaz. Iz $M(a, b) = 1$ slijedi $1 = ax + by$ za neke $x, y \in \mathbb{Z}$. Pomnožimo li tu jednakost s c , dobivamo

$$c = acx + bcy.$$

Oba pribrojnika djeljiva su s a (drugi jer $a \mid bc$), pa $a \mid c$. $\square$

Korolar 8.33. Ako $a \mid c$, $b \mid c$ i $M(a, b) = 1$, onda $ab \mid c$.

Dokaz. Iz $a \mid c$ slijedi $c = am$ za neki $m \in \mathbb{Z}$. Tada $b \mid am$ i $M(b, a) = 1$, pa prema Euklidovoj lemi $b \mid m$, tj. $m = bn$. Dakle, $c = abn$, pa $ab \mid c$. $\square$

Korolar 8.34. Ako je p prost broj i $p \mid ab$, onda $p \mid a$ ili $p \mid b$.

Dokaz. Neka $p \mid ab$ i $p \nmid a$; dokazujemo $p \mid b$. Jedini prirodni djelitelji od p su 1 i p , a p nije zajednički djelitelj brojeva p i a jer $p \nmid a$. Zato je jedini (pa i najveći) prirodni zajednički djelitelj 1, tj. $M(p, a) = 1$. Prema Euklidovoj lemi $p \mid b$. $\square$

U dokazu smo vidjeli korisnu činjenicu: *prost broj p relativno je prost s cijelim brojem a ako i samo ako $p \nmid a$.*

Napomena 8.35. Bez pretpostavke o (relativnoj) prostosti gornje tvrdnje ne vrijede: $6 \mid 8 \cdot 9 = 72$, ali $6 \nmid 8$ i $6 \nmid 9$.

Zadatak 8.36. Rastavom na proste faktore odredite $M(84, 126)$ te najmanji prirodan broj djeljiv i s 84 i sa 126 (najmanji zajednički višekratnik).

Rješenje. Vrijedi $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ i $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Najveća zajednička mjera produkt je zajedničkih prostih faktora s manjim od dvaju eksponenata: $M(84, 126) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. Najmanji zajednički višekratnik dobivamo s većim eksponentima: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$. Provjera Euklidovim algoritmom: $126 = 84 \cdot 1 + 42$, $84 = 42 \cdot 2 + 0$. Za velike brojeve ovaj je način nepraktičan jer zahtijeva rastav na proste faktore, a Euklidov algoritam ne zahtijeva. $\square$

8.3 Kongruencije

Definicija 8.37. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Za $a, b \in \mathbb{Z}$ kažemo da su *kongruentni modulo n* i pišemo

$$a \equiv b \pmod{n}$$

ako $n \mid a - b$. Drugim riječima, a i b razlikuju se za višekratnik od n . Ako $n \nmid a - b$, pišemo $a \not\equiv b \pmod{n}$.

Primjer 8.38. $10 \equiv 14 \pmod{4}$ jer je $10 - 14 = -4$ i $4 \mid -4$. Također $10 \equiv -2 \pmod{4}$ jer je $10 - (-2) = 12 = 4 \cdot 3$. S druge strane, $1 \not\equiv 3 \pmod{4}$ jer $4 \nmid 1 - 3 = -2$.

Propozicija 8.39. Vrijedi $a \equiv b \pmod{n}$ ako i samo ako a i b daju isti ostatak pri dijeljenju s n .

Dokaz. Neka je $a = q_1n + r_1$ i $b = q_2n + r_2$, gdje su $r_1, r_2 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Tada je

$$a - b = (q_1 - q_2)n + (r_1 - r_2),$$

pa $n \mid a - b$ ako i samo ako $n \mid r_1 - r_2$. No $r_1 - r_2 \in \{-(n-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1\}$, a jedini višekratnik od n u tom skupu je 0. Dakle, $n \mid a - b \iff r_1 = r_2$. $\square$

Posebno, ako je r ostatak pri dijeljenju broja a s n , onda je $a \equiv r \pmod{n}$: iz $a = nq + r$ slijedi $n \mid nq = a - r$. Zato ostatak broja a pri dijeljenju s n tražimo kao jedini $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ za koji je $a \equiv r \pmod{n}$.

Propozicija 8.40. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ kongruencija modulo n relacija je ekvivalencije na $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} &(\forall a \in \mathbb{Z}) (a \equiv a \pmod{n}), \\ &(\forall a, b \in \mathbb{Z}) (a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}), \\ &(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) (a \equiv b \pmod{n} \wedge b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}). \end{aligned}$$

Dokaz. **Refleksivnost:** $a - a = 0$ i $n \mid 0$. **Simetričnost:** ako $n \mid a - b$, onda $n \mid (-1)(a - b) = b - a$. **Tranzitivnost:** ako $n \mid a - b$ i $n \mid b - c$, onda $n \mid (a - b) + (b - c) = a - c$. $\square$

Relacija nije irefleksivna ($5 \equiv 5 \pmod{n}$) ni antisimetrična: $0 \equiv n \pmod{n}$ i $n \equiv 0 \pmod{n}$, a $n \neq 0$.

Napomena 8.41 (Klase ostataka). Klase ekvivalencije ove relacije su

$$\begin{aligned} [0]_n &= \{x \in \mathbb{Z} \mid n \mid x - 0\} = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\} = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}, \\ [1]_n &= \{x \in \mathbb{Z} \mid n \mid x - 1\} = \{kn + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, 1 - 2n, 1 - n, 1, n + 1, 2n + 1, \dots\}, \\ [2]_n &= \{kn + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \dots, \\ [n-1]_n &= \{kn + n - 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{(k+1)n + (-1) \mid k+1 \in \mathbb{Z}\} = [-1]_n. \end{aligned}$$

Dalje se klase ponavljaju: $[n]_n = [0]_n$, $[n+1]_n = [1]_n$ itd. Prema propoziciji 8.39, u istoj su klasi točno oni brojevi koji imaju isti ostatak pri dijeljenju s n . Zato postoji točno n klasa: $[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n$.

Računanje s kongruencijama

Propozicija 8.42. Ako je $a \equiv b \pmod{n}$ i $c \equiv d \pmod{n}$, onda je

$$(a) \quad a + c \equiv b + d \pmod{n},$$

- (b) $a - c \equiv b - d \pmod{n}$,
 (c) $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$,
 (d) $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Kongruencije s istim modulom smijemo, dakle, međusobno zbrajati, oduzimati i množiti te potencirati prirodnim brojem, baš kao jednakosti.

Dokaz. Pretpostavka znači $n \mid a - b$ i $n \mid c - d$.

- (a) Tada $n \mid (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$, pa je $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.
 (b) Tada $n \mid (a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d)$, pa je $a - c \equiv b - d \pmod{n}$.
 (c) Iz $n \mid a - b$ slijedi $n \mid c(a - b)$, a iz $n \mid c - d$ slijedi $n \mid b(c - d)$. Zato

$$n \mid c(a - b) + b(c - d) = ca - cb + bc - bd = ac - bd,$$

tj. $ac \equiv bd \pmod{n}$.

(d) Indukcijom po k . Za $k = 1$ to je pretpostavka. Ako je $a^k \equiv b^k \pmod{n}$, onda primjenom (c) na tu kongruenciju i na $a \equiv b \pmod{n}$ dobivamo $a^{k+1} = a^k \cdot a \equiv b^k \cdot b = b^{k+1} \pmod{n}$. $\square$

Napomena 8.43. Kako je $c \equiv c \pmod{n}$, iz $a \equiv b \pmod{n}$ slijedi i

$$a + c \equiv b + c \pmod{n} \quad \text{i} \quad a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{n}$$

za bilo koji $c \in \mathbb{Z}$. Kongruenciju dakle smijemo pomnožiti cijelim brojem. Primjerice, iz $12 \equiv 27 \pmod{5}$ množenjem s 3 (zapravo množenjem s kongruencijom $3 \equiv 3 \pmod{5}$) dobivamo $36 \equiv 81 \pmod{5}$.

Napomena 8.44. Kongruencije općenito *ne smijemo kratiti*, čak ni brojem različitim od nule. Vrijedi $6 \equiv 18 \pmod{4}$ jer $4 \mid -12$, ali $1 \not\equiv 3 \pmod{4}$. Isto tako $12 \equiv 42 \pmod{10}$, tj. $6 \cdot 2 \equiv 6 \cdot 7 \pmod{10}$, ali $2 \not\equiv 7 \pmod{10}$. Kratiti smijemo samo brojem koji je relativno prost s modulom.

Propozicija 8.45. Ako je $ma \equiv mb \pmod{n}$ i $M(m, n) = 1$, onda je $a \equiv b \pmod{n}$.

Dokaz. Iz $ma \equiv mb \pmod{n}$ slijedi $n \mid ma - mb = m(a - b)$. Kako je $M(n, m) = 1$, Euklidova lema daje $n \mid a - b$, tj. $a \equiv b \pmod{n}$. $\square$

Zadatak 8.46. Odredite ostatak pri dijeljenju broja $N = 325 \cdot 837 - 258 \cdot 392$ brojem 9.

Rješenje. Tražimo $r \in \{0, 1, \dots, 8\}$ takav da je $N \equiv r \pmod{9}$. Dijeljenjem s 9 dobivamo

$$325 = 9 \cdot 36 + 1, \quad 837 = 9 \cdot 93 + 0, \quad 258 = 9 \cdot 28 + 6, \quad 392 = 9 \cdot 43 + 5,$$

pa je $325 \equiv 1$, $837 \equiv 0$, $258 \equiv 6$ i $392 \equiv 5 \pmod{9}$. Prema propoziciji 8.42,

$$N \equiv 1 \cdot 0 - 6 \cdot 5 = -30 \equiv -30 + 36 = 6 \pmod{9}.$$

Kako je $0 \leq 6 < 9$, broj N pri dijeljenju s 9 daje ostatak 6. $\square$

Zadatak 8.47. Odredite posljednju znamenku broja $N = 43567 \cdot 23408 \cdot 32147 - 2543$.

Rješenje. Posljednja znamenka prirodnog broja jednaka je njegovu ostatku pri dijeljenju s 10. Tražimo, dakle, $0 \leq r \leq 9$ takav da je $N \equiv r \pmod{10}$:

$$N \equiv 7 \cdot 8 \cdot 7 - 3 = 56 \cdot 7 - 3 \equiv 6 \cdot 7 - 3 = 39 \equiv 9 \pmod{10}.$$

Može i s negativnim predstavnicima: $N \equiv (-3) \cdot (-2) \cdot (-3) - 3 = -21 \equiv 9 \pmod{10}$. Očito je $N > 0$, pa je posljednja znamenka broja N jednaka 9. $\square$

Zadatak 8.48. Odredite ostatak pri dijeljenju broja 3^{71} s 41.

Rješenje. Ideja je naći potenciju broja 3 koja daje *lijep* ostatak pri dijeljenju s 41 (najbolje 1 ili -1 , jer se lako potenciraju). Potencija $3^0 = 1$ ne pomaže. Računamo:

$$3^1 = 3, \quad 3^2 = 9, \quad 3^3 = 27, \quad 3^4 = 81 \equiv 40 \equiv -1 \pmod{41}.$$

Kako je $71 = 4 \cdot 17 + 3$, vrijedi

$$3^{71} = (3^4)^{17} \cdot 3^3 \equiv (-1)^{17} \cdot 27 = -27 \equiv -27 + 41 = 14 \pmod{41}.$$

Kako je $0 \leq 14 < 41$, ostatak je 14. □

Zadatak 8.49. Odredite ostatak pri dijeljenju broja $N = 225^{52} \cdot 113^{23} \cdot 557^{29} + 240^{157} \cdot 518^{258}$ brojem 37.

Rješenje. Najprije reduciramo baze:

$$225 = 37 \cdot 6 + 3, \quad 113 = 37 \cdot 3 + 2, \quad 557 = 37 \cdot 15 + 2, \quad 240 = 37 \cdot 6 + 18, \quad 518 = 37 \cdot 14,$$

pa je $225 \equiv 3$, $113 \equiv 2$, $557 \equiv 2$, $240 \equiv 18$ i $518 \equiv 0 \pmod{37}$. Uz $6^2 = 36 \equiv -1 \pmod{37}$ dobivamo

$$N \equiv 3^{52} \cdot 2^{23} \cdot 2^{29} + 18^{157} \cdot 0^{258} = 3^{52} \cdot 2^{52} = 6^{52} = (6^2)^{26} \equiv (-1)^{26} = 1 \pmod{37}.$$

Traženi ostatak je 1. □

Zadatak 8.50. Odredite posljednje dvije znamenke broja 205^{205} .

Rješenje. Tražimo ostatak pri dijeljenju sa 100. Vrijedi $205 \equiv 5 \pmod{100}$ i $125 \equiv 25 \pmod{100}$, pa je $5^3 \equiv 5^2 \pmod{100}$. Množenjem s 5^k slijedi $5^{k+3} \equiv 5^{k+2} \pmod{100}$, tj. eksponent možemo smanjivati za 1 sve dok je barem 3:

$$205^{205} \equiv 5^{205} = 5^{202} \cdot 125 \equiv 5^{202} \cdot 25 = 5^{204} \equiv 5^{203} \equiv \dots \equiv 5^3 = 125 \equiv 25 \pmod{100}.$$

Posljednje dvije znamenke broja 205^{205} su 25. □

Zadatak 8.51. Odredite ostatak pri dijeljenju broja 2^{100} s (a) 11, (b) 25, (c) 62.

Rješenje. (a) $2^5 = 32 = 33 - 1 \equiv -1 \pmod{11}$, pa je $2^{100} = (2^5)^{20} \equiv (-1)^{20} = 1 \pmod{11}$. Ostatak je 1.

(b) $2^{10} = 1024 = 1025 - 1 \equiv -1 \pmod{25}$, pa je $2^{100} = (2^{10})^{10} \equiv (-1)^{10} = 1 \pmod{25}$. Ostatak je 1 (posljednje dvije znamenke broja 2^{100} su zato 01, 26, 51 ili 76).

(c) $2^6 = 64 \equiv 2 \pmod{62}$. Množenjem s 2^{k-1} dobivamo $2^{k+5} \equiv 2^k \pmod{62}$ za $k \in \mathbb{N}$, tj. eksponent smijemo smanjiti za 5 sve dok ostaje prirodan broj:

$$2^{100} \equiv 2^{95} \equiv 2^{90} \equiv \dots \equiv 2^5 = 32 \pmod{62}.$$

Ostatak je 32. (Kongruenciju $2^6 \equiv 2 \pmod{62}$ ne smijemo kratiti s 2 jer je $M(2, 62) = 2 \neq 1$; doista, $2^5 = 32 \not\equiv 1 \pmod{62}$.) □

Zadatak 8.52. Dokažite da je prirodan broj djeljiv s 3 ako i samo ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3. Isto dokažite za 9.

Rješenje. Neka je $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0} = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \dots + 10^k a_k$. Dovoljno je dokazati

$$n \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_k \pmod{3},$$

jer tada n i zbroj znamenaka imaju isti ostatak pri dijeljenju s 3, pa je jedan od njih djeljiv s 3 ako i samo ako je djeljiv i drugi. Vrijedi $10 \equiv 1 \pmod{3}$, pa je $10^m \equiv 1^m = 1 \pmod{3}$ za svaki $m \in \mathbb{N}$. Zato je

$$n = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \dots + 10^k a_k \equiv a_0 + 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \dots + 1 \cdot a_k \pmod{3}.$$

Kako je i $10 \equiv 1 \pmod{9}$, isti račun daje $n \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_k \pmod{9}$, pa vrijedi i kriterij djeljivosti s 9. $\square$

8.4 Zadaci za samostalan rad

- 8.1.** Odredite kvocijent i ostatak pri dijeljenju broja -2026 sa 17.
- 8.2.** Dokažite da je $n^3 - n$ djeljivo sa 6 za svaki $n \in \mathbb{Z}$.
- 8.3.** Euklidovim algoritmom odredite $M(252, 198)$ i prikažite je kao cjelobrojnu linearnu kombinaciju brojeva 252 i 198.
- 8.4.** Odredite $M(12345, 450)$ i $M(11111111, 456)$.
- 8.5.** Dokažite da je razlomak $\frac{3n+2}{5n+3}$ neskrativ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
- 8.6.** Eratostenovim sitom odredite sve proste brojeve manje od 100.
- 8.7.** Dokažite da ne postoji cijeli broj n takav da je $n^2 \equiv 3 \pmod{4}$.
- 8.8.** Odredite posljednju znamenku broja 7^{2026} .
- 8.9.** Odredite ostatak pri dijeljenju broja 2^{100} sa 7.
- 8.10.** Dokažite da je prirodan broj djeljiv s 11 ako i samo ako je djeljiva s 11 alternirajuća suma njegovih znamenaka $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k$.

Poglavlje 9

Polinomi

9.1 Osnovni pojmovi

Definicija 9.1. Neka je K jedan od skupova $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. *Polinom* je funkcija $f: K \rightarrow K$ oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ i $n \in \mathbb{N}_0$.

- Brojevi $a_0, \dots, a_n$ zovu se *koeficijenti* polinoma, a pribrojnici $a_i x^i$ *monomi*.
- Ako je $a_n \neq 0$, onda se a_n zove *vodeći koeficijent*, a broj n *stupanj* polinoma f ; pišemo $\deg f = n$. (U literaturi se za stupanj koristi i oznaka $\text{st } f$.)
- Koeficijent a_0 zove se *slobodni član* (slobodni koeficijent) polinoma.
- Polinom je *normiran* ako mu je vodeći koeficijent jednak 1.

Skup svih polinoma s koeficijentima iz K označavamo s $K[x]$ i zovemo *prsten polinoma*. Posebno, $\mathbb{R}[x]$ je prsten polinoma s realnim, a $\mathbb{Z}[x]$ prsten polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Vrijedi $\mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$.

Napomena 9.2. Funkcija $f(x) = 0, \forall x \in K$, kojoj su svi koeficijenti jednaki nuli, zove se *nulpolinom*. Ona nema vodeći koeficijent različit od nule, ali je ipak smatramo polinomom. Stupanj nulpolinoma ne definiramo (neki autori uzimaju $\deg 0 = -1$ ili $\deg 0 = -\infty$). Stupanj konstantnih polinoma različitih od nulpolinoma jednak je 0.

Zadatak 9.3. Promatramo polinom

$$p(x) = (3x^2 - 2x - 1)^4 = a_8 x^8 + a_7 x^7 + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Odredite:

- (a) $a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + a_0$;
- (b) $a_6 + a_4 + a_2$.

Rješenje. I. način. Razvojem potencije dobivamo

$$(3x^2 - 2x - 1)^4 = 81x^8 - 216x^7 + 108x^6 + 120x^5 - 74x^4 - 40x^3 + 12x^2 + 8x + 1,$$

pa je $a_0 = 1, a_2 = 12, a_4 = -74, a_6 = 108, a_8 = 81$. Zato je $a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + a_0 = 128$ i $a_6 + a_4 + a_2 = 46$.

II. način (bez razvijanja potencije). (a) Uvrštavanjem $x = 1$ i $x = -1$ dobivamo

$$0 = (3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 1)^4 = a_8 + a_7 + a_6 + \cdots + a_1 + a_0, \quad (*)$$

$$256 = (3(-1)^2 - 2(-1) - 1)^4 = a_8 - a_7 + a_6 - \cdots - a_1 + a_0. \quad (**)$$

Zbrajanjem jednakosti (*) i (**) neparni koeficijenti se poništavaju: $2(a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + a_0) = 256$, pa je

$$a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + a_0 = 128.$$

(b) Uvrštavanjem $x = 0$ dobivamo $(3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 1)^4 = a_0$, tj. $a_0 = 1$. Vodeći koeficijent je koeficijent uz x^8 ; on dolazi samo od $(3x^2)^4 = 81x^8$, pa je $a_8 = 81$. Iz (a) slijedi

$$a_6 + a_4 + a_2 = 128 - a_8 - a_0 = 128 - 81 - 1 = 46. \quad \square$$

Zadatak 9.4. Odredite zbroj koeficijenata polinoma koji se dobije sređivanjem izraza

$$(2 - 3x + x^2)^{1999}(2 + 3x + x^2)^{2000}.$$

Riješite i inačicu s eksponentima 2023 i 2024.

Rješenje. Zbroj koeficijenata polinoma f jednak je $f(1)$. Uvrštavanjem $x = 1$ dobivamo

$$(2 - 3 + 1)^{1999}(2 + 3 + 1)^{2000} = 0^{1999} \cdot 6^{2000} = 0.$$

Prvi je faktor u $x = 1$ jednak nuli i u inačici s eksponentima 2023 i 2024, pa je i tamo zbroj koeficijenata jednak 0. $\square$

Napomena 9.5. Za $f, g \in \mathbb{R}[x]$ funkcije $f \pm g$, $f \cdot g$ i $f \circ g$ zadane s

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

također su polinomi, tj. elementi skupa $\mathbb{R}[x]$.

Zadatak 9.6. Neka su $f, g \in \mathbb{R}[x]$ nenul polinomi. Izrazite stupnjeve polinoma $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ i $f \circ g$ pomoću $\deg f$ i $\deg g$.

Rješenje. Označimo $\deg f = n$, $\deg g = m$ i pišimo

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0.$$

Zbroj. Razlikujemo tri slučaja.

1° $n > m$: $(f + g)(x) = a_n x^n + \cdots + (a_m + b_m)x^m + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$. Kako je $a_n \neq 0$, vrijedi $\deg(f + g) = n$.

2° $n < m$: analogno je $(f + g)(x) = b_m x^m + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_0 + b_0)$, pa je $\deg(f + g) = m$.

3° $n = m$: $(f + g)(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$. Koeficijent $a_n + b_n$ može biti jednak nuli, pa je stupanj tada manji od n . Zbroj može biti čak i nulpolinom, primjerice za $f(x) = 2x - 1$ i $g(x) = -2x + 1$. Jedino što možemo zaključiti jest $\deg(f + g) \leq n$ (ako je $f + g \neq 0$).

Iz sva tri slučaja zaključujemo: ako je $f + g \neq 0$, onda je

$$\deg(f + g) \leq \max\{\deg f, \deg g\},$$

pri čemu jednakost sigurno vrijedi kad je $\deg f \neq \deg g$. Budući da je $f - g = f + (-g)$ i $\deg(-g) = \deg g$, isto vrijedi za razliku: $\deg(f - g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$ ako je $f - g \neq 0$.

Produkt.

$$(f \cdot g)(x) = (a_n x^n + \dots + a_0)(b_m x^m + \dots + b_0) = a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-1} + \dots$$

Budući da je $a_n b_m \neq 0$, vrijedi $\deg(f \cdot g) = n + m = \deg f + \deg g$.

Kompozicija. Neka je g nekonstantan, tj. $m \geq 1$. Tada je

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= a_n (g(x))^n + \dots + a_1 g(x) + a_0 = a_n (b_m x^m + \dots + b_0)^n + \dots + a_0 \\ &= a_n b_m^n x^{mn} + (\text{niže potencije}). \end{aligned}$$

Kako je $a_n b_m^n \neq 0$, vrijedi $\deg(f \circ g) = m \cdot n = \deg f \cdot \deg g$. $\square$

Teorem 9.7 (o jednakosti polinoma). *Neka su $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, i $g(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$, $b_m \neq 0$, dva polinoma. Tada vrijedi*

$$p(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff m = n \wedge a_i = b_i, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Drugim riječima, dva su polinoma jednaka kao funkcije ako i samo ako imaju jednake stupnjeve i jednake odgovarajuće koeficijente. To nam omogućuje rješavanje zadataka *usporedbom koeficijenata*.

Zadatak 9.8. Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju

$$(x+1)p(x) = x^3 + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rješenje. I. način. Iz jednakosti polinoma slijedi jednakost stupnjeva:

$$\deg((x+1)p(x)) = \deg(x^3 + 1) \implies 1 + \deg p = 3 \implies \deg p = 2.$$

Dakle, $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Uvrštavanjem dobivamo

$$(x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c = x^3 + 1.$$

Usporedbom koeficijenata (teorem 9.7) slijedi $a = 1$, $a + b = 0$, $b + c = 0$, $c = 1$, odnosno $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ (sve četiri jednakosti su zadovoljene). Rješenje je $p(x) = x^2 - x + 1$.

II. način. Za $x = -1$ jednakost glasi $0 \cdot p(-1) = 0$, što vrijedi uvijek. Za $x \neq -1$ mora vrijediti

$$p(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = x^2 - x + 1.$$

Polinomi $p(x)$ i $x^2 - x + 1$ podudaraju se u beskonačno mnogo točaka, pa su jednaki (napomena 9.38). Rješenje je opet $p(x) = x^2 - x + 1$. $\square$

Zadatak 9.9. Odredite sve polinome $f \in \mathbb{R}[x]$ takve da vrijedi

$$f(x^2 - 3) = x^2 f(x - 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rješenje. Nulpolinom očito zadovoljava jednakost. Neka je $f \neq 0$ i $n := \deg f$. Lijeva strana je kompozicija polinoma f i $g(x) = x^2 - 3$, pa prema zadatku 9.6 ima stupanj $2n$ (za $n = 0$ to je očito), a desna strana ima stupanj $2 + n$. Iz jednakosti polinoma slijedi $2n = 2 + n$, tj. $n = 2$. Dakle, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, i

$$\begin{aligned} a(x^2 - 3)^2 + b(x^2 - 3) + c &= x^2(a(x-1)^2 + b(x-1) + c), \\ ax^4 - 6ax^2 + 9a + bx^2 - 3b + c &= ax^4 - 2ax^3 + ax^2 + bx^3 - bx^2 + cx^2, \\ ax^4 + (b - 6a)x^2 + (9a - 3b + c) &= ax^4 + (b - 2a)x^3 + (a - b + c)x^2. \end{aligned}$$

Usporedbom koeficijenata dobivamo:

$$\begin{aligned}x^4 : \quad & a = a, \\x^3 : \quad & 0 = b - 2a \implies b = 2a, \\x^2 : \quad & b - 6a = a - b + c \implies 2a - 6a = a - 2a + c \implies c = -3a, \\x^0 : \quad & 9a - 3b + c = 0 \implies 9a - 6a - 3a = 0.\end{aligned}$$

Posljednja je jednakost uvijek ispunjena, pa je $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ slobodan parametar. Rješenja su nulpolinom i svi polinomi

$$f(x) = ax^2 + 2ax - 3a = a(x^2 + 2x - 3), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

što zajedno možemo zapisati kao $f(x) = a(x^2 + 2x - 3)$, $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Zadatak 9.10. Odredite sve $f \in \mathbb{R}[x]$ takve da je $f(-2x + 1) = 2x^2 - x + 3$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje. I. način. Uz $n = \deg f$ lijeva strana ima stupanj $n \cdot 1$, pa je $n = 2$ i $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Tada je

$$a(-2x + 1)^2 + b(-2x + 1) + c = 4ax^2 + (-4a - 2b)x + (a + b + c) = 2x^2 - x + 3.$$

Usporedbom koeficijenata dobivamo $4a = 2$, tj. $a = \frac{1}{2}$; zatim $-4a - 2b = -1$, tj. $b = \frac{1}{2}(1 - 4a) = -\frac{1}{2}$; i konačno $a + b + c = 3$, tj. $c = 3$. Rješenje je

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3.$$

II. način. Uvedimo zamjenu $t := -2x + 1$, odnosno $x = -\frac{1}{2}(t - 1)$. Kad x prolazi skupom $\mathbb{R}$, i t prolazi cijelim skupom $\mathbb{R}$, pa je za svaki $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = 2\left(-\frac{1}{2}(t - 1)\right)^2 + \frac{1}{2}(t - 1) + 3 = \frac{1}{2}(t^2 - 2t + 1) + \frac{1}{2}(t - 1) + 3 = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + 3.$$

Dakle, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$. $\square$

Zadatak 9.11. Odredite polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ takav da je $\deg f = 2$, $f(1) = 6$, $f(2) = 11$ i $f(-1) = 8$.

Rješenje. Iz $\deg f = 2$ slijedi $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Uvjeti daju sustav

$$\begin{cases} a + b + c = 6, \\ 4a + 2b + c = 11, \\ a - b + c = 8, \end{cases} \implies \begin{cases} a + b + c = 6, \\ 3a + b = 5, \\ -2b = 2. \end{cases}$$

(Dругu jednadžbu dobili smo oduzimanjem prve od druge, a treću oduzimanjem prve od treće.) Slijedi $b = -1$, $a = \frac{1}{3}(5 - b) = 2$, $c = 6 - a - b = 5$. Dakle, $f(x) = 2x^2 - x + 5$. $\square$

Zadatak 9.12. Odredite $a, b \in \mathbb{R}$ takve da polinom $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ bude kvadrat nekog polinoma.

Rješenje. Neka je $f = g^2$. Tada je $4 = \deg f = 2 \deg g$, pa je $\deg g = 2$, tj. $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Iz

$$x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 = \alpha^2 x^4 + 2\alpha\beta x^3 + (\beta^2 + 2\alpha\gamma)x^2 + 2\beta\gamma x + \gamma^2$$

usporedbom koeficijenata dobivamo

$$\begin{aligned}x^4 : \quad \alpha^2 = 1 &\implies \alpha = \pm 1, \\x^3 : \quad 2\alpha\beta = 2 &\implies \beta = \frac{1}{\alpha} = \alpha, \\x^1 : \quad 2\beta\gamma = 2 &\implies \gamma = \frac{1}{\beta} = \alpha, \\x^2 : \quad a = \beta^2 + 2\alpha\gamma, \\x^0 : \quad b = \gamma^2.\end{aligned}$$

1° $\alpha = \beta = \gamma = 1$: $a = \beta^2 + 2\alpha\gamma = 3$, $b = \gamma^2 = 1$.

2° $\alpha = \beta = \gamma = -1$: opet $a = 3$, $b = 1$.

Rješenje je $a = 3$, $b = 1$; tada je $f(x) = (x^2 + x + 1)^2$. □

Zadatak 9.13. Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ takve da vrijedi

$$p(1) + p(x) + p(x^2) = (1 + x + x^2)p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rješenje. Nulpolinom je rješenje. Ako je $p(x) = c \neq 0$ konstantan, dobivamo $3c = c(1 + x + x^2)$ za sve x , što nije moguće. Neka je zato $n := \deg p \geq 1$. Lijeva strana tada ima stupanj $2n$ (dolazi od $p(x^2)$), a desna $n + 2$, pa je $2n = n + 2$, tj. $n = 2$. Stavimo $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$:

$$\begin{aligned}(a + b + c) + (ax^2 + bx + c) + (ax^4 + bx^2 + c) &= (1 + x + x^2)(ax^2 + bx + c), \\ax^4 + (a + b)x^2 + bx + (a + b + 3c) &= ax^4 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 \\&\quad + (b + c)x + c.\end{aligned}$$

Usporedbom koeficijenata:

$$\begin{aligned}x^4 : \quad a &= a, \\x^3 : \quad 0 &= a + b \implies b = -a, \\x^2 : \quad a + b &= a + b + c \implies c = 0, \\x^1 : \quad b &= b + c \implies c = 0, \\x^0 : \quad a + b + 3c &= c \text{ je tada zadovoljeno.}\end{aligned}$$

Dakle, a je slobodan parametar. Rješenja su nulpolinom i svi polinomi

$$p(x) = ax^2 - ax, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

odnosno, zajedno, $p(x) = a(x^2 - x)$, $a \in \mathbb{R}$. □

9.2 Dijeljenje polinoma s ostatkom

Teorem 9.14 (o dijeljenju s ostatkom). *Neka je $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i neka su $f, g \in K[x]$ polinomi, pri čemu g nije nulpolinom. Tada postoje jedinstveni polinomi $q, r \in K[x]$ takvi da je*

$$f = g \cdot q + r \quad \text{ i } \quad r = 0 \text{ ili } \deg r < \deg g.$$

Polinom q zovemo kvocijent, a r ostatak pri dijeljenju polinoma f polinomom g .

Napomena 9.15. Isti teorem vrijedi i u $\mathbb{Z}[x]$ ako je vodeći koeficijent djelitelja g jednak ± 1 : tada su kvocijent i ostatak pri dijeljenju polinoma $f \in \mathbb{Z}[x]$ s g također iz $\mathbb{Z}[x]$. Posebno, to vrijedi pri dijeljenju polinomom $x - k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Kvocijent i ostatak određujemo poznatim postupkom dijeljenja: vodeći član djeljenika podijelimo vodećim članom djelitelja, dobiveni monom pomnožimo djeliteljem, umnožak *oduzmemo* od djeljenika (u zapisu ispod djeljenika pišemo umnožak s promijenjenim predznacima i zbrajamo) te postupak ponavljamo dok ne dobijemo polinom manjeg stupnja od djelitelja.

Zadatak 9.16. Podijelite polinom $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ polinomom $g(x) = x^2 + 2x - 1$.

Rješenje.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 + x + 3) : (x^2 + 2x - 1) = x - 4 \\ \underline{-x^3 - 2x^2 + x} \\ -4x^2 + 2x + 3 \\ \underline{4x^2 + 8x - 4} \\ 10x - 1 \end{array}$$

Dakle, $q(x) = x - 4$, $r(x) = 10x - 1$, tj. $x^3 - 2x^2 + x + 3 = (x^2 + 2x - 1)(x - 4) + 10x - 1$. $\square$

Zadatak 9.17. Podijelite $f(x) = x^7 + 5x^6 - 3x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 - 7x + 3$ polinomom $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

Rješenje.

$$\begin{array}{r} (x^7 + 5x^6 - 3x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 - 7x + 3) : (x^3 - 2x^2 + 3x + 1) \\ \underline{-x^7 + 2x^6 - 3x^5 - x^4} \\ 7x^6 - 6x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 7x + 3 \\ \underline{-7x^6 + 14x^5 - 21x^4 - 7x^3} \\ 8x^5 - 20x^4 - 8x^3 + x^2 - 7x + 3 \\ \underline{-8x^5 + 16x^4 - 24x^3 - 8x^2} \\ -4x^4 - 32x^3 - 7x^2 - 7x + 3 \\ \underline{4x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 4x} \\ -40x^3 + 5x^2 - 3x + 3 \\ \underline{40x^3 - 80x^2 + 120x + 40} \\ -75x^2 + 117x + 43 \end{array}$$

Članovi kvocijenta redom su x^4 , $7x^3$, $8x^2$, $-4x$, -40 . Dakle,

$$q(x) = x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 4x - 40, \quad r(x) = -75x^2 + 117x + 43. \quad \square$$

Ostatak se ponekad može odrediti bez provođenja dijeljenja: ako je $\deg g = 2$, ostatak je oblika $r(x) = ax + b$, a a i b određujemo uvrštavanjem nultočaka djelitelja (ako su one različite; za dvostruku nultočku koristimo i derivaciju, vidi odjeljak o formalnoj derivaciji).

Zadatak 9.18. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{100} + 3x^{99} + x^2 - 3x + 9$ polinomom $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

Rješenje. Kako je $\deg r < \deg g = 2$, ostatak je oblika $r(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoji polinom q takav da je

$$x^{100} + 3x^{99} + x^2 - 3x + 9 = q(x)(x^2 + 2x - 3) + ax + b = q(x)(x+3)(x-1) + ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem $x = -3$ dobivamo $3^{100} - 3^{100} + 9 + 9 + 9 = -3a + b$, tj. $-3a + b = 27$.

Uvrštavanjem $x = 1$ dobivamo $1 + 3 + 1 - 3 + 9 = a + b$, tj. $a + b = 11$.

Rješenje sustava je $a = -4$, $b = 15$, pa je $r(x) = -4x + 15$. $\square$

Zadatak 9.19. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{256} - 8x^{64} + 11x^8 - 7$ polinomom $g(x) = x^2 - 1$.

Rješenje. Kao u prethodnom zadatku, $r(x) = ax + b$ i

$$x^{256} - 8x^{64} + 11x^8 - 7 = q(x)(x^2 - 1) + ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Za $x = 1$: $1 - 8 + 11 - 7 = a + b$, tj. $a + b = -3$. Za $x = -1$: $1 - 8 + 11 - 7 = -a + b$, tj. $-a + b = -3$. Slijedi $a = 0$, $b = -3$, pa je ostatak konstantni polinom $r(x) = -3$. $\square$

9.3 Djeljivost i najveća zajednička mjera

Definicija 9.20. Neka su $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Kažemo da g *dijeli* f (odnosno da je f *djeljiv* s g) ako postoji polinom $p \in \mathbb{R}[x]$ takav da je

$$f = p \cdot g,$$

i pišemo $g \mid f$. Analogno se definira djeljivost u $K[x]$ za $K \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}\}$.

Zadatak 9.21. Djeljivost polinoma je binarna relacija na $\mathbb{R}[x]$. Ispitajte njezina svojstva.

Rješenje. Provjeravamo redom svojstva.

- *Refleksivnost*: DA. Za svaki f vrijedi $f = 1 \cdot f$, pa $f \mid f$.
- *Simetričnost*: NE. Primjerice, $x^2 - 1 \mid x^3 - x$ jer je $x^3 - x = x(x^2 - 1)$, ali $x^3 - x \nmid x^2 - 1$ (polinom stupnja 3 ne može dijeliti nenul polinom stupnja 2).
- *Tranzitivnost*: DA. Neka su $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$ takvi da $f \mid g$ i $g \mid h$. Tada postoje $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $g = p_1 f$ i $h = p_2 g$. Slijedi $h = (p_2 p_1) f$, gdje je $p_2 p_1 \in \mathbb{R}[x]$, pa $f \mid h$.
- *Antisimetričnost*: NE. Vrijedi $x + 1 \mid 2x + 2$ jer je $2x + 2 = 2(x + 1)$, i $2x + 2 \mid x + 1$ jer je $x + 1 = \frac{1}{2}(2x + 2)$, ali $x + 1 \neq 2x + 2$.

Na predavanjima je pokazano da iz $g \mid f$ i $f \mid g$ za nenul polinome slijedi $f = c \cdot g$ za neku konstantu $c \neq 0$; upravo zato antisimetričnost ne vrijedi. $\square$

Definicija 9.22. Neka su $f, g \in \mathbb{R}[x]$, $f, g \neq 0$. Za polinom $h \in \mathbb{R}[x]$ kažemo da je *najveća zajednička mjera* polinoma f i g ako vrijedi:

1) $h \mid f$ i $h \mid g$;

2) ako za $k \in \mathbb{R}[x]$ vrijedi $k \mid f$ i $k \mid g$, onda $k \mid h$.

Teorem 9.23. Za svaka dva polinoma $f, g \neq 0$ postoji jedinstvena normirana najveća zajednička mjera; označavamo je s $M(f, g)$.

Napomena 9.24. Prema definiciji s predavanja najveća zajednička mjera je *svaki* polinom s gornja dva svojstva; ona je jedinstvena samo do na množenje konstantom $c \neq 0$. Ovdje (dok nismo u $\mathbb{Z}[x]$) dodatno zahtijevamo normiranost, pa oznaka $M(f, g)$ označava jedinstvenu normiranu najveću zajedničku mjeru.

Euklidov algoritam za polinome

Neka je $\deg f \geq \deg g$. Uzastopno dijelimo s ostatkom:

$$\begin{aligned} f &= g \cdot q_1 + r_1, & \deg r_1 &< \deg g, \\ g &= r_1 \cdot q_2 + r_2, & \deg r_2 &< \deg r_1, \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3, & \deg r_3 &< \deg r_2, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} \cdot q_n + r_n, & \deg r_n &< \deg r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= r_n \cdot q_{n+1} & (\text{ostatak je } 0). \end{aligned}$$

Stupnjevi nenul ostataka strogo padaju, pa postupak završava. Zajednički djelitelji polinoma f i g isti su kao zajednički djelitelji polinoma g i r_1 (jer je $r_1 = f - gq_1$), zatim r_1 i r_2 itd. Zato je posljednji nenul ostatak r_n najveća zajednička mjera, a $M(f, g)$ dobivamo *normiranjem* polinoma r_n (dijeljenjem njegovim vodećim koeficijentom).

Zadatak 9.25. Nadite najveću zajedničku mjeru polinoma

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad \text{i} \quad g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Rješenje. Prvo dijeljenje:

$$\begin{array}{r} (x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) : (x^3 - 2x^2 + x - 2) = x + 3 \\ \underline{-x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x} \\ 3x^3 + x^2 + 3x + 1 \\ \underline{-3x^3 + 6x^2 - 3x + 6} \\ 7x^2 + 7 \end{array}$$

pa je $q_1(x) = x + 3$, $r_1(x) = 7x^2 + 7$. Drugo dijeljenje:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 + x - 2) : (7x^2 + 7) = \frac{1}{7}x - \frac{2}{7} \\ \underline{-x^3 + x^2 - x + 2} \\ -2x^2 - 2 \\ \underline{2x^2 + 2} \\ 0 \end{array}$$

Ostatak je 0, pa je posljednji nenul ostatak r_1 . Normiranjem dobivamo

$$M(f, g) = \frac{1}{7}r_1(x) = \frac{1}{7}(7x^2 + 7) = x^2 + 1. \quad \square$$

9.4 Nultočke polinoma i Bézoutov teorem

Zadatak 9.26. Dokažite da je ostatak pri dijeljenju polinoma f polinomom $g(x) = x - a$ jednak $f(a)$.

Rješenje. Kako je $\deg r < \deg g = 1$, ostatak r je konstanta. Iz $f(x) = (x - a)q(x) + r$, $\forall x$, uvrštavanjem $x = a$ dobivamo $f(a) = 0 \cdot q(a) + r$, tj. $r = f(a)$. $\square$

Definicija 9.27. Za $a \in K$ kažemo da je *nultočka* (ili *korijen*) polinoma $f \in K[x]$ ako je $f(a) = 0$.

Teorem 9.28 (Bézout). *Broj a je nultočka polinoma f ako i samo ako $x - a$ dijeli polinom f .*

Teorem slijedi izravno iz zadatka 9.26: $x - a \mid f$ ako i samo ako je ostatak $f(a)$ jednak nuli.

Korolar 9.29. *Ako su $a_1, \dots, a_k$ međusobno različite nultočke polinoma f , onda $(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_k) \mid f$.*

Dokaz. Prema Bézoutovu teoremu $f = (x - a_1)f_1$. Za $i \geq 2$ je $0 = f(a_i) = (a_i - a_1)f_1(a_i)$ i $a_i - a_1 \neq 0$, pa su $a_2, \dots, a_k$ nultočke polinoma f_1 . Ponavljanjem postupka (indukcijom po k) dobivamo $f = (x - a_1) \cdots (x - a_k)f_k$. $\square$

Zadatak 9.30. Dokažite da je polinom

$$f(x) = (x^2 + x - 1)^{2n} + (x^2 - x + 1)^{2n} - 2, \quad n \in \mathbb{N},$$

djeljiv polinomom $g(x) = x^2 - x$.

Rješenje. Vrijedi $g(x) = x(x-1)$, pa je prema korolaru 9.29 polinom f djeljiv s g ako je djeljiv s x i s $x-1$, tj. ako je $f(0) = 0$ i $f(1) = 0$. Provjerimo:

$$\begin{aligned} f(0) &= (-1)^{2n} + 1^{2n} - 2 = 1 + 1 - 2 = 0, \\ f(1) &= (1 + 1 - 1)^{2n} + (1 - 1 + 1)^{2n} - 2 = 1 + 1 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $g \mid f$. □

Zadatak 9.31. Polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ pri dijeljenju s $x-a$ daje ostatak A , a pri dijeljenju s $x-b$ ostatak B , pri čemu je $a \neq b$. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma f s $(x-a)(x-b)$.

Rješenje. Prema zadatku 9.26 je $f(a) = A$ i $f(b) = B$. Budući da je $\deg r < \deg((x-a)(x-b)) = 2$, ostatak je oblika $r(x) = ux + v$ i

$$f(x) = q(x)(x-a)(x-b) + ux + v.$$

Uvrštavanjem $x = a$ i $x = b$ dobivamo $A = ua + v$ i $B = ub + v$. Oduzimanjem slijedi $u(a-b) = A-B$, tj. $u = \frac{A-B}{a-b}$, a zatim

$$v = A - ua = A - \frac{A-B}{a-b}a = \frac{Ba - Ab}{a-b}.$$

Dakle,

$$r(x) = \frac{A-B}{a-b}x + \frac{Ba-Ab}{a-b}. \quad \square$$

Zadatak 9.32. Neka je $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Odredite $a, b, c \in \mathbb{R}$ takve da f pri dijeljenju s $x-1$, $x-2$, $x-3$ daje redom ostatke -8 , -9 , -4 .

Rješenje. Prema zadatku 9.26 uvjeti glase $f(1) = -8$, $f(2) = -9$, $f(3) = -4$:

$$\begin{cases} 1 + a + b + c = -8 \\ 8 + 4a + 2b + c = -9 \\ 27 + 9a + 3b + c = -4 \end{cases} \implies \begin{cases} a + b + c = -9 \\ 4a + 2b + c = -17 \\ 9a + 3b + c = -31. \end{cases}$$

Oduzimanjem uzastopnih jednadžbi dobivamo $3a + b = -8$ i $5a + b = -14$, pa je $a = -3$, $b = 1$ i $c = -9 - a - b = -7$. □

Zadatak 9.33. Dokažite da je polinom $f(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$, $n \in \mathbb{N}$, djeljiv polinomom $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$.

Rješenje. Vrijedi $g(x) = x(x+1)(2x+1) = 2x(x+1)(x+\frac{1}{2})$. Prema korolaru 9.29

$$g \mid f \iff x \mid f \wedge x+1 \mid f \wedge x+\frac{1}{2} \mid f \iff f(0) = f(-1) = f(-\frac{1}{2}) = 0.$$

Provjerimo:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1^{2n} - 0 - 0 - 1 = 0, \\ f(-1) &= 0 - 1 + 2 - 1 = 0, \\ f(-\frac{1}{2}) &= (\frac{1}{2})^{2n} - (\frac{1}{2})^{2n} + 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $g \mid f$. □

Zadatak 9.34. Neka su $f, g \in \mathbb{R}[x]$, $f \neq 0$, i $g(x) = x^3 - 9x^2 - 9x - 1$. Dokažite da $M(f, g)$ nije djeljiv polinomom $x+1$.

Rješenje. Znamo da $M(f, g) \mid f$ i $M(f, g) \mid g$. Kad bi vrijedilo $x + 1 \mid M(f, g)$, tranzitivnošću bismo dobili $x + 1 \mid g$, tj. $g(-1) = 0$. No

$$g(-1) = -1 - 9 + 9 - 1 = -2 \neq 0,$$

što je kontradikcija. Dakle, $x + 1 \nmid M(f, g)$. $\square$

U sljedeća dva zadatka uvrštavamo i kompleksne brojeve: realne polinome smatramo elementima skupa $\mathbb{C}[x]$, a jednakost $f = g \cdot q + r$ vrijedi i za sve $x \in \mathbb{C}$.

Zadatak 9.35. Polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ pri dijeljenju s $x + 1$ daje ostatak 4, a pri dijeljenju s $x^2 + 1$ ostatak $2x + 3$. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma f s $(x + 1)(x^2 + 1)$.

Rješenje. Budući da je $\deg r < \deg((x + 1)(x^2 + 1)) = 3$, ostatak je oblika $r(x) = ax^2 + bx + c$ i

$$f(x) = q(x)(x + 1)(x^2 + 1) + ax^2 + bx + c.$$

Iz uvjeta zadatka je $f(-1) = 4$, a iz $f(x) = q_1(x)(x^2 + 1) + 2x + 3$ slijedi $f(i) = 2i + 3$ i $f(-i) = -2i + 3$. Uvrštavanjem $x = -1$, $x = i$ i $x = -i$ dobivamo

$$4 = a - b + c, \quad 2i + 3 = -a + ib + c, \quad -2i + 3 = -a - ib + c.$$

Zbrajanjem posljednjih dviju jednakosti slijedi $-2a + 2c = 6$, tj. $c = a + 3$, a oduzimanjem $2ib = 4i$, tj. $b = 2$. Iz prve jednakosti tada je $4 = a - 2 + a + 3$, pa je $a = \frac{3}{2}$ i $c = \frac{9}{2}$. Dakle,

$$r(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}. \quad \square$$

Zadatak 9.36. Dokažite da je polinom

$$f(x) = x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{N},$$

djeljiv polinomom $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Rješenje. Vrijedi $g(x) = (x + 1)(x^2 + 1) = (x + 1)(x - i)(x + i)$, pa je prema korolaru 9.29 dovoljno provjeriti da su -1 , i i $-i$ nultočke polinoma f . Koristimo $(-1)^4 = i^4 = (-i)^4 = 1$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \\ f(i) &= 1 + i - 1 - i = 0, \\ f(-i) &= 1 - i - 1 + i = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $g \mid f$ u $\mathbb{C}[x]$. Kvocijent je pritom realan polinom: dijeljenjem u $\mathbb{R}[x]$ dobivamo $f = gq + r$ s realnim q, r , a zbog jedinstvenosti dijeljenja u $\mathbb{C}[x]$ mora biti $r = 0$. Dakle, $g \mid f$ i u $\mathbb{R}[x]$. $\square$

Zadatak 9.37. Dokažite da polinom stupnja n ne može imati više od n različitih nultočaka.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da su $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ različite nultočke polinoma f , $\deg f = n$. Prema Bézoutovu teoremu (korolar 9.29) f je djeljiv produktom

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n+1}),$$

što je polinom stupnja $n + 1$. Tada je $f = (x - a_1) \cdots (x - a_{n+1})h$ za neki $h \neq 0$, pa je $\deg f \geq n + 1$. To je u kontradikciji s $\deg f = n$. $\square$

Napomena 9.38. Jedini polinom s beskonačno mnogo nultočaka je nulpolinom $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Posljedično, ako se dva polinoma podudaraju u beskonačno mnogo točaka, onda su jednaki (njihova razlika ima beskonačno mnogo nultočaka).

Zadatak 9.39. Odredite sve polinome $f \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju

$$xf(x-1) = (x-3)f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rješenje. Nulpolinom očito zadovoljava jednakost. Za $f \neq 0$ i $n = \deg f$ obje strane imaju stupanj $n+1$, pa iz stupnjeva ne dobivamo nikakvu informaciju. Zato uvrštavamo brojeve koji poništavaju lijevu ili desnu stranu:

$$\begin{aligned} x=0: \quad 0 \cdot f(-1) &= -3f(0) \implies f(0) = 0, \\ x=3: \quad 3f(2) &= 0 \cdot f(3) \implies f(2) = 0, \\ x=2: \quad 2f(1) &= -1 \cdot f(2) = 0 \implies f(1) = 0. \end{aligned}$$

Prema korolaru 9.29 vrijedi $x(x-1)(x-2) \mid f$, tj. $f(x) = x(x-1)(x-2)g(x)$ za neki $g \in \mathbb{R}[x]$. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo

$$x(x-1)(x-2)(x-3)g(x-1) = x(x-1)(x-2)(x-3)g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Za $x \neq 0, 1, 2, 3$ smijemo kratiti, pa je $g(x) = g(x-1)$. Odatle je

$$g(3) = g(4) = g(5) = g(6) = \dots$$

Definirajmo $h \in \mathbb{R}[x]$, $h(x) = g(x) - g(3)$. Tada je $h(3) = h(4) = h(5) = \dots = 0$, pa h ima beskonačno mnogo nultočaka i prema napomeni 9.38 je $h = 0$. Dakle, $g(x) = g(3) = c$ je konstanta, a sva rješenja su

$$f(x) = cx(x-1)(x-2), \quad c \in \mathbb{R}. \quad \square$$

9.5 Hornerov algoritam

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$. Podijelimo f s $x - \alpha$:

$$f(x) = q(x)(x - \alpha) + r, \quad r = f(\alpha), \quad \deg q = n - 1,$$

gdje je $q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$. Množenjem desne strane i izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije dobivamo

$$\begin{array}{ll} a_n = b_{n-1}, & b_{n-1} = a_n, \\ a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha b_{n-1}, & b_{n-2} = \alpha b_{n-1} + a_{n-1}, \\ a_{n-2} = b_{n-3} - \alpha b_{n-2}, & b_{n-3} = \alpha b_{n-2} + a_{n-2}, \\ \vdots & \text{odnosno} \quad \vdots \\ a_1 = b_0 - \alpha b_1, & b_0 = \alpha b_1 + a_1, \\ a_0 = r - \alpha b_0, & r = \alpha b_0 + a_0. \end{array}$$

Te račune pregledno zapisujemo u tablicu (*Hornerova shema*):

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline \alpha & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & r = f(\alpha) \end{array}$$

Prvi broj donjeg retka prepisujemo ($b_{n-1} = a_n$), a svaki sljedeći dobivamo tako da prethodni broj donjeg retka pomnožimo s α i dodamo mu koeficijent iznad. Posljednji broj je ostatak $f(\alpha)$, a ostali su koeficijenti kvocijenta. Pritom u gornji redak obavezno upisujemo i koeficijente jednake nuli.

Zadatak 9.40. Hornerovim algoritmom podijelite

(a) $f(x) = 2x^5 - x^3 + x + 8$ polinomom $g(x) = x - 2$;

(b) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ polinomom $g(x) = x - 3$.

Rješenje. (a) Ovdje je $\alpha = 2$, a koeficijenti uz x^4 i x^2 jednaki su nuli:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 7 & 14 & 29 & 66 \end{array}$$

Dakle, $q(x) = 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 14x + 29$ i $r(x) = 66 = f(2)$.

(b) Ovdje je $\alpha = 3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -6 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

Dakle, $q(x) = 2x^2 + 2$ i $r(x) = 5 = f(3)$. □

9.6 Cjelobrojne i racionalne nultočke

Teorem 9.41. *Neka je $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima koji ima cjelobrojnu nultočku $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Tada a dijeli slobodni član polinoma f .*

Dokaz. Iz $0 = f(a) = a_n a^n + \dots + a_1 a + a_0$ slijedi $a_0 = -a(a_n a^{n-1} + \dots + a_1)$, a broj u zagradi je cijeli. Dakle, $a \mid a_0$. □

Teorem 9.42 (racionalne nultočke). *Neka je $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$, i neka je $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ nultočka polinoma f , pri čemu su $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i $q \in \mathbb{N}$ relativno prosti (tj. $M(p, q) = 1$). Tada brojnik p dijeli slobodni član a_0 , a nazivnik q dijeli vodeći koeficijent a_n .*

Dokaz. Množenjem jednakosti $f(\frac{p}{q}) = 0$ s q^n dobivamo

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Odatle je $-a_0 q^n = p(a_n p^{n-1} + \dots + a_1 q^{n-1})$, pa $p \mid a_0 q^n$, a kako su p i q relativno prosti, $p \mid a_0$. Analogno, iz $-a_n p^n = q(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 q^{n-1})$ slijedi $q \mid a_n$. □

Napomena 9.43. Ako je slobodni član jednak nuli, najprije izlučimo najveću potenciju od x koja dijeli polinom; tada je 0 nultočka, a ostale nultočke tražimo kao nultočke preostalog faktora, kojemu je slobodni član različit od nule.

Racionalne nultočke tražimo tako da ispišemo sve kandidate $\frac{p}{q}$ (gdje $p \mid a_0$ i $q \mid a_n$) i za svakoga Hornerovim algoritmom izračunamo vrijednost polinoma. Kada nađemo nultočku, Hornerova shema daje i kvocijent, pa dalje tražimo nultočke kvocijenta (polinoma nižeg stupnja).

Zadatak 9.44. Nađite nultočke polinoma $f(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 3$.

Rješenje. Djelitelji slobodnog člana $a_0 = 3$ su $\pm 1, \pm 3$, a djelitelji vodećeg koeficijenta $a_3 = 2$ su 1, 2. Kandidati za racionalne nultočke su

$$\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}.$$

Vrijednosti računamo Hornerovim algoritmom (svaki redak počinje od koeficijenata polinoma f):

	2	-1	-6	3
1	2	1	-5	-2
-1	2	-3	-3	6
3	2	5	9	30
-3	2	-7	15	-42
$\frac{1}{2}$	2	0	-6	0

Dakle, $f(1) = -2$, $f(-1) = 6$, $f(3) = 30$, $f(-3) = -42$ i $f(\frac{1}{2}) = 0$, pa je $x_1 = \frac{1}{2}$ nultočka. Prema Bézoutovu teoremu $x - \frac{1}{2}$, a time i $2x - 1$, dijeli f . Iz posljednjeg retka tablice kvocijent pri dijeljenju s $x - \frac{1}{2}$ je $2x^2 - 6$; isto dobivamo i dijeljenjem s $2x - 1$:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - x^2 - 6x + 3) : (2x - 1) = x^2 - 3 \\ \underline{-2x^3 + x^2} \\ -6x + 3 \\ \underline{6x - 3} \\ 0 \end{array}$$

Dakle, $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = (2x - 1)(x^2 - 3)$, pa su preostale nultočke $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ (koje nisu racionalne). Nultočke polinoma f su $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$. $\square$

Zadatak 9.45. Nađite nultočke polinoma $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6$.

Rješenje. Vodeći koeficijent je 1, pa su racionalne nultočke cjelobrojne i nalaze se među djeliteljima broja 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Računamo:

$$\begin{aligned} f(1) &= 4, & f(-1) &= 0, & f(2) &= -6, & f(-2) &= 10, \\ f(3) &= 0, & f(-3) &= 84, & f(6) &= 714, & f(-6) &= 1530. \end{aligned}$$

Dakle, -1 i 3 su nultočke, pa je f djeljiv s $(x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$. Kvocijent dobivamo dvostrukom primjenom Hornerova algoritma: najprije dijelimo f s $x+1$, a zatim dobiveni kvocijent s $x-3$:

	1	-2	-5	4	6
-1	1	-3	-2	6	0
3	1	0	-2	0	

Dakle, $(x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6) : (x^2 - 2x - 3) = x^2 - 2$, tj. $f(x) = (x+1)(x-3)(x^2 - 2)$. Nultočke polinoma f su $-1, 3, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. $\square$

Zadatak 9.46. Dokažite da ne postoji trokut kojemu su duljine stranica jednake nultočkama polinoma

$$f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 25x - 14.$$

Rješenje. Djelitelji vodećeg koeficijenta su 1, 2, a slobodnog člana $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$. Moguće racionalne nultočke su

$$\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{7}{2}.$$

Kako je $f(1) = 2 - 13 + 25 - 14 = 0$, broj $x_1 = 1$ je nultočka. Hornerovim algoritmom:

	2	-13	25	-14
1	2	-11	14	0

pa je $f(x) = (x-1)(2x^2 - 11x + 14)$. Nultočke kvadratnog faktora su

$$x_{2,3} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 112}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2}, \quad \text{tj.} \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{7}{2}.$$

Nejednakost trokuta ne vrijedi: $1 + 2 = 3 < \frac{7}{2}$. Dakle, nultočke nisu duljine stranica nekog trokuta. $\square$

Zadatak 9.47. Neka je

$$f(x) = x^3 - (a+4)x^2 + (4a+3)x - 3a, \quad g(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24.$$

Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ takve da je $M(f, g)$ polinom stupnja 2.

Rješenje. Najprije nađimo nultočke polinoma g . Kandidati za racionalne nultočke su djelitelji broja 24:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24.$$

	1	-9	26	-24
1	1	-8	18	-6
-1	1	-10	36	-60
2	1	-7	12	0

Dakle, $g(1) = -6$, $g(-1) = -60$ i $g(2) = 0$, pa je $x_1 = 2$ nultočka i $g(x) = (x-2)(x^2 - 7x + 12)$. Iz $x_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2}$ slijedi

$$g(x) = (x-2)(x-3)(x-4).$$

Kako $M(f, g)$ dijeli g , a nultočke 2, 3, 4 polinoma g su jednostruke, $M(f, g)$ je produkt onih faktora $x-2$, $x-3$, $x-4$ čije su nultočke ujedno nultočke polinoma f . Stoga je $\deg M(f, g) = 2$ ako i samo ako f i g imaju točno dvije zajedničke nultočke. Računamo:

$$f(2) = 8 - 4(a+4) + 2(4a+3) - 3a = 8 - 4a - 16 + 8a + 6 - 3a = a - 2,$$

$$f(3) = 27 - 9(a+4) + 3(4a+3) - 3a = 27 - 9a - 36 + 12a + 9 - 3a = 0,$$

$$f(4) = 64 - 16(a+4) + 4(4a+3) - 3a = 64 - 16a - 64 + 16a + 12 - 3a = 12 - 3a.$$

Broj 3 je uvijek zajednička nultočka. Za $a = 2$ zajedničke nultočke su 2 i 3, za $a = 4$ su to 3 i 4, a inače je 3 jedina zajednička nultočka. Rješenje je $a \in \{2, 4\}$; pritom je $M(f, g) = (x-2)(x-3)$ za $a = 2$, odnosno $M(f, g) = (x-3)(x-4)$ za $a = 4$. $\square$

9.7 Kratnost nultočke i osnovni teorem algebre

Definicija 9.48. Nultočka α polinoma $f \neq 0$ je *kratnosti* (ili reda) $k \in \mathbb{N}$ ako $(x-\alpha)^k$ dijeli f , a $(x-\alpha)^{k+1}$ ne dijeli f . Na predavanjima se kratnost označava s $\nu_\alpha(f)$. Nultočke kratnosti 1 zovemo jednostrukima, a nultočke kratnosti barem 2 višestrukima.

Ekvivalentno, α je nultočka kratnosti k ako i samo ako je $f(x) = (x-\alpha)^k q(x)$ za neki polinom q s $q(\alpha) \neq 0$.

Teorem 9.49 (osnovni teorem algebre). *Svaki polinom $f \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $n \geq 1$ ima barem jednu nultočku $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Korolar 9.50. *Neka je $f \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $n \geq 1$. Tada f ima točno n nultočaka, računajući i njihove kratnosti:*

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \cdots (x-\alpha_s)^{k_s},$$

gdje je a_n vodeći koeficijent polinoma f , $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ su međusobno različite nultočke, a $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N}$ su redom njihove kratnosti, pri čemu je $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n = \deg f$.

Zadatak 9.51. Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ realni polinom koji ima kompleksnu nultočku $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažite da je i $\bar{z} = a - ib$ nultočka polinoma f .

Rješenje. Koristimo svojstva kompleksnog konjugiranja: $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$, odakle je $\overline{z^m} = \overline{z}^m$, te $\overline{c} = c$ za $c \in \mathbb{R}$. Neka je $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. Tada je $0 = \overline{0} = \overline{f(z)} = \overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = \overline{a_n} \overline{z}^n + \dots + \overline{a_1} \overline{z} + \overline{a_0} = a_n \overline{z}^n + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 = f(\overline{z})$.

Dakle, $f(\overline{z}) = 0$. □

Napomena 9.52. Konjugirane nultočke imaju i jednake kratnosti: ako je $f(x) = (x - z)^k q(x)$, $q(z) \neq 0$, konjugiranjem svih koeficijenata dobivamo $f(x) = (x - \overline{z})^k \overline{q}(x)$, gdje je $\overline{q}$ polinom s konjugiranim koeficijentima i $\overline{q}(\overline{z}) = \overline{q(z)} \neq 0$. Za $b \neq 0$ produkt $(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ realan je polinom s negativnom diskriminantom $-4b^2$. Zato se svaki realni polinom stupnja $n \geq 1$ može prikazati kao produkt vodećeg koeficijenta, realnih linearnih faktora $x - \alpha_i$ i realnih kvadratnih faktora $x^2 + p_j x + q_j$ s $p_j^2 - 4q_j < 0$.

Zadatak 9.53. Odredite sve nultočke polinoma

$$p(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 16x - 40$$

ako znate da je jedna od njih $x_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

Rješenje. Polinom ima realne koeficijente, pa je prema zadatku 9.51 i $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ nultočka. Zato je p djeljiv s

$$(x - 1 + i\sqrt{3})(x - 1 - i\sqrt{3}) = (x - 1)^2 + 3 = x^2 - 2x + 4.$$

Dijeljenjem dobivamo

$$\begin{array}{r} \begin{array}{rrrrrr} x^5 & -2x^4 & -5x^3 & +8x^2 & -16x & -40 \\ -x^5 & +2x^4 & -4x^3 & & & \end{array} & : (x^2 - 2x + 4) = & x^3 - 9x - 10 \\ \hline & & -9x^3 & +8x^2 & -16x & -40 \\ & & 9x^3 & -18x^2 & +36x & \\ \hline & & & -10x^2 & +20x & -40 \\ & & & 10x^2 & -20x & +40 \\ \hline & & & & & 0 \end{array}$$

Treba još naći nultočke polinoma $x^3 - 9x - 10$. Kandidati za cjelobrojne nultočke su $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. Kako je $(-2)^3 - 9 \cdot (-2) - 10 = 0$, broj $x_2 = -2$ je nultočka. Hornerovim algoritmom određujemo kvocijent pri dijeljenju s $x + 2$:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & 0 & -9 & -10 \\ -2 & 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}$$

Dakle, $(x^3 - 9x - 10) : (x + 2) = x^2 - 2x - 5$, a iz $x^2 - 2x - 5 = 0$ slijedi $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{6}$. Nultočke polinoma p su

$$1 - i\sqrt{3}, \quad 1 + i\sqrt{3}, \quad -2, \quad 1 + \sqrt{6}, \quad 1 - \sqrt{6}. \quad \square$$

9.8 Formalna derivacija polinoma

Definicija 9.54. Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom stupnja n . *Formalna derivacija* polinoma f je polinom

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1.$$

Za $n \geq 1$ to je polinom stupnja $n - 1$; derivacija konstantnog polinoma je nulpolinom. n -tu *formalnu derivaciju* definiramo rekursivno:

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pišemo i $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$.

Propozicija 9.55 (svojstva formalne derivacije). Za $f, g \in \mathbb{R}[x]$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad (f \circ g)' = (f' \circ g)g'.$$

Dokaz. Linearnost slijedi izravno iz definicije. Za monome je $(x^r)'x^s + x^r(x^s)' = rx^{r+s-1} + sx^{r+s-1} = (x^{r+s})'$, pa pravilo za produkt vrijedi za monome, a zbog linearnosti (raspisivanjem produkta) i za sve polinome. Indukcijom iz pravila za produkt slijedi $(g^k)' = kg^{k-1}g'$, pa je za $f(x) = \sum_k a_k x^k$

$$(f \circ g)' = \left(\sum_k a_k g^k \right)' = \sum_k k a_k g^{k-1} g' = (f' \circ g) g'. \quad \square$$

Teorem 9.56. Ako je α nultočka polinoma f kratnosti $k \geq 2$, onda je α nultočka polinoma f' kratnosti $k - 1$. Ako je α jednostruka nultočka polinoma f , onda je $f'(\alpha) \neq 0$.

Dokaz. Neka je $f(x) = (x - \alpha)^k q(x)$, $q(\alpha) \neq 0$, $k \geq 1$. Prema pravilu za produkt

$$f'(x) = k(x - \alpha)^{k-1}q(x) + (x - \alpha)^k q'(x) = (x - \alpha)^{k-1} [kq(x) + (x - \alpha)q'(x)],$$

a polinom u uglatoj zagradi u točki α ima vrijednost $kq(\alpha) \neq 0$. Dakle, α je nultočka polinoma f' kratnosti $k - 1$ (za $k = 1$ to znači $f'(\alpha) \neq 0$). $\square$

Korolar 9.57. Broj α je nultočka polinoma $f \neq 0$ kratnosti k ako i samo ako je

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad i \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Posebno, f ima višestruku nultočku ako i samo ako f i f' imaju zajedničku nultočku.

Dokaz. Ako je α kratnosti k , uzastopnom primjenom teorema 9.56 α je nultočka polinoma $f^{(j)}$ kratnosti $k - j$ za $j < k$, a $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$. Obratno, ako vrijede navedeni uvjeti i α ima kratnost k' (pri čemu $k' = 0$ znači $f(\alpha) \neq 0$), onda su prema upravo dokazanom $f^{(j)}(\alpha) = 0$ točno za $j < k'$, pa je $k' = k$. $\square$

Zadatak 9.58. Odredite kratnost nultočke $x = 2$ polinoma $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

Rješenje. Računamo vrijednosti derivacija u 2:

$$\begin{aligned} f(2) &= 32 - 80 + 56 - 8 + 8 - 8 = 0, & f'(2) &= 0, \\ f'(x) &= 5x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 4x + 4, & f''(2) &= 0, \\ f''(x) &= 20x^3 - 60x^2 + 42x - 4, & f'''(2) &= 42 \neq 0, \\ f'''(x) &= 60x^2 - 120x + 42, \end{aligned}$$

Prema korolaru 9.57 $x = 2$ je nultočka polinoma f kratnosti 3.

Kratnost možemo odrediti i uzastopnom primjenom Hornerova algoritma, dijeleći svaki dobiveni kvocijent ponovno s $x - 2$ sve dok ostatak ne bude različit od nule:

	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	0
2	1	-1	-1	-2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	7			

Tri puta dobivamo ostatak 0, a četvrti put ostatak $7 \neq 0$. Dakle, kratnost je 3 i $f(x) = (x - 2)^3(x^2 + x + 1)$. $\square$

Zadatak 9.59. Dokažite da polinom $f(x) = x^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, nema višestrukih nultočaka.

Rješenje. Kad bi f imao višestruku nultočku, onda bi f i f' imali zajedničku nultočku (koro-lar 9.57). Vrijedi $f'(x) = nx^{n-1}$; za $n = 1$ derivacija je konstanta 1 i nema nultočaka, a za $n \geq 2$ jedina nultočka od f' je $x = 0$. No $f(0) = 0^n - 1 = -1 \neq 0$. Dakle, f i f' nemaju zajedničkih nultočaka, pa f nema višestrukih nultočaka. $\square$

Zadatak 9.60. Odredite koeficijente a i b polinoma $f(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 + b$ tako da bude djeljiv s $(x - 2)^2$.

Rješenje. Vrijedi $(x - 2)^2 \mid f$ ako i samo ako je $x = 2$ nultočka polinoma f kratnosti barem 2, tj. ako i samo ako je $f(2) = 0$ i $f'(2) = 0$. Kako je $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 - 4x$, dobivamo

$$\begin{cases} f(2) = 16 + 8a - 8 + b = 0 \\ f'(2) = 32 + 12a - 8 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 8a + b = -8 \\ 12a = -24 \end{cases} \implies a = -2, b = 8.$$

Tada je $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8 = (x - 2)^2(x^2 + 2x + 2)$. $\square$

Zadatak 9.61. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{100} - x^{50} + 1$ polinomom $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

Rješenje. Vrijedi $g(x) = (x - 1)^2$, a ostatak je oblika $r(x) = ax + b$. Dakle,

$$x^{100} - x^{50} + 1 = q(x)(x - 1)^2 + ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Uvrštavanjem $x = 1$ dobivamo $1 - 1 + 1 = 0 + a + b$, tj. $a + b = 1$. Deriviranjem jednakosti $(*)$ dobivamo

$$100x^{99} - 50x^{49} = q'(x)(x - 1)^2 + 2q(x)(x - 1) + a,$$

a uvrštavanjem $x = 1$ slijedi $100 - 50 = 0 + 0 + a$, tj. $a = 50$. Tada je $b = -49$, pa je $r(x) = 50x - 49$. $\square$

9.9 Polinomi s cjelobrojnim koeficijentima

Zadatak 9.62. Nađite polinom s cjelobrojnim koeficijentima kojemu je nultočka $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Rješenje. Pogledajmo najprije jednostavnije primjere. Polinom $f \in \mathbb{Z}[x]$ s nultočkom 2 je primjerice $f(x) = x - 2$. Za nultočku $\frac{\sqrt{5}}{2}$: iz $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ slijedi $2x = \sqrt{5}$, a kvadriranjem $4x^2 = 5$; dakle, $f(x) = 4x^2 - 5$. Iracionalnosti, dakle, uklanjamo potenciranjem.

Neka je $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. Tada je $x - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3}$, pa kubiranjem dobivamo

$$x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2} = 3, \quad \text{tj.} \quad x^3 + 6x - 3 = \sqrt{2}(3x^2 + 2).$$

Kvadriranjem slijedi

$$x^6 + 12x^4 - 6x^3 + 36x^2 - 36x + 9 = 2(9x^4 + 12x^2 + 4),$$

odnosno

$$f(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1.$$

Broj $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ je nultočka polinoma $f \in \mathbb{Z}[x]$. $\square$

Zadatak 9.63. Neka je $f \in \mathbb{Z}[x]$. Dokažite: ako su $f(0)$ i $f(1)$ neparni brojevi, onda f nema cjelobrojnih nultočaka.

Rješenje. Pretpostavimo da f ima cjelobrojnu nultočku $k \in \mathbb{Z}$. Prema Bézoutovu teoremu $x - k \mid f$, tj. postoji $g \in \mathbb{Z}[x]$ takav da je

$$f(x) = (x - k)g(x).$$

Polinom g ima cjelobrojne koeficijente jer se oni dobivaju Hornerovim algoritmom samo množenjem i zbrajanjem cijelih brojeva (napomena 9.15). Uvrštavanjem dobivamo

$$f(0) = -k g(0), \quad f(1) = (1 - k) g(1),$$

gdje su svi faktori cijeli brojevi. Kako je $f(0)$ neparan, i k mora biti neparan; kako je $f(1)$ neparan, i $1 - k$ mora biti neparan, tj. k je paran. To je kontradikcija, pa f nema cjelobrojnih nultočaka. $\square$

Zadatak 9.64. Dokažite da ne postoji polinom $f \in \mathbb{Z}[x]$ takav da je $f(1) = 2$ i $f(3) = 5$.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da takav polinom f postoji.

I. način. Definiramo $g \in \mathbb{Z}[x]$ s $g(x) = f(x + 1)$. Tada je $g(0) = 2$ i $g(2) = 5$. Neka je $g(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}$. Iz $g(0) = a_0$ slijedi $a_0 = 2$, pa je

$$5 = g(2) = \underbrace{a_n 2^n + \dots + a_1 \cdot 2}_{\text{paran broj}} + 2,$$

tj. neparan broj 5 jednak je parnom broju, što je kontradikcija.

II. način. Prema zadatku 9.26 i napomeni 9.15 vrijedi $f(x) = (x - 1)q(x) + f(1)$ za neki $q \in \mathbb{Z}[x]$. Tada je

$$5 = f(3) = (3 - 1)q(3) + 2, \quad \text{tj.} \quad 3 = 2q(3),$$

pa bi $2 \mid 3$, što je kontradikcija. $\square$

Napomena 9.65. Ekvivalentno, pomakom $h(x) = f(x + 2)$ zadatak prelazi u pitanje postoji li $h \in \mathbb{Z}[x]$ s $h(-1) = 2$ i $h(1) = 5$. Ni takav polinom ne postoji jer je $h(1) - h(-1) = 2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots)$ paran broj, a $5 - 2 = 3$ neparan (parnost se ne slaže).

Zadatak 9.66. Neka je $f \in \mathbb{Z}[x]$ i neka su $a, b, c \in \mathbb{Z}$ međusobno različiti takvi da je $f(a) = f(b) = f(c) = 2$. Dokažite da ne postoji $d \in \mathbb{Z}$ takav da je $f(d) = 3$.

Rješenje. I. način. Definiramo $g(x) = f(x) - 2$, $g \in \mathbb{Z}[x]$. Tada je $g(a) = g(b) = g(c) = 0$, pa prema korolaru 9.29

$$(x - a)(x - b)(x - c) \mid g,$$

tj. postoji $h \in \mathbb{Z}[x]$ takav da je $g(x) = (x - a)(x - b)(x - c)h(x)$ (kvocijent je cjelobrojan jer dijelimo normiranim linearnim polinomima, napomena 9.15). Dakle,

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)h(x) + 2.$$

Pretpostavimo da postoji $d \in \mathbb{Z}$ takav da je $f(d) = 3$. Tada je

$$1 = (d - a)(d - b)(d - c)h(d),$$

a svi su faktori cijeli brojevi. Zato je $d - a, d - b, d - c, h(d) \in \{-1, 1\}$. Tri broja $d - a, d - b, d - c$ iz dvočlanog skupa $\{-1, 1\}$ ne mogu biti različita, pa je $d - a = d - b$ ili $d - a = d - c$ ili $d - b = d - c$, tj. $a = b$ ili $a = c$ ili $b = c$. To je kontradikcija.

II. način. Kao u prethodnom zadatku,

$$f(x) = (x - a)q_1(x) + 2 = (x - b)q_2(x) + 2 = (x - c)q_3(x) + 2, \quad q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Z}[x].$$

Ako je $f(d) = 3$ za neki $d \in \mathbb{Z}$, onda je $3 = (d - a)q_1(d) + 2$, tj. $(d - a)q_1(d) = 1$, pa je $d - a = \pm 1$. Analogno je $d - b = \pm 1$ i $d - c = \pm 1$, tj. $d - a, d - b, d - c \in \{1, -1\}$. Kako su a, b, c različiti, i brojevi $d - a, d - b, d - c$ su različiti, što je kontradikcija. $\square$

Zadatak 9.67. Dokažite da ne postoji $f \in \mathbb{Z}[x]$ takav da je $f(11) - f(7)$ prost broj.

Rješenje. I. način. Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}$. Oduzimanjem

$$\begin{aligned} f(11) &= a_n 11^n + a_{n-1} 11^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 11 + a_0, \\ f(7) &= a_n 7^n + a_{n-1} 7^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 7 + a_0 \end{aligned}$$

dobivamo

$$f(11) - f(7) = a_n(11^n - 7^n) + a_{n-1}(11^{n-1} - 7^{n-1}) + \dots + a_1(11 - 7).$$

Tvrdimo: $4 \mid 11^m - 7^m$ za svaki $m \in \mathbb{N}$. Dokazujemo indukcijom.

- (i) Za $m = 1$ je $11 - 7 = 4$.
- (ii) Pretpostavimo da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $4 \mid 11^m - 7^m$, tj. da postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $11^m - 7^m = 4k$.
- (iii) Tada je

$$11^{m+1} - 7^{m+1} = 11 \cdot 11^m - 7 \cdot 7^m = 4 \cdot 11^m + 7(11^m - 7^m) = 4 \cdot 11^m + 7 \cdot 4k = 4(11^m + 7k),$$

pri čemu je $11^m + 7k \in \mathbb{Z}$. Dakle, $4 \mid 11^{m+1} - 7^{m+1}$.

Zato je $f(11) - f(7)$ djeljiv s 4, pa nije prost broj.

II. način. Prema napomeni 9.15 je $f(x) = (x - 7)g(x) + f(7)$ za neki $g \in \mathbb{Z}[x]$. Tada je

$$f(11) = (11 - 7)g(11) + f(7), \quad \text{tj.} \quad f(11) - f(7) = 4g(11), \quad g(11) \in \mathbb{Z}.$$

Dakle, $4 \mid f(11) - f(7)$, pa $f(11) - f(7)$ nije prost broj. □

Napomena 9.68. Oba načina dokazuju i općenitiju tvrdnju: za $f \in \mathbb{Z}[x]$ i $a, b \in \mathbb{Z}$ vrijedi $a - b \mid f(a) - f(b)$. Naime, $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + b^{k-1})$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

9.10 Zadaci za samostalan rad

- 9.1.** Odredite zbroj koeficijenata i zbroj koeficijenata uz neparne potencije polinoma $(2x^2 - x + 3)^5$.
- 9.2.** Podijelite $x^4 - 1$ s $x^2 + x + 1$.
- 9.3.** Odredite ostatak pri dijeljenju $x^{2026} + x^{2025} + 1$ s $x^2 - 1$.
- 9.4.** Odredite ostatak pri dijeljenju $x^{100} + x^{51} + 1$ s $x^2 + 1$.
- 9.5.** Polinom f zadovoljava $f(1) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(0) = 5$. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma f s $x(x - 1)(x + 1)$.
- 9.6.** Neka je $a \neq b$, $f(a) = b$ i $f(b) = a$. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma f s $(x - a)(x - b)$.
- 9.7.** Odredite $M(x^4 - 1, x^3 - x^2 + x - 1)$.
- 9.8.** Rastavite $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ na linearne faktore.
- 9.9.** Zapišite $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ po potencijama od $x - 1$ (uzastopnom primjenom Hornerova algoritma).

- 9.10.** Za koje $a, b \in \mathbb{R}$ polinom $x^3 + ax^2 + bx + 2$ ima nultočku 1 kratnosti barem 2?
- 9.11.** Rastavite $x^4 + 4$ na ireducibilne faktore nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$.
- 9.12.** Nađite normirani realni polinom najmanjeg stupnja s nultočkama 2 i $1 + 2i$.
- 9.13.** Nađite normirani polinom najmanjeg stupnja s racionalnim koeficijentima kojemu su nultočke $\sqrt{2}$, i i $1 + \sqrt{3}$.
- 9.14.** Dokažite da polinom s racionalnim koeficijentima koji ima nultočku $\sqrt{5}$ ima i nultočku $-\sqrt{5}$.
- 9.15.** Može li $f \in \mathbb{Z}[x]$ zadovoljavati $f(2) = 1$ i $f(5) = 3$?
- 9.16.** Dokažite da nekonstantan polinom iz $\mathbb{Z}[x]$ ne može u svakom prirodnom broju poprimati vrijednost koja je prost broj.

Poglavlje 10

Rastav na parcijalne razlomke

10.1 Racionalne funkcije i oblik rastava

Definicija 10.1. Neka su $f, g \in \mathbb{R}[x]$ polinomi i g nije nulpolinom. Funkcija $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ naziva se *racionalna funkcija*; njezina je domena $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$. Racionalna funkcija je *prava* ako je f nulpolinom ili $\deg f < \deg g$.

Racionalnu funkciju rastavljamo na parcijalne razlomke u tri koraka.

1° *Svođenje na pravu racionalnu funkciju.* Ako je $\deg f \geq \deg g$, podijelimo f s g : postoje polinomi q i r takvi da je $f = q \cdot g + r$ i $\deg r < \deg g$ (ili $r = 0$). Tada je

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)g(x) + r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)},$$

pri čemu je $\frac{r}{g}$ prava racionalna funkcija. Dalje rastavljamo samo nju. Ako je $\deg f < \deg g$, ovaj korak preskačemo.

2° *Faktorizacija nazivnika.* Polinom g rastavimo na linearne faktore i kvadratne faktore bez realnih nultočaka:

$$g(x) = a(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_m)^{k_m} (x^2 + b_1x + c_1)^{r_1} \cdots (x^2 + b_\ell x + c_\ell)^{r_\ell},$$

gdje su $a_1, \dots, a_m$ različite realne nultočke od g , a svaki faktor $x^2 + b_i x + c_i$ ima diskriminantu $b_i^2 - 4c_i < 0$, tj. odgovara paru konjugirano kompleksnih nultočaka.

3° *Zapis rastava.* Svakom faktoru nazivnika pridružujemo članove rastava prema tablici:

Faktor u nazivniku	Članovi u rastavu
$ax + b$	$\frac{A}{ax + b}$
$(ax + b)^k$	$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$
$ax^2 + bx + c, \quad b^2 - 4ac < 0$	$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$
$(ax^2 + bx + c)^k, \quad b^2 - 4ac < 0$	$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$

Pritom su svi koeficijenti A, B, A_i, B_i realni brojevi koje tek treba odrediti.

Teorem 10.2 (Rastav na parcijalne razlomke). *Neka je g zapisan kao u $\mathcal{Z}^\circ$ (s vodećim koeficijentom $a = 1$) i neka je $\deg r < \deg g$. Tada postoje jedinstveni realni brojevi $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ takvi da je*

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{g(x)} = & \frac{A_{1,1}}{x - a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x - a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + \cdots \\ & + \frac{A_{m,1}}{x - a_m} + \frac{A_{m,2}}{(x - a_m)^2} + \cdots + \frac{A_{m,k_m}}{(x - a_m)^{k_m}} \\ & + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + b_1x + c_1} + \cdots + \frac{B_{1,r_1}x + C_{1,r_1}}{(x^2 + b_1x + c_1)^{r_1}} + \cdots \\ & + \frac{B_{\ell,1}x + C_{\ell,1}}{x^2 + b_\ell x + c_\ell} + \cdots + \frac{B_{\ell,r_\ell}x + C_{\ell,r_\ell}}{(x^2 + b_\ell x + c_\ell)^{r_\ell}}. \end{aligned}$$

Taj se zapis naziva rastav na parcijalne razlomke.

Ukupan broj nepoznatih koeficijenata jednak je $\deg g$. Koeficijente određujemo tako da jednakost pomnožimo nazivnikom g i dobijemo jednakost polinoma. Zatim

- *izjednačimo koeficijente* uz iste potencije od x i riješimo dobiveni sustav, ili
- *uvrstimo* pogodne vrijednosti od x . Dobivena polinomna jednakost vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$ (dva polinoma koja se podudaraju u beskonačno mnogo točaka su jednaka), pa smijemo uvrstiti i nultočke od g , iako početni razlomak u njima nije definiran. Upravo su one najzgodnije, jer poništavaju većinu članova.

Oba se postupka mogu i kombinirati.

10.2 Linearni faktori

Zadatak 10.3. Rastavite na parcijalne razlomke $\frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10}$.

Rješenje. Razlomak je prav. Nazivnik je $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$, pa je

$$\frac{5x + 11}{(x - 2)(x + 5)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 5} \quad \Big/ \cdot (x - 2)(x + 5).$$

Slijedi

$$5x + 11 = A(x + 5) + B(x - 2) = (A + B)x + (5A - 2B).$$

Izjednačavanjem koeficijenata dobivamo sustav $A + B = 5$, $5A - 2B = 11$, čije je rješenje $A = 3$, $B = 2$. (Brže: uvrštavanjem $x = 2$ dobivamo $21 = 7A$, a uvrštavanjem $x = -5$ dobivamo $-14 = -7B$.) Dakle,

$$\frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10} = \frac{3}{x - 2} + \frac{2}{x + 5}, \quad x \neq 2, -5.$$

Uočimo da su ovdje nultočke nazivnika realne i različite, pa svakoj odgovara po jedan član. $\square$

Zadatak 10.4. Rastavite na parcijalne razlomke $\frac{2x - 1}{(x + 1)^2}$.

Rješenje. Ovdje nazivnik ima višestruku realnu nultoku -1 (kratnosti 2), pa rastav mora sadržavati oba člana:

$$\frac{2x - 1}{(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} \quad \Big/ \cdot (x + 1)^2.$$

Slijedi $2x - 1 = A(x + 1) + B = Ax + (A + B)$, pa je $A = 2$ i $A + B = -1$, tj. $B = -3$. Dakle,

$$\frac{2x - 1}{(x + 1)^2} = \frac{2}{x + 1} - \frac{3}{(x + 1)^2}, \quad x \neq -1.$$

□

Zadatak 10.5. Rastavite na parcijalne razlomke $\frac{1}{x^3 + x^2 - x - 1}$.

Rješenje. Nazivnik faktoriziramo grupiranjem:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2.$$

Postavljamo

$$\frac{1}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2} \quad / \cdot (x - 1)(x + 1)^2,$$

$$1 = A(x + 1)^2 + B(x - 1)(x + 1) + C(x - 1).$$

Ovdje je lakše uvrštavati nultočke nazivnika (a smijemo uvrstiti bilo koji $x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} x = 1: \quad 1 &= 4A & \implies A &= \frac{1}{4}, \\ x = -1: \quad 1 &= -2C & \implies C &= -\frac{1}{2}, \\ x = 0: \quad 1 &= A - B - C & \implies B &= A - C - 1 = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Isto dobivamo i izjednačavanjem koeficijenata: iz $1 = (A + B)x^2 + (2A + C)x + (A - B - C)$ slijedi sustav $A + B = 0$, $2A + C = 0$, $A - B - C = 1$. Dakle,

$$\frac{1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{1}{4(x - 1)} - \frac{1}{4(x + 1)} - \frac{1}{2(x + 1)^2}, \quad x \neq \pm 1.$$

□

10.3 Kvadratni faktori

Ako nazivnik ima jednostruke kompleksne nultočke, u njemu se pojavljuje faktor $x^2 + ax + b$ s $a^2 - 4b < 0$, tj. bez realnih nultočaka. Tada u rastavu pišemo član $\frac{Cx + D}{x^2 + ax + b}$. Ako su kompleksne nultočke višestruke, u nazivniku se pojavljuje $(x^2 + ax + b)^n$ s $a^2 - 4b < 0$, pa u rastavu pišemo članove

$$\frac{C_1x + D_1}{x^2 + ax + b} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + ax + b)^2} + \cdots + \frac{C_nx + D_n}{(x^2 + ax + b)^n}.$$

Zadatak 10.6. Rastavite na parcijalne razlomke $\frac{1}{x^3 + 1}$.

Rješenje. Vrijedi $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, a diskriminanta kvadratnog faktora je $(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$, pa on nema realnih nultočaka. Postavljamo

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} \quad / \cdot (x + 1)(x^2 - x + 1),$$

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) = (A + B)x^2 + (-A + B + C)x + (A + C).$$

Izjednačavanjem koeficijenata:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B + C = 0 \\ A + C = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 0 \\ 2B + C = 0 \\ -B + C = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 0 \\ -B + C = 1 \\ 3C = 2, \end{cases}$$

pa je $C = \frac{2}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $A = \frac{1}{3}$. (Do A brže dolazimo uvrštavanjem $x = -1$: $1 = 3A$.) Dakle,

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x + 1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3(x + 1)} - \frac{x - 2}{3(x^2 - x + 1)}, \quad x \neq -1.$$

□

Zadatak 10.7. Rastavite na parcijalne razlomke $\frac{x - 1}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4}$.

Rješenje. Neka je $g(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$. Kandidati za racionalne nultočke od g su djelitelji slobodnog člana: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Hornerova shema:

	1	-4	5	-4	4
1	1	-3	2	-2	2
-1	1	-5	10	-14	18
2	1	-2	1	-2	0
2	1	0	1	0	

Broj 2 je nultočka: $g(x) = (x - 2)(x^3 - 2x^2 + x - 2)$, a zatim je $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1)$. Dakle, $g(x) = (x - 2)^2(x^2 + 1)$, pri čemu $x^2 + 1$ nema realnih nultočaka. Postavljamo

$$\frac{x - 1}{g(x)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \quad / \cdot (x - 2)^2(x^2 + 1),$$

$$\begin{aligned} x - 1 &= A(x - 2)(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 2)^2 \\ &= A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^2 + 1) + C(x^3 - 4x^2 + 4x) + D(x^2 - 4x + 4). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz $x^3, x^2, x, 1$ dobivamo

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -2A + B - 4C + D = 0 \\ A + 4C - 4D = 1 \\ -2A + B + 4D = -1. \end{cases}$$

Uvrstimo $A = -C$ iz prve jednadžbe u treću, a od četvrte oduzmemo drugu:

$$3C - 4D = 1 \quad / \cdot 3, \quad 4C + 3D = -1 \quad / \cdot 4.$$

Zbrajanjem slijedi $25C = -1$, tj. $C = -\frac{1}{25}$. Zatim je $D = \frac{1}{3}(-1 - 4C) = \frac{1}{3}\left(-1 + \frac{4}{25}\right) = -\frac{7}{25}$, $A = -C = \frac{1}{25}$ i $B = -1 + 2A - 4D = -1 + \frac{2}{25} + \frac{28}{25} = \frac{1}{5}$. (Za provjeru: uvrštavanje $x = 2$ daje $1 = 5B$.) Dakle,

$$\frac{x - 1}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{25(x - 2)} + \frac{1}{5(x - 2)^2} + \frac{-x - 7}{25(x^2 + 1)}, \quad x \neq 2.$$

□

Zadatak 10.8. Rastavite na parcijalne razlomke $\frac{2x^3 + x^2 + 3x + 4}{(x-1)(x^2+1)^2}$.

Rješenje. Uz dvostruki kvadratni faktor treba predvidjeti dva člana s linearnim brojcima:

$$\frac{2x^3 + x^2 + 3x + 4}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

$$2x^3 + x^2 + 3x + 4 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1).$$

Uvrštavanje $x = 1$ daje $10 = 4A$, pa je $A = \frac{5}{2}$. Izjednačavanje koeficijenata uz $x^4, x^3, x^2, x, 1$ daje sustav

$$A + B = 0, \quad C - B = 2, \quad 2A + B - C + D = 1, \quad C - B + E - D = 3, \quad A - C - E = 4,$$

iz kojega redom slijedi $B = -\frac{5}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = -2, E = -1$. Zato je

$$\frac{2x^3 + x^2 + 3x + 4}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{5}{2(x-1)} - \frac{5x+1}{2(x^2+1)} - \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}, \quad x \neq 1.$$

□

10.4 Nepravi razlomci i opći oblik rastava

Zadatak 10.9. Rastavite na parcijalne razlomke $\frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$.

Rješenje. Stupanj brojnika nije manji od stupnja nazivnika, pa najprije dijelimo (korak 1°): $x^3 + 2x^2 + x + 1 = 1 \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) + x^2$. Nazivnik je $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$, pa je

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = 1 + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Za pravi dio postavljamo

$$\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}, \quad x^2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1).$$

Izjednačavanjem koeficijenata dobivamo $A + B = 1, B + C = 0, A + C = 0$, pa je $A = B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}$. Dakle,

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = 1 + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{x-1}{2(x^2+1)}, \quad x \neq -1.$$

□

Zadatak 10.10. Napišite opći oblik rastava na parcijalne razlomke (bez računanja koeficijenata) za

$$\frac{x^7 + x^3 - x + 11}{x^2(x^2+1)^3(x-1)(x^2+2x)^4}.$$

Rješenje. Nazivnik najprije do kraja faktoriziramo i skupimo jednake faktore: $x^2+2x = x(x+2)$, pa je $(x^2+2x)^4 = x^4(x+2)^4$ i nazivnik je jednak

$$x^6(x^2+1)^3(x-1)(x+2)^4.$$

Njegov je stupanj $6 + 6 + 1 + 4 = 17 > 7$, pa je razlomak prav, a $x^2 + 1$ nema realnih nultočka. Traženi je oblik

$$\begin{aligned}\frac{x^7 + x^3 - x + 11}{x^6(x^2 + 1)^3(x - 1)(x + 2)^4} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{x^6} \\ &+ \frac{Gx + H}{x^2 + 1} + \frac{Ix + J}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Kx + L}{(x^2 + 1)^3} + \frac{M}{x - 1} \\ &+ \frac{N}{x + 2} + \frac{O}{(x + 2)^2} + \frac{P}{(x + 2)^3} + \frac{Q}{(x + 2)^4}.\end{aligned}$$

Treba odrediti 17 realnih koeficijenata, koliko iznosi stupanj nazivnika. Isti oblik vrijedi za svaki brojnik stupnja manjeg od 17. Domena je $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$. $\square$

Napomena 10.11. Česte pogreške: član uz $\frac{1}{x-a}$ ne izostavlja se zato što se u nazivniku pojavljuje $(x - a)^2$; uz kvadratni faktor bez realnih nultočka brojnik je općenito linearan, a ne konstanta; nazivnik treba faktorizirati do kraja (kao $x^2 + 2x = x(x + 2)$ u prethodnom zadatku) i prije toga provjeriti je li razlomak prav. Domena rastava jednaka je domeni početne funkcije.

10.5 Zadaci za samostalan rad

Rastavite sljedeće racionalne funkcije na parcijalne razlomke i zapišite njihovu domenu:

10.1. $\frac{x + 1}{(x - 1)(x + 2)}.$

10.2. $\frac{2x + 3}{(x - 1)^2}.$

10.3. $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$

10.4. $\frac{1}{x^2(x + 1)}.$

10.5. Objasnite zašto je $\frac{3x + 2}{x^2 + 2x + 2}$ već sam po sebi rastav na parcijalne razlomke.

Dodatak A

Odgovori i upute za samostalan rad

Brojevi u ovom dodatku odnose se na zadatke u odjeljcima *Zadaci za samostalan rad*. Za zadatke s dokazom navedena je ključna ideja; dokaz treba napisati u cijelosti.

1. Logika sudova i predikata

- 1.1. Sva tri suda su tautologije: u njihovim semantičkim tablicama posljednji stupac sadrži samo jedinice. Primjerice, $P \implies (Q \implies P)$ mogao bi biti lažan samo za $\tau(P) = 1$ i $\tau(Q \implies P) = 0$, a to bi zahtijevalo $\tau(P) = 0$.
- 1.2. Negacija je $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{R}) x + y \leq z$. Ona je istinita (za bilo koje x, y uzmemo $z = x + y$), pa je početna tvrdnja lažna.
- 1.3. $\overline{\overline{P} \vee Q} \equiv P \wedge \overline{Q}$, pa je zadana formula $(P \wedge \overline{Q}) \vee (P \wedge Q) \equiv P \wedge (\overline{Q} \vee Q) \equiv P$.
- 1.4. Prva tvrdnja je istinita (uzmemo $y = -x$). Druga je lažna: isti y morao bi zadovoljavati $0 + y = 0$ i $1 + y = 0$, tj. $y = 0$ i $y = -1$.
- 1.5. Dokažite obrat po kontrapoziciji: ako je $n = 2k$ paran, onda je $n^2 = 2(2k^2)$ paran.
- 1.6. Negacije su $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x \geq y$ i $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) xy \geq 0$. Oba su polazna suda istinita (u prvom uzmemo $y = x + 1$, a u drugom npr. $x = 1, y = -1$).
- 1.7. Obrat: $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 > 4 \implies x > 2)$; lažan je, protuprimjer je $x = -3$. Obrat po kontrapoziciji: $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \leq 4 \implies x \leq 2)$. Polazna tvrdnja i njezin obrat po kontrapoziciji su istiniti.

2. Skupovi

- 2.1. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
- 2.2. Element pripada objema stranama ako i samo ako pripada A i B , a ne pripada C . Za desnu stranu: uz $x \in A$ uvjet $x \notin A \cap C$ znači upravo $x \notin C$.
- 2.3. Rješenja postoje ako i samo ako je $B \subseteq A$. Tada su sva rješenja $X = B \cup S$, gdje je $S \subseteq U \setminus A = A^c$ proizvoljan.
- 2.4. $|A \times B| = 12$ i $|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{12} = 4096$.
- 2.5. Izaberite $c \in C$. Za $a \in A$ je $(a, c) \in A \times C = B \times C$, pa je $a \in B$; dakle $A \subseteq B$, a analogno $B \subseteq A$. Za $C = \emptyset$ oba su produkta prazna za bilo koje A, B , pa tvrdnja ne vrijedi.

- 2.6.** $A \triangle B = \emptyset$ znači da nijedan element ne pripada točno jednom od skupova A, B , tj. $A \setminus B = \emptyset$ i $B \setminus A = \emptyset$, odnosno $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.
- 2.7.** Ako je $x \in A \cap B$, onda je $x \in B$; ako je $x \in C \setminus A$, onda je $x \in C$. U oba je slučaja $x \in B \cup C$.

3. Relacije

- 3.1.** Relacija ekvivalencije: $a + b$ je paran točno kada su a i b iste parnosti. Klase su $[0]$ (parni brojevi) i $[1]$ (neparni brojevi). Nije antisimetrična, npr. $0\rho 2$ i $2\rho 0$.
- 3.2.** Nije refleksivna ni simetrična; antisimetrična je (pretpostavka $x < y \wedge y < x$ nikad nije ispunjena), tranzitivna je i irefleksivna je.
- 3.3.** Ako su ρ, σ relacije ekvivalencije, onda $\Delta \subseteq \rho \cap \sigma$; iz $(x, y) \in \rho \cap \sigma$ slijedi $(y, x) \in \rho$ i $(y, x) \in \sigma$; iz $(x, y), (y, z) \in \rho \cap \sigma$ tranzitivnost obiju relacija daje $(x, z) \in \rho \cap \sigma$.
- 3.4.** Ne mora biti tranzitivna. Uzmite relacije ekvivalencije na $\{1, 2, 3\}$ s klasama $\{1, 2\}, \{3\}$ i $\{1\}, \{2, 3\}$. Unija sadrži $(1, 2)$ i $(2, 3)$, ali ne i $(1, 3)$.
- 3.5.** Par (x, z) pripada $\rho \circ \rho$ upravo kada postoji y s $x\rho y$ i $y\rho z$. Inkluzija $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ kaže upravo da tada vrijedi $x\rho z$, a to je tranzitivnost.
- 3.6.** $(x, y) \in (\rho^{-1})^{-1} \iff (y, x) \in \rho^{-1} \iff (x, y) \in \rho$.
- 3.7.** Za tranzitivnost je dovoljno promotriti parove izvan dijagonale: $(1, 3), (3, 1) \rightsquigarrow (1, 1)$, $(3, 1), (1, 3) \rightsquigarrow (3, 3)$, $(4, 5), (5, 4) \rightsquigarrow (4, 4)$, $(5, 4), (4, 5) \rightsquigarrow (5, 5)$; ako je jedan od dvaju parova na dijagonali, zaključak je jednak drugom paru.

4. Funkcije

- 4.1.** $D_f = \langle 1, 4 \rangle \setminus \{\sqrt{15}\}$ (uvjeti: $x - 1 > 0$, $16 - x^2 > 0$, $16 - x^2 \neq 1$).
- 4.2.** $f([0, 3]) = [-1, 3]$; $f^{-1}([0, 3]) = [-1, 0] \cup [2, 3]$.
- 4.3.** Za $y \geq -3$ jednadžba $(x - 2)^2 - 3 = y$ uz $x \geq 2$ ima jedinstveno rješenje $x = 2 + \sqrt{y + 3}$. Dakle, $f^{-1}: [-3, +\infty) \rightarrow [2, +\infty)$, $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x + 3}$.
- 4.4.** Prvi dio: $x \in S \Rightarrow f(x) \in f(S) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(S))$. Drugi dio: $y \in f(f^{-1}(T))$ ako i samo ako je $y = f(x)$ za neki x s $f(x) \in T$, tj. ako i samo ako je $y \in T$ i $y \in f(A)$. Primjer: za $f(x) = x^2$ na $\mathbb{R}$ i $S = \{1\}$ je $f^{-1}(f(S)) = \{-1, 1\} \neq S$.
- 4.5.** Domena je $\mathbb{R}$ i f je neparna. Iz $2|x| \leq 1 + x^2$ slijedi $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$, pa je f omeđena; slika je $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, a rubne vrijednosti postižu se u $x = \mp 1$.
- 4.6.** Strogo pada na $\langle -\infty, -2]$, strogo raste na $[-2, 0]$, strogo pada na $[0, 2]$ i strogo raste na $[2, +\infty)$.
- 4.7.** $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2} - 1} = \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$, $D_{f \circ g} = \langle 2, 3 \rangle$ (jer mora biti $\frac{1}{x-2} \geq 1$). $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}-2}$, $D_{g \circ f} = [1, +\infty) \setminus \{5\}$.
- 4.8.** Domena je $\mathbb{R}$ jer je $\sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq -x$. Funkcija je neparna: $f(-x) + f(x) = \ln((\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)) = \ln 1 = 0$.
- 4.9.** $D_f = [0, 1]$ (uvjet $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$), slika je $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a $f^{-1}: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]$, $f^{-1}(x) = \frac{1 + \sin x}{2}$.

5. Jednadžbe i nejednadžbe

- 5.1.** $x = 2$. Kvadriranjem se dobiva i kandidat $x = -1$, koji ne zadovoljava početnu jednadžbu (desna strana mora biti nenegativna).
- 5.2.** $x \in [\frac{2}{3}, 4]$. Nejednadžba je ekvivalentna s $-(x+1) \leq 2x-3 \leq x+1$.
- 5.3.** $x \in \{0, 2\}$; supstitucija $t = 2^x$ daje $t^2 - 5t + 4 = 0$, tj. $t \in \{1, 4\}$.
- 5.4.** $x = 3$. Uvjet je $x > 1$; jednadžba se svodi na $x^2 - 1 = 8$, a kandidat $x = -3$ ne zadovoljava uvjet.
- 5.5.** Za $a \neq 1$ jedino je rješenje $x = a + 1$; za $a = 1$ svaki $x \in \mathbb{R}$ je rješenje.
- 5.6.** $x \in [-5, -2)$. Nejednadžba je ekvivalentna s $\frac{x+5}{x+2} \leq 0$.
- 5.7.** $x \in (\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1) \cup (2, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$. Logaritam s bazom $\frac{1}{2}$ strogo pada, pa je nejednadžba ekvivalentna s $0 < x^2 - 3x + 2 < 1$.
- 5.8.** $x \in [-3, 2]$. Razlikujte slučajeve $x < -2$, $-2 \leq x < 1$ i $x \geq 1$.
- 5.9.** $x \in [-4, 5)$. Za $x \in [-4, 2)$ desna je strana negativna, pa nejednakost vrijedi; za $x \geq 2$ obje su strane nenegativne i kvadriranjem se dobiva $x^2 - 5x < 0$.

6. Trigonometrija

U svim odgovorima je $k \in \mathbb{Z}$.

- 6.1.** $x = \pi/3 + 2k\pi$ ili $x = 2\pi/3 + 2k\pi$.
- 6.2.** $x = 2k\pi$ ili $x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$; koristite $(2 \cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$.
- 6.3.** $x = 2k\pi$ ili $x = \pi/2 + 2k\pi$.
- 6.4.** $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\pi/12 + k\pi, 5\pi/12 + k\pi)$.
- 6.5.** Amplituda 2, period $2\pi/3$, slika $[-6, -2]$.
- 6.6.** $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi]$.

7. Matematička indukcija

- 7.1.** U koraku: $\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.
- 7.2.** U koraku: $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$. Tvrdnja slijedi i teleskopiranjem jer je $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
- 7.3.** Baza $n = 1$: $1 + x = \frac{x^2-1}{x-1}$. U koraku: $\frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$.
- 7.4.** Baza $n = 3$: $4 \geq 4$. U koraku: $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \geq 2(n+1) = 2n+2 \geq n+2$.
- 7.5.** Baza: $4 + 15 - 1 = 18$. U koraku: $4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4(4^n + 15n - 1) - 45n + 18$.
- 7.6.** U koraku: $(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ jer je $n+1 \geq 2$. Jednakost vrijedi za $n = 1$ i $n = 2$; za $n \geq 3$ nejednakost je stroga.
- 7.7.** Baza $n = 1$: jednakost. U koraku pomnožite pretpostavku s $1+x \geq 0$: $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$.

7.8. Dvije baze: $1 < \frac{7}{4}$, $1 < \frac{49}{16}$. U koraku: $a_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{11}{4} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$.

7.9. $x^4 + \frac{1}{x^4} = 47$. Uz $s_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ vrijedi $s_2 = s_1^2 - 2 = 7$ i $s_4 = s_2^2 - 2 = 47$.

8. Djeljivost i kongruencije

8.1. $-2026 = 17 \cdot (-120) + 14$; kvocijent je -120 , ostatak 14.

8.2. $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ djeljivo je s 3 i s 2, a $M(2, 3) = 1$, pa je djeljivo sa 6.

8.3. $252 = 198 \cdot 1 + 54$, $198 = 54 \cdot 3 + 36$, $54 = 36 \cdot 1 + 18$, $36 = 18 \cdot 2$; $M(252, 198) = 18 = 4 \cdot 252 + (-5) \cdot 198$.

8.4. $M(12345, 450) = 15$ (ostaci 195, 60, 15, 0); $M(11111111, 456) = 1$ (ostaci 215, 26, 7, 5, 2, 1, 0).

8.5. $5(3n+2) - 3(5n+3) = 1$, pa su brojnik i nazivnik relativno prosti.

8.6. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 (ukupno 25 brojeva).

8.7. Za paran n je $n^2 \equiv 0$, a za neparan $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

8.8. 9; vrijedi $7^2 \equiv -1 \pmod{10}$, pa je $7^{2026} = (7^2)^{1013} \equiv (-1)^{1013} \equiv 9 \pmod{10}$.

8.9. 2, jer je $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ i $2^{100} = (2^3)^{33} \cdot 2 \equiv 2 \pmod{7}$.

8.10. $10 \equiv -1 \pmod{11}$, pa je $10^m \equiv (-1)^m \pmod{11}$ i $n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k \pmod{11}$.

9. Polinomi

9.1. Zbroj koeficijenata je $f(1) = 4^5 = 1024$. Budući da je $f(-1) = 6^5 = 7776$, zbroj koeficijenata uz neparne potencije je $\frac{f(1)-f(-1)}{2} = -3376$.

9.2. Kvocijent $x^2 - x$, ostatak $x - 1$.

9.3. Ostatak $x + 2$: iz $r(x) = ax + b$, $r(1) = f(1) = 3$ i $r(-1) = f(-1) = 1$.

9.4. Ostatak $2 - x$: modulo $x^2 + 1$ je $x^2 \equiv -1$, pa je $x^{100} \equiv 1$ i $x^{51} \equiv -x$ (ili uvrstite $x = \pm i$).

9.5. $r(x) = -3x^2 - x + 5$ (iz $r(0) = 5$, $r(1) = 1$, $r(-1) = 3$).

9.6. $r(x) = -x + a + b$.

9.7. $x^3 - x^2 + x - 1$, jer je $x^4 - 1 = (x+1)(x^3 - x^2 + x - 1)$.

9.8. $(x-1)(x-2)(x-3)$.

9.9. $f(x) = (x-1)^4 + 2(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3$; uzastopni ostaci u Hornerovoj shemi s $\alpha = 1$ redom su 3, 0, 3, 2, 1.

9.10. $a = 0$, $b = -3$ (iz $f(1) = f'(1) = 0$). Tada je $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$, pa je kratnost točno 2.

9.11. Nad $\mathbb{R}$: $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ (oba faktora imaju negativnu diskriminantu). Nad $\mathbb{C}$: $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$.

9.12. $(x-2)(x^2 - 2x + 5) = x^3 - 4x^2 + 9x - 10$; uz $1 + 2i$ nultočka mora biti i $1 - 2i$.

- 9.13.** $(x^2 - 2)(x^2 + 1)(x^2 - 2x - 2) = x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x + 4$. Uz svaku od zadanih nultočka nultočke su $i - \sqrt{2}$, $-i$, $1 - \sqrt{3}$ (dokaz kao u zadatku 9.14, za $1 + \sqrt{3}$ dijeljenjem s $x^2 - 2x - 2$), pa je stupnja barem 6.
- 9.14.** Pri dijeljenju s $x^2 - 5$ ostatak je $ux + v$, $u, v \in \mathbb{Q}$. Uvrštavanjem $\sqrt{5}$ dobivamo $u\sqrt{5} + v = 0$; zbog iracionalnosti broja $\sqrt{5}$ je $u = v = 0$, pa $x^2 - 5$ dijeli polinom i $-\sqrt{5}$ je nultočka.
- 9.15.** Ne: $f(x) = (x - 2)q(x) + 1$ s $q \in \mathbb{Z}[x]$ daje $3 = 3q(5) + 1$, tj. $3 \mid 2$, što nije moguće.
- 9.16.** Pretpostavimo suprotno i neka je $p = f(1)$ prost. Iz $f(x) = (x - 1)q(x) + p$, $q \in \mathbb{Z}[x]$, slijedi $p \mid f(1 + kp)$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa je $f(1 + kp) = p$ (jer je to prost broj djeljiv s p). Tada polinom $f - p$ ima beskonačno mnogo nultočaka, pa je f konstantan, što je kontradikcija.

10. Parcijalni razlomci

10.1. $\frac{2}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+2)}$, domena $\mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

10.2. $\frac{2}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$, domena $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

10.3. $1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$, domena $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

10.4. $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$, domena $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

10.5. Nazivnik je $(x+1)^2 + 1 > 0$ i ireducibilan je nad $\mathbb{R}$, a brojnik je linearan. Domena je $\mathbb{R}$.

Literatura

D. Ilišević i G. Muić, *Uvod u matematiku*, skripta za predavanja, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, revizija siječanj 2023.