

# **Uvod u spektralnu analizu**

Predavanja, III. godina preddiplomskog studija Geofizike

*prof. dr. sc. Marijan Herak, prof. dr. sc. Dragutin Skoko*

Geofizički odsjek PMF-a, 13. prosinca 2021.

## Uvod

Ovaj kratki kurs osnova spektralne analize namijenjen je studentima geofizike. Nastao je na temelju predavanja prof. dr. sc. Dragutina Skoke koja je naknadno tijekom vremena dopunio prof. dr. sc. Marijan Herak. Predavanja su uglavnom bazirana na knjigama:

*Bendat, J. S., Piersol, A. G. (2010): Random data. Analysis and Measurement procedures (Fourth edition), John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, pp. 604.*

*Bracewell, R. N. (2000): The Fourier Transform and its Applications (3rd edition), McGraw-Hill, pp. 616.*

*Brigham, E. O. (1974): The Fast Fourier Transform, Prentice-Hall, pp. 252.*

*Havskov, J., Alguacil, G. (2004): Instrumentation in Earthquake Seismology, Springer, pp. 358.*

*Osgood, B. G. (2019): Lectures on the Fourier Transform and its Applications, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, pp. 693.*

*Papoulis, A. (1961): The Fourier integral and its applications, McGraw-Hill, New York, pp. 318.*

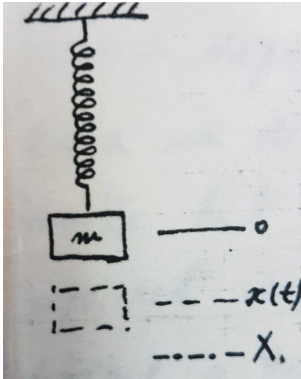
*Scherbaum, F. (1996): Of Poles and Zeros, Springer, pp. 268.*

Literatura o spektralnoj analizi je izuzetno bogata, pa ovaj izbor nije nikako reprezentativan. Ohrabrujem studente da konzultiraju i druge knjige, kao i bogate resurse na internetu.

Potreba za takav uvodni kolegij proizlazi iz same prirode većine geofizičkih podataka – to su najčešće *vremenski nizovi*, ponekad i vrlo dugoga trajanja, pa je njihov prikaz u prostoru vremena često nepregledan, a mnoge važne informacije koje oni nose nije lagano uočiti. Zbog toga su alati *harmoničke i spektralne analize* geofizičarima osobito važni – oni omogućavaju analizirane pojave promotriti i analizirati u području frekvencija, čime se postiže kompaktnost prikaza pojave bez gubitka informacija, te se postiže komplementaran uvid u njihova svojstva. Iako ćemo ovdje podatke shvaćati isključivo kao funkcije vremena, ista teorija i formalizam vrijedit će i ako vrijeme zamijenimo bilo kojom drugom varijablom (npr. prostorom).

### Osnovni opis empirijskih podataka

Empirijski podaci koji predstavljaju određenu fizikalnu pojavu mogu se općenito klasificirati u dvije skupine – determinističke i nedeterminističke.



*Deterministički podaci* su oni koje možemo opisati eksplicitnim matematičkim izrazom. Zamislimo, na primjer, kruto tijelo mase  $m$  obješeno na zavojnici kao na slici. Neka je  $k$  konstanta elastičnosti zavojnice. Pretpostavimo da je tijelo izmaknuto iz položaja ravnoteže u udaljenost  $X$ , a zatim ga pustimo, te od tog trenutka počnemo odbrojavati vrijeme. Na temelju osnovnih zakona mehanike ili ponavljanja mjerenja

može se utvrditi da postoji ovaj odnos položaja tijela  $x(t)$  i vremenskog trenutka  $t$ :

$$x(t) = X \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad t \geq 0$$

Tom jednadžbom određen je egzaktno položaj toga tijela u bilo koje vrijeme  $t \geq 0$ . Zato kažemo da su podaci kojima je opisano gibanje te mase deterministički. Gornji izraz, naravno, vrijedi ako uklonimo sve ostale sile osim sile elastičnosti zavojnice.

Ima fizikalnih pojava u prirodi koje su opisane podacima za koje možemo smatrati da se mogu sa zadovoljavajućom točnošću izraziti matematičkom jednadžbom. Primjerice to su gibanje satelita po svojoj stazi, nastup pomrčine Sunca ili Mjeseca, i sl.

Međutim, postoji niz prirodnih pojava koje se opisuju podacima koji nisu deterministički. Na primjer, nije moguće egzaktno odrediti visinu valova uzburkanog mora na određenom mjestu za zadani trenutak u budućnosti. Ti su podaci u svojoj osnovi slučajni, te se zato opisuju statističkim veličinama i parametrima vjerojatnosti, a ne eksplicitnim izrazima.

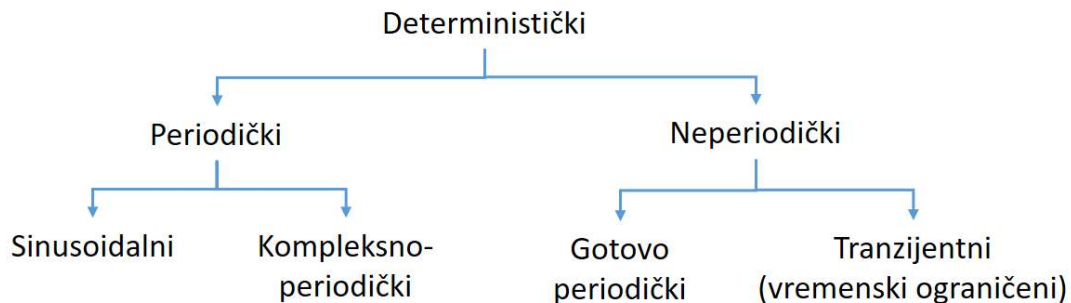
Ovakva klasifikacija fizikalnih podataka na determinističke i nedeterminističke (stohastičke) može biti diskutabilna s više aspekata. Može se, npr., reći da ne postoje podaci koji bi u svim uvjetima mjerenja bili striktno

deterministički jer je uvijek moguće da događaj koji nismo uzeli u obzir promijeni tok pojave. Neka, npr. kod spomenute zavojnice ona pukne, ili se masa odvoji od zavojnice, ili sile koje nismo uzeli u obzir (npr. trenje) igraju preveliku ulogu... S druge, pak, strane, možemo ustvrditi da u prirodi ne mogu postojati nedeterminističke pojave jer bi ih se sve moglo opisati egzaktnim izrazima ako bismo dovoljno znali o njihovom osnovnom mehanizmu i rubnim uvjetima.

U praksi ćemo zato lučiti determinističke podatke od nedeterminističkih prema tome možemo li ih reproducirati određenim eksperimentom unutar granice eksperimentalne pogreške (odnosno, kod prirodnih pojava, unutar granica koje zadovoljavaju naš interes). Ako takvo što nije moguće, podatke ćemo smatrati slučajnim.

### **Deterministički podaci**

Podaci koji predstavljaju determinističku pojavu mogu se klasificirati prema ovoj shemi:



Naravno, svaka kombinacija tih oblika determinističkih (pa i nedeterminističkih) podataka može doći u praksi. Radi jasnoće, opisat će se primjerom svaki od tih oblika.

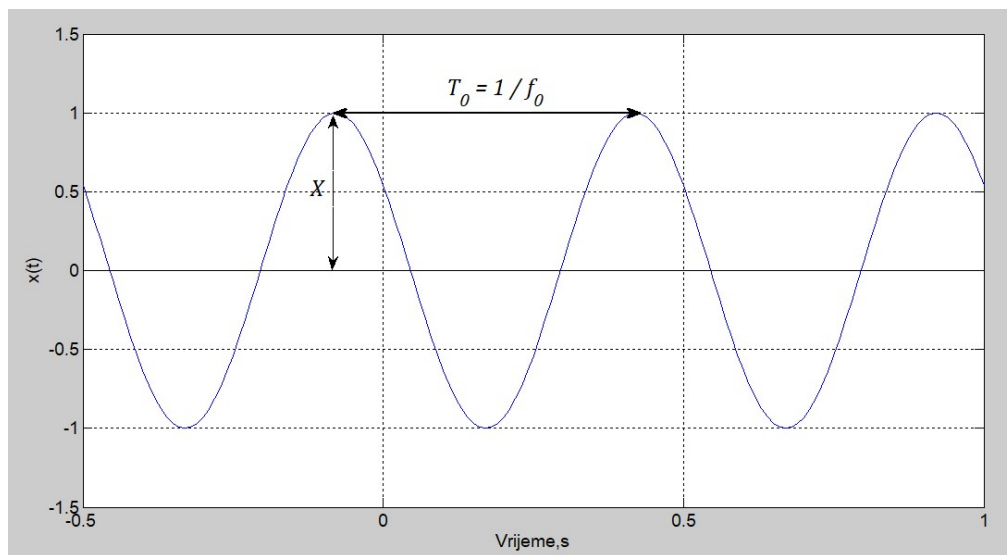
### *Sinusoidalni deterministički podaci*

Sinusoidalni (ili kosinusoidalni) podaci su takvi tip periodičkih podataka koji se matematički mogu izraziti funkcijom oblika:

$$x(t) = X \cos(2\pi f_0 t - \theta),$$

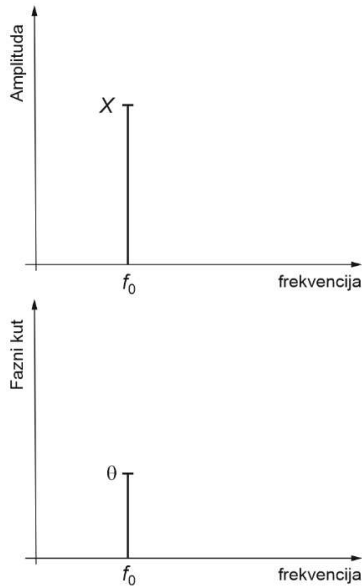
gdje je  $X$  – amplituda,  $f_0$  – frekvencija (broj oscilacija u jedinici vremena),  $\theta$  – početna faza,  $x(t)$  – vrijednost funkcije  $x$  u vrijeme  $t$ .

Kako predočiti takve podatke? Možemo to napraviti crtanjem vrijednosti  $x(t)$  u ovisnosti o vremenu  $t$  za odabrani interval vremena:



Takva slika zove se *vremenska slika* pojave. Ukoliko ona traje vrlo dugo, ta slika postaje nepregledna.

Istu informaciju možemo dobiti i tzv. *spektralnom slikom* signala, kod koje je nezavisna varijabla jednaka *frekvenciji* (s dimenzijom  $s^{-1} = \text{Hz}$ ):

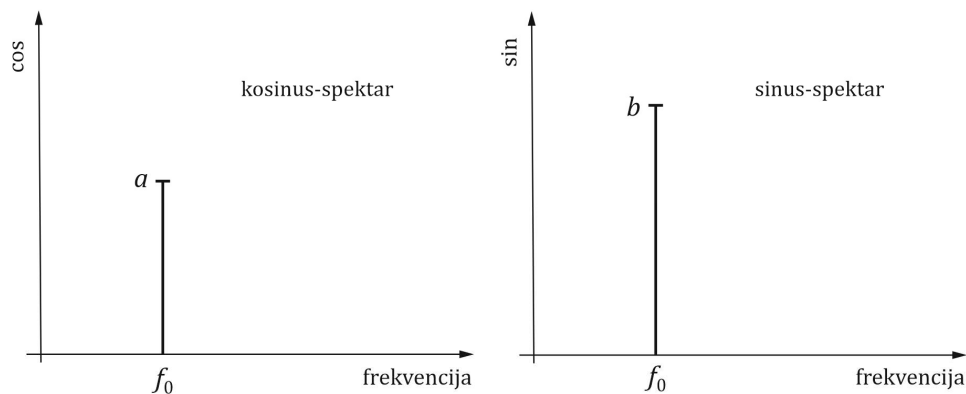


To je slika koja se sastoji od dva dijela koji pokazuju ovisnost amplitude  $X$  i faznog kuta (faze)  $\theta$  o frekvenciji  $f_0$ . Prvi dio slike zove se *spektar amplitude*, a drugi dio *spektar faze*. Primijetimo da ovakav prikaz pojave pruža o njoj punu informaciju.

Umjesto amplitude i faze često se spektralna slika predočuje amplitudama sinusnog i kosinusnog člana s nulnim pomakom u fazi.

U našem slučaju imamo:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= X \cos(2\pi f_0 t - \theta) \\
 &= \underbrace{X \cos \theta}_a \cos 2\pi f_0 t + \underbrace{X \sin \theta}_b \sin 2\pi f_0 t \\
 x(t) &= a \cos 2\pi f_0 t + b \sin 2\pi f_0 t
 \end{aligned}$$



U odnosu na spektralnu sliku podataka uočavamo:

Spektralna slika sinusoidalnih periodičkih podataka sastoji se, dakle, od dva dijela i to:

- od *spektara amplitude i faznog kuta*, ili
- od *spektara kosinusove amplitude i sinusove amplitude*.

Ta dva načina prikaza spektralne slike (spektra) posve su ekvivalentna jer znajući jednu možemo izračunati drugu. Naime:

$a = X \cos \theta$ ,  $b = X \sin \theta$ , pa je:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}, \quad X = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Primijetimo, ipak, da konverzija  $[a, b] \rightarrow [X, \theta]$  nije jednoznačna jer je  $\theta = \arctg(a/b) \pm n\pi$ . Kako računalni programi u pravilu kao rezultat daju kosinus- i sinus-spektar, a najčešće je potrebno poznavati spektre amplitude i faze, posebnim algoritmima se dodaje  $n\pi$  kada je potrebno da bi se fazni kut s frekvencijom mijenjao kontinuirano, bez skokova.

U ovom, najjednostavnijem slučaju, svaka se spektralna slika (amplitude, faze, kosinus- ili sinus-spektar) sastoji od jedne komponente pridružene frekvenciji. To je najjednostavniji slučaj *diskretnog ili linijskog spektra*.

Za razliku od vremenske slike podataka, koju nazivamo i *dinamičkom slikom*, spektralnu sliku nazivamo i *statičnom slikom* podataka.

*Kompleksno-periodične pojave (ili samo periodičke pojave)*

Ovdje ćemo bez izvoda ustvrditi (a na ispitu ću pozitivno valorizirati dokaz, pronađite u knjigama i na webu!):

Svaka *periodična funkcija*  $x(t)$  s osnovnim periodom  $T_p$  može se razviti u Fourierov red:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + \dots + a_n \cos n\omega_1 t + \\ + b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \sin 2\omega_1 t + \dots + b_n \sin n\omega_1 t + \dots$$

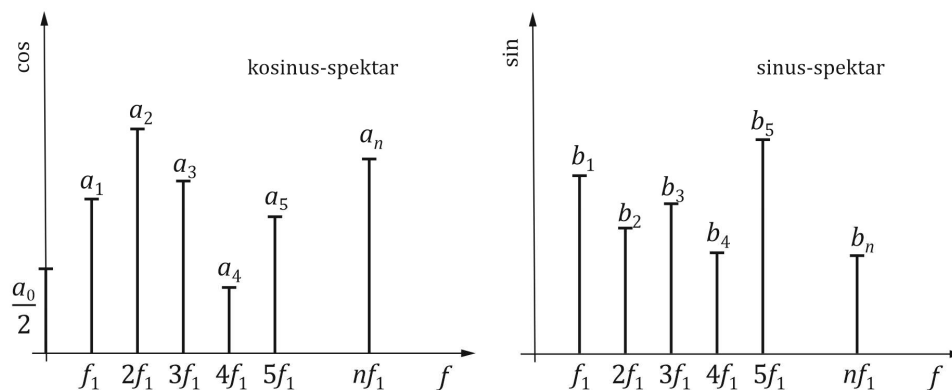
Ovdje je  $\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T_p}$  osnovna kružna frekvencija,  $f_1 = 1/T_p$  je osnovna frekvencija, a  $a_n$  i  $b_n$  su *Fourierovi koeficijenti*:

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \cos 2\pi n f_1 t \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \sin 2\pi n f_1 t \, dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Integrira se po jednom osnovnom periodu pa granice mogu biti i npr.  $\pm \frac{T_p}{2}$ .

Prema tome, spektralna slika takvih podataka ima beskonačno mnogo komponenta od kojih je svaka pridružena frekvenciji koja je *cjelobrojni višekratnik* osnovne frekvencije  $f_1$ , tj.  $f = n f_1$ .





Koeficijent  $a_n$  za  $n = 0$  ( $f = 0$  Hz) je  $a_0 = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) dt$ . Dakle on je definiran srednjom vrijednošću od  $x(t)$ .

Po analogiji sa sinusoidalnim podacima, i ovdje možemo spektralnu sliku predočiti u obliku spektra amplitude i spektra faze, jer prethodni izraz za razvoj u Fourierov red možemo kompaktno napisati kao

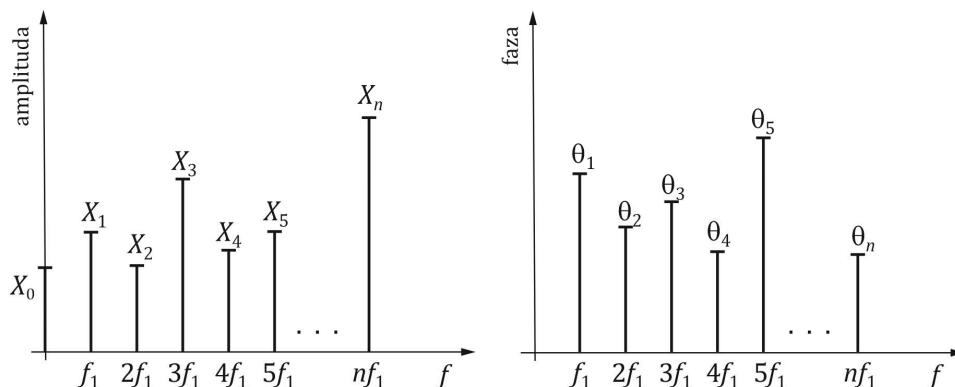
$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_1 t - \theta_n).$$

Ovdje je:

$$X_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$\left. \begin{array}{l} X_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)} \\ \operatorname{tg} \theta_n = \frac{b_n}{a_n} \end{array} \right\} n = 1, 2, 3, \dots \quad \begin{array}{l} a_n = X_n \cos \theta_n \\ b_n = X_n \sin \theta_n \end{array}.$$

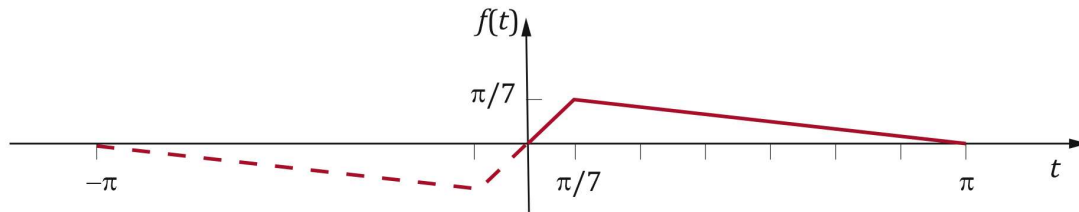
Članovi  $X_n \cos(2\pi n f_1 t - \theta_n)$  nazivaju se harmonici ili harmonijske komponente, a analiza razvojem periodičke funkcije u Fourierov red zove se harmonijska analiza.



Kao i kod sinusoidalnih periodičkih podataka i ovi su spektri diskretni, linijski. Ovo je karakteristika spektara svih u vremenu periodičnih funkcija. Kasnije ćemo vidjeti da vrijedi i obrat – diskretni podaci u vremenu imat će periodične spektre. Dakle periodičnost u jednoj domeni implicira diskretnost u drugoj.

Zadatak

Razvij u Fourierov red funkciju zadanu grafom (puna crvena linija), uz pretpostavku da se radi o periodičnoj, neparnoj funkciji!



Kako je funkcija neparna [ $f(-t) = -f(t)$ ], jasno je da dio koji odgovara negativnom vremenu mora biti kao što je naznačeno crtkanom linijom. Također s grafa vidimo da je period funkcije jednak  $2\pi$ , te se ona ponavlja na lijevo i na desno. Funkciju možemo algebarski izraziti kao:

$$f(t) = t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{7}$$

$$f(t) = -\frac{1}{6}t + \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{7} \leq t \leq \pi$$

Najprije pokažimo da za *neparne funkcije* vrijedi:

$$b_n = \frac{4}{T_p} \int_0^{+\frac{T_p}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt$$

Dokaz:

$$\int_{-\frac{T_p}{2}}^0 f(t) \sin n\omega_1 t dt = \{t \rightarrow -t\} = \int_{+\frac{T_p}{2}}^0 f(-t) \sin n\omega_1(-t) (-dt)$$

$$= \int_{+\frac{T_p}{2}}^0 f(-t) \sin n\omega_1(t) dt = - \int_{\frac{T_p}{2}}^0 f(t) \sin n\omega_1(t) dt = \int_0^{+\frac{T_p}{2}} f(t) \sin n\omega_1(t) dt .$$

Dakle:

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{+\frac{T_p}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^0 f(t) \sin n\omega_1 t dt + \frac{2}{T_p} \int_0^{+\frac{T_p}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_p} \int_0^{+\frac{T_p}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt.$$

Lako je također dokazati da za neparne funkcije vrijedi i  $a_n = 0, \forall n$ .

Dakle, parne funkcije sastoje se samo od parnih harmonika (dokažite!), a neparne od neparnih harmonika.

U našem zadatku imamo da je  $T_p = 2\pi$ , pa je  $f_1 = \frac{1}{2\pi}$ :

$$b_n = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin 2\pi n f_1 t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Da bismo riješili zadatak valja dakle izračunati samo  $b_n$  prema gornjoj formuli, jer su svi  $a_n = 0$ . Integral ćemo izračunati za svaki od dva dijela funkcije  $f(t)$ :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{7}} t \sin nt dt + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{7}}^{\pi} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{6}t\right) \sin nt dt = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{7}} t \sin nt dt = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin nt}{n^2} - \frac{t \cos nt}{n} \right]_0^{\frac{\pi}{7}} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin n \frac{\pi}{7}}{n^2} - \frac{\frac{\pi}{7} \cos n \frac{\pi}{7}}{n} \right)$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{7}}^{\pi} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{6}t\right) \sin nt dt = -\frac{1}{3\pi} \int_{\frac{\pi}{7}}^{\pi} t \sin nt dt + \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{7}}^{\pi} \sin nt dt =$$

$$I_2 = \dots$$

$$= -\frac{1}{3\pi} \left( \frac{\sin n\pi}{n^2} - \frac{\pi \cos n\pi}{n} - \frac{\sin \frac{n\pi}{7}}{n^2} + \frac{\pi \cos \frac{n\pi}{7}}{n} \right) + \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{7} \right)$$

$$I_1 + I_2 = \dots = b_n = \frac{7}{3n^2\pi} \sin \frac{n\pi}{7}$$

(Provedite sami račun tamo gdje je  $= \dots = !$ )

Uočimo da amplituda koeficijenata  $b_n$  opada s kvadratom broja  $n$ , a  $b_n = 0$  za  $n = 7N$ ,  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$  Dakle i  $b_7 = 0$ .



Naš zadatak zapravo opisuje spektar zvuka koji proizvodi žica (npr. na gitari) kada ju se trzne na  $1/7$  njezine duljine. Glazbenici kažu da suzvuk osnovnog harmonika ( $n = 0$ ) i sedmog harmonika ( $n = 7$ ) zvuči disonantno, neugodno. Kako trzanje na  $1/7$  duljine žice ne proizvodi sedmi harmonik ( $b_7 = 0$ ), harmonička analiza kaže da se tako

dobije najugodniji zvuk. S druge strane, amplituda 7. harmonika je 49 puta manja od amplitude osnovnog harmonika, pa treba zbilja dobro uho da ga se čuje! Ako imate gitaru (i izvrstan sluh!), pokušajte trzati žicu na raznim mjestima i procijenite na kojem mjestu će zvuk biti najčišći. Izaberite jednu od debljih žica da bi sedmi harmonik (7 puta veća frekvencija od osnovne frekvencije te žice!) uopće bio u Vašem slušnom području!

### *Kompleksni oblik Fourierovog reda*

U spektralnoj analizi uobičajeno je korištenje kompleksnih brojeva kako bi se formule napisale u kompaktnoj formi te se tako skratili dugački izrazi. To je donekle kontrainuitivno jer se realni problemi opisuju kompleksnim brojevima, pa imaginarni dio moramo na neki način 'izmisliti', a formalno

ćemo uvesti i negativne frekvencije... To će se na kraju kompenzirati time da će se gledati samo realni dio rješenja. I Fourierov red možemo zapisati u kompleksnom obliku. Krenimo od definicije:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t] \quad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{+\frac{T_p}{2}} y(t) \cos n\omega_1 t \, dt \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{+\frac{T_p}{2}} y(t) \sin n\omega_1 t \, dt \quad (3)$$

Kako je  $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$  i  $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{i}{2}(e^{-ix} - e^{ix})$ , to (1) postaje:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{in\omega_1 t} + e^{-in\omega_1 t}) + \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{-in\omega_1 t} - e^{in\omega_1 t}) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{in\omega_1 t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-in\omega_1 t} \end{aligned} \quad (4)$$

Kako bismo ovo pojednostavili, uvedimo *negativne* indekse,  $n < 0$ , u (2) i (3). Lako je vidjeti da vrijedi:

$$a_{-n} = a_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{i} \quad b_{-n} = -b_n \quad n = 1, 2, \dots$$

Provedimo zamjenu  $n \rightarrow -n$  kod posljednjeg člana u (4), pa dobijemo:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{in\omega_1 t} + \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} (a_n - ib_n) e^{in\omega_1 t} \\ y(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{in\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega_1 t} \end{aligned}$$

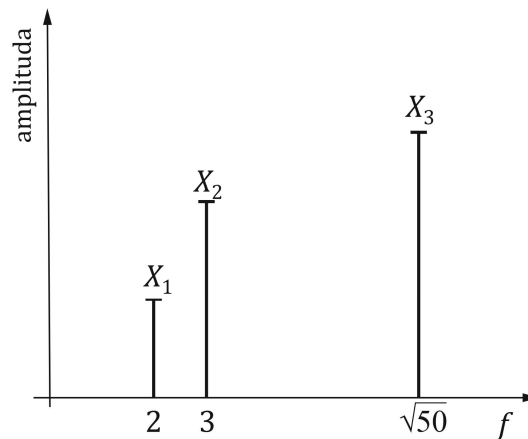
$\alpha_n$  su kompleksni Fourierovi koeficijenti,  $\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

*Gotovo-periodične pojave*

Vidjeli smo da se periodični podaci mogu izraziti nizom sinusoidalnih valova čije su frekvencije cjelobrojni višekratnici osnovne frekvencije. Ponekad se podaci mogu izraziti sumom (ko)sinusoida, ali oni ipak neće biti periodični. Npr:

$$x(t) = X_1 \cos(2\pi 2t + 1.3) + X_2 \cos(2\pi 3t - 0.5) + X_3 \cos(2\pi\sqrt{50}t + 3.0).$$

Pripadni spektar amplituda izgleda ovako:



Podaci u ovom slučaju nisu periodični, jer ne postoji frekvencija konačne vrijednosti koja bi pomnožena adekvatnim cijelim brojevima dala frekvencije 2, 3,  $\sqrt{50}$ . Vremensku sliku takvih podataka nazivamo 'gotovo-periodičkom'. Prema tome, ta klasa neperiodičkih podataka može se prikazati sumom koja podsjeća na Fourierov red

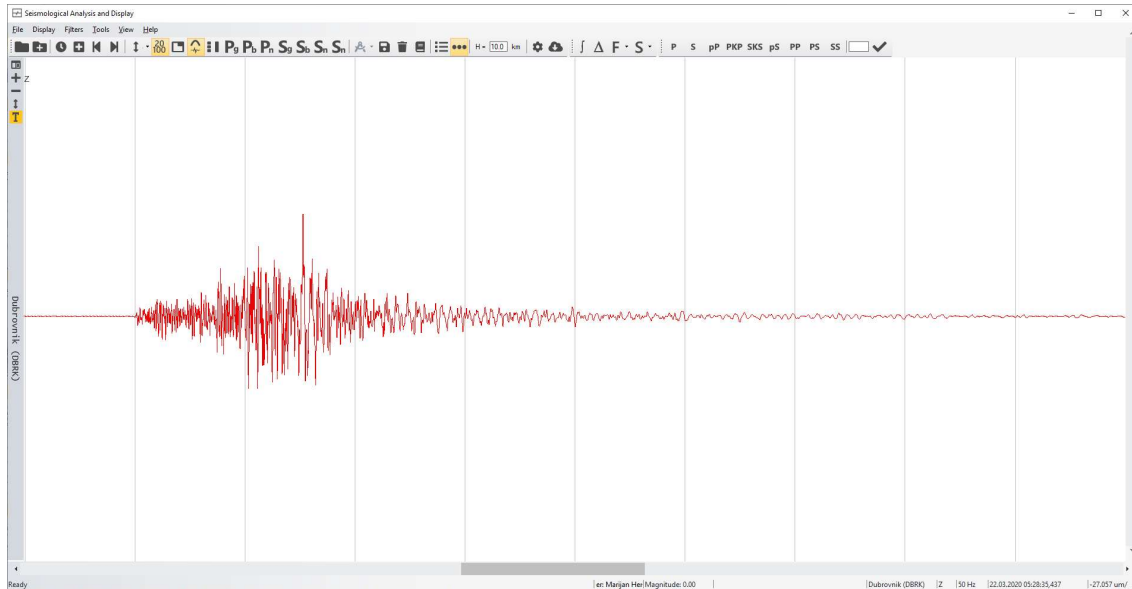
$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^N X_n \cos(2\pi f_n t - \theta_n),$$

gdje  $\frac{f_n}{f_m}$  nije racionalno za sve slučajeve.

*Tranzijentne (neperiodične) pojave*

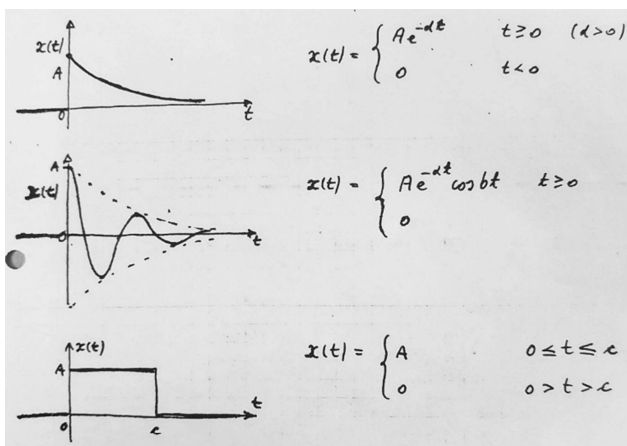
Tranzijentni su podaci oni koji imaju definiran početak i kraj. Često je početak jasan, a kraj nije, ali se može naći takvo vrijeme da se smije reći kako je pojava utrnula, te je nakon toga vremena više nema. To su, dakle, signali

ograničenoga trajanja, pa analiza razvojem u Fourierov red nije moguća. Kako ne postoji konačan osnovni period, formalno možemo uzeti da u ovom slučaju  $T_p \rightarrow \infty$ . Tipičan primjer iz geofizike je seizmogram potresa koji ima jasan početak te trne u vremenu. Npr., ovo je vertikalna komponenta seizmograma potresa koji je 22.03.2020. pogodio Zagreb ( $M = 5.5$ ), zapisana na seizmološkoj postaji Dubrovnik:



Vidi se jasan početak, te postupno trnjenje energije kako vrijeme protječe (minute su označene sivim vertikalnim linijama).

Evo još tri primjera takvih signala:



Fizikalne pojave predočene takvim podacima su brojne. Na primjer, druga slika prikazuje slobodno gibanje seizmografa uz mirenje.

Važno svojstvo takvih podataka, nasuprot periodičkih i „gotovo-periodičkih“ jest činjenica da u njih diskretan spektar nije moguć. U većini, pak slučajeva spektralna slika može se dobiti Fourierovim integralom:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi f t} dt.$$

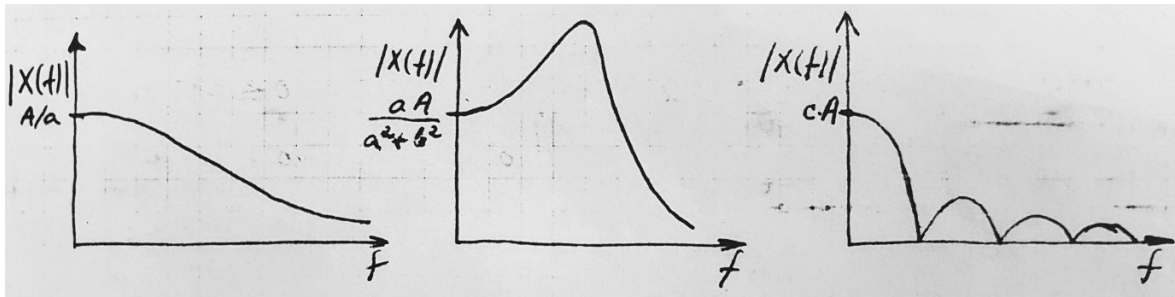
Spektar  $X(f)$  tako defniran općenito je kompleksan broj koji se, kao i svaki drugi kompleksan broj, može izraziti s:

$$X(f) = |X(f)|e^{-i\theta(f)}, \text{ gdje je}$$

$|X(f)|$  – apsolutna vrijednost (magnituda) od  $x(t)$

$\theta(f)$  – argument.

Fourierov spektar magnitude (amplitude)  $|X(f)|$  za tri prikazana primjera izgleda ovako:



Izvedimo, dakle, Fourierov integral!

### *Fourierov integral*

Do sada je interval u kojem smo trebali predočiti podatke  $x(t)$  Fourierovim redom bio konačne duljine, npr.  $T_p$ . Razumljivo je stoga, ukoliko odaberemo taj interval i izračunamo Fourierov red, tada će on prikazivati naše podatke unutar toga intervala, dok će se *izvan* intervala slika periodički ponavljati u beskonačnost, bez obzira kakvi su podaci  $x(t)$  izvan izvornog intervala duljine  $T_p$ . Izrazi

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \cos 2\pi n f_1 t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \sin 2\pi n f_1 t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

ukazuju da članovi  $a_n$  i  $b_n$  reda imaju u nazivniku  $T_p$ , te ukoliko bismo htjeli te izraze primijeniti i na funkcije čiji se interval zadanosti proteže u



beskonačnost (neperiodičke funkcije), bilo bi potrebno tražiti graničnu vrijednost nepravog integrala duljine intervala integracije (tj.  $T_p$ ), kada taj interval teži u beskonačnost.



Fourier je to riješio općenito i našao jedan od načina prikaza i onih vrijednosti  $x(t)$  koje su zadane za svaku realnu vrijednost od  $t$ , dakle za  $-\infty < t < +\infty$ .

Pretpostavimo da je  $x(t)$  zadano u intervalu  $[-d, +d]$ , gdje je  $T_p = 2d = \frac{1}{f_1}$ , pa se podatak  $x(t_0)$  u trenutku  $t = t_0$  unutar  $[-d, +d]$  može izraziti razvojem u Fourierov red:

$$x(t_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos 2\pi n f_1 t_0 + b_n \sin 2\pi n f_1 t_0]$$

Uvrstimo  $a_n$  i  $b_n$ :

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \frac{1}{2} \frac{2}{2d} \int_{-d}^{+d} x(t) dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{2}{2d} \int_{-d}^{+d} x(t) \cos 2\pi n f_1 t dt \right) \cos 2\pi n f_1 t_0 \right. \\ &\left. + \left( \frac{2}{2d} \int_{-d}^{+d} x(t) \sin 2\pi n f_1 t dt \right) \sin 2\pi n f_1 t_0 \right\} \end{aligned}$$

(Izrazi u okruglim zagradama su  $a_n$  i  $b_n$ .)

$$x(t_0) = \frac{1}{2d} \int_{-d}^{+d} x(t) dt + \frac{1}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-d}^{+d} x(t) \cos 2\pi n f_1 (t - t_0) dt.$$

a) Uzmimo sada da duljina intervala  $2d$  raste i teži beskonačnosti. Tada veličina  $f_1 = 1/2d$  opada i može se učiniti po volji malenom, ako je  $d$  dovoljno velik.

b) Neka postoji konačan, određen limes  $\lim_{d \rightarrow \infty} \int_{-d}^{+d} |x(t)| dt$ , tj. neka integral konvergira apsolutno (nepravi integral).

c) Kako prvi integral na desnoj strani konvergira apsolutno za  $d \rightarrow \infty$  (ima konačnu vrijednost kada  $d$  teži u beskonačnost) prvi član na desnoj strani teži nuli.

d) Tada zbroj preostalih članova na desnoj strani možemo pisati u novom obliku ( $1/d = 2f_1$ ):

$$x(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2f_1 \int_{-d}^{+d} x(t) \cos 2\pi n f_1 (t - t_0) dt.$$

Budući da je  $n f_1 = f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$  frekvencija koja odgovara pojedinom broju  $n$  (harmoniku), to ćemo je općenito označiti s  $f$ , tj.

$$n f_1 = f.$$

Pustit ćemo nadalje da granice integracije rastu preko po volji velikog broja. Tada vrijednost osnovne frekvencije  $f_1 = 1/2d$  pada ispod po volji male veličine.

Kako  $f_1$  ujedno znači i razliku frekvencija  $(n+1)$ -og i  $n$ -tog člana, tj.  $(n+1)f_1 - n f_1 = f_1$ , to ćemo tu malu veličinu označiti s  $\Delta f$ .

Rekli smo ranije da  $\int_{-d}^{+d} x(t) dt$  konvergira apsolutno, pa će i  $\int_{-d}^{+d} x(t) \cos 2\pi f (t_0 - t) dt$  konvergirati, te izraz za  $x(t_0)$  pri graničnom prijelazu ( $d \rightarrow \infty$ ,  $\Delta f \rightarrow df$ ) postaje:

$$x(t_0) = 2 \int_0^{\infty} df \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos 2\pi f (t - t_0) dt.$$

Izraz za  $x(t_0)$  možemo pisati i u obliku:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= 2 \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos 2\pi f t_0 \cos 2\pi f t dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin 2\pi f t_0 \sin 2\pi f t dt \right) df = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \left( \cos 2\pi f t_0 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos 2\pi f t dt}_{a(f)/2} + \sin 2\pi f t_0 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin 2\pi f t dt}_{b(f)/2} \right) df \end{aligned}$$

Dakle, vrijednost podataka u trenutku  $t_0$  može se izraziti **Fourierovim integralom**:

$$x(t_0) = \int_0^{\infty} [a(f) \cos 2\pi f t_0 + b(f) \sin 2\pi f t_0] df,$$

gdje su  $a(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos 2\pi f t dt$  i  $b(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin 2\pi f t dt$ .

$a(f)$  i  $b(f)$  zovu se kosinusova, odnosno sinusova Fourierova transformacija.

Kao i kod Fourierovog reda, i ovdje definiramo spektar amplitude i spektar faze:

$$X(f) = \sqrt{a^2(f) + b^2(f)} \quad \text{tg } \theta(f) = \frac{b(f)}{a(f)}.$$

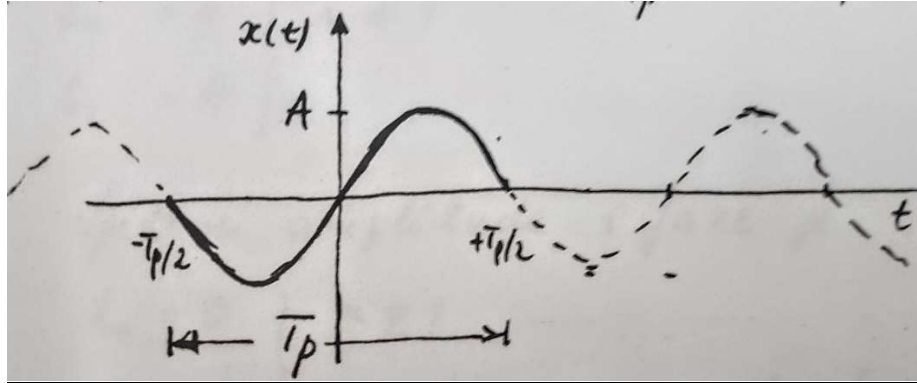
Fourierov integral podsjeća na Fourierov red. Međutim, sada su koeficijenti  $a(f)$  i  $b(f)$ , odnosno amplitudni i fazni spektri  $X(f)$  i  $\theta(f)$  kontinuirane funkcije frekvencije, a zbroj harmonika u Fourierovom redu zamijenjen je integralom protegnutim od 0 do  $+\infty$ . Ovdje se na radi o izražavanju zadanih podataka zbrojem diskretnih harmonijskih oscilacija, nego kontinuiranim prijelazom neprekinutih harmonijskih funkcija kojima frekvencije  $f$  poprimaju realne vrijednosti od 0 do  $+\infty$ . Analiza podataka pomoću računanja Fourierovih integrala zove se *spektralna analiza* (za razliku od harmonijske analize koju smo prije upoznali).

Jasno je da Fourierov integral ne može biti striktno upotrijebljen, jer zahtijeva integriranje po cijeloj vremenskoj osi (0 do  $+\infty$ !), što, pogotovo kod eksperimentalno mjerenih podataka, ne može biti zadovoljeno. Toga valja biti svjestan, pogotovo ako želimo na osnovi mjerenih podataka ekstrapolirati pojavu u budućnost. Kod Fourierovog reda i periodičkih podataka, te ako su mjerenja zahvatila barem jedan potpuni osnovni period, tako nešto može imati smisla. Kod računa Fourierovog integrala, međutim, on u realnim primjenama može biti izračunat samo uz konačnu donju (početak) i gornju granicu (kraj našega mjerenja), što implicira da pojave koju promatramo *nema* niti prije niti poslije mjerenja, pa će svaka ekstrapolacija izvan intervala mjerenja rezultirati nulom. Dakle, rezultati harmoničke i spektralne analize podudarati će se unutar intervala mjerenja, ali će se razlikovati izvan njega – kod harmoničke analize signal će se periodički ponavljati na jednu i na drugu stranu, dok će Fourierov integral po definiciji tamo biti jednak nuli.

Drugim riječima, Fourierov red primjenjuje se samo na (periodičke) funkcije beskonačne energije (*infinite energy*), dok se Fourierova transformacija odnosi samo na pojave čija je energija konačna (sjetimo se:  $\lim_{d \rightarrow \infty} \int_{-d}^{+d} |x(t)| dt \neq \infty$ , pa će u praktički svim nama interesantnim slučajevima biti i  $\lim_{d \rightarrow \infty} \int_{-d}^{+d} x^2 dt \neq \infty$ !).

Zbog toga valja primjenjivati onu vrst analize koja je primjerena za podatke kojima raspolažemo, a spektre izračunate harmonijskom i spektralnom analizom ne možemo *apriori* uspoređivati.

**Zadatak 2:** Izračunajte spektar funkcije  $x(t) = A \sin \frac{2\pi}{T_p} t$  koja je zadana u intervalu  $[-\frac{T_p}{2}, +\frac{T_p}{2}]$  prvo harmoničkom pa zatim i spektralnom analizom!



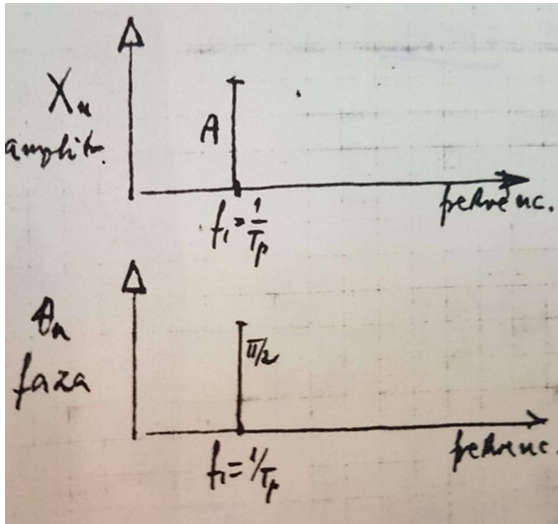
Kako je to obični sinus, a harmonička analiza pretpostavlja periodičnost, funkcija koju ćemo razviti u red je prikazana crtkanom linijom na slici gore. To je neparna funkcija, pa – kao što smo dokazali – svi koeficijenti  $a_n = 0$ . Postoji samo jedna neparna harmonička komponenta, ona s frekvencijom  $f = 1/T_p$ . Zato je

$$b_n = 0, \forall n \neq 1; \quad b_1 = A.$$

Spektri amplitude i faze su:

$$X_1 = \sqrt{b_1^2} = b, \quad \theta = \operatorname{atan} \frac{b}{a} = \frac{\pi}{2}$$

Spektri imaju samo jednu liniju:



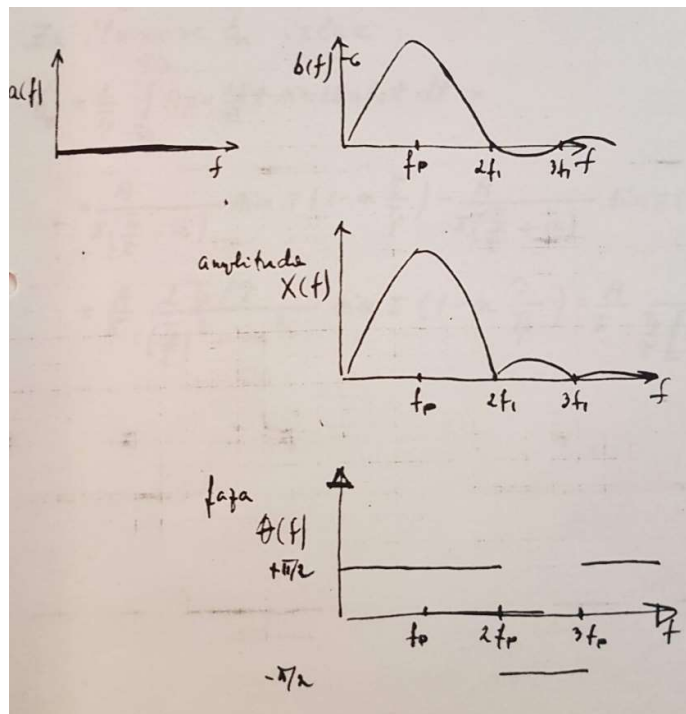
Ako želimo koristiti Fourierov integral, kosinusova transformacija  $a(f) = 0$  (baš kao i kod Fourierovih koeficijenata pri harmonijskoj analizi – dokažite!), a granice integracije pri računu koeficijenta  $b(f)$  moramo postaviti na interval zadatosti funkcije,  $\pm T_p/2$ , umjesto na  $\pm\infty$ :

$$b(f) = 2A \int_{-T_p/2}^{+T_p/2} \sin \frac{2\pi}{T_p} t dt$$

... (provedite potreban račun!) ...

$$b(f) = \frac{2A \sin \pi \left(1 - \frac{f}{f_p}\right)}{\pi f_p^2 \left(1 - \frac{f^2}{f_p^2}\right)},$$

pa spektri izgledaju ovako:



Prilična razlika o odnosu na harmoničku analizu!

### Kompleksan oblik Fourierovog integrala, Fourierova transformacija

Fourierov integral funkcije  $x(t_0)$  prikazivali smo u obliku:

$$x(t_0) = \int_0^{\infty} [a(f) \cos 2\pi f t_0 + b(f) \sin 2\pi f t_0] df, \text{ ili}$$

$$x(t_0) = \int_0^{\infty} X(f) \cos[2\pi f t_0 - \theta(f)] df,$$

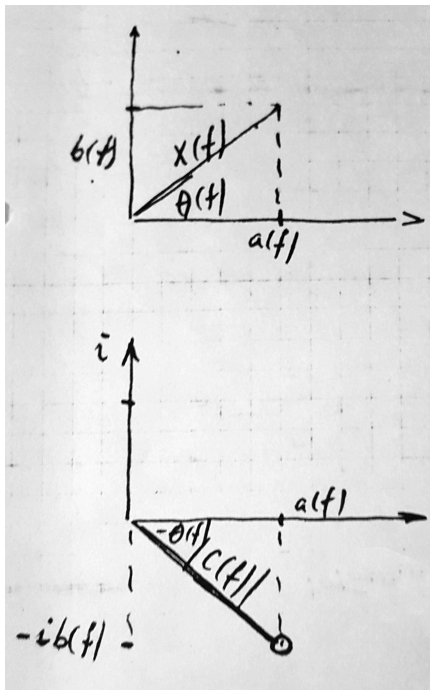
gdje su:

$$a(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos 2\pi f t dt \quad \text{i} \quad b(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin 2\pi f t dt,$$

$$a(f) = X(f) \cos \theta, \quad b(f) = X(f) \sin \theta \quad (*)$$

$$X(f) = \sqrt{a^2(f) + b^2(f)}, \quad \text{tg } \theta(f) = \frac{b(f)}{a(f)}.$$

Odnos  $a(f)$ ,  $b(f)$ ,  $X(f)$  i  $\theta(f)$  može se predočiti grafički kao na slici:



Za matematičko izvođenje često je, međutim, zgodno uvesti kompleksan oblik spektra, odnosno Fourierovog integrala.

Kompleksan spektar  $C(f)$  definira se kosinus i sinus spektrom tako da je

$$C(f) = \frac{1}{2} [a(f) - i b(f)] \quad (**)$$

kompleksan broj, tj. spektar prikazujemo točkom kompleksne ravnine. Vidimo da je apsolutna vrijednost, tj. modul kompleksnog spektra jednak spektru amplitude  $X(f)$ , a argument mu je jednak negativnoj vrijednosti spektra faze.

Prema tome, uvođenje kompleksnog spektra ne uvodi ništa bitno novo u razmatranje. U praksi se primjenjuje onaj oblik spektra koji je jednostavniji za izvođenje.

Uvrstimo (\*) u (\*\*), i dobijemo:

$$2C(f) = X(f)[\cos \theta(f) - i \sin \theta(f)] = X(f)e^{-i\theta(f)}$$

Uvrstimo li izraze  $a(f)$  i  $b(f)$  u  $C(f)$  (\*\*\*) izlazi:

$$2C(f) = a(f) - ib(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos 2\pi ft - 2i \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin 2\pi ft$$

$$C(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) [\cos 2\pi ft - i \sin 2\pi ft] dt$$

$$C(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Ovo je Fourierova transformacija, što je osnovna formula za određivanje spektra u kompleksnom obliku.

Fourierov integral

$$x(t_0) = \int_0^{\infty} [a(f) \cos 2\pi ft_0 + b(f) \sin 2\pi ft_0] df$$

prilagodit ćemo kompleksnom obliku prikaza spektra amplitude i faze tako da kosinuse i sinuse izrazimo Moivreovim formulama:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \int_0^{\infty} \left\{ a(f) \frac{1}{2} (e^{i2\pi ft_0} + e^{-i2\pi ft_0}) + b(f) \frac{-i}{2} (e^{i2\pi ft_0} - e^{-i2\pi ft_0}) \right\} df = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{ e^{i2\pi ft_0} [a(f) - ib(f)] + e^{-i2\pi ft_0} [a(f) + ib(f)] \} df = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} 2C(f) e^{i2\pi ft_0} df + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [a(f) + ib(f)] e^{-i2\pi ft_0} df \\ &= \left\{ \text{DRUGI INTEGRAL: } \begin{array}{l} f \rightarrow -f \\ df \rightarrow -df \\ \text{granice} \rightarrow -\text{granice} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} 2C(f) e^{i2\pi ft_0} df + \frac{1}{2} \int_0^{-\infty} [a(-f) + ib(-f)] e^{i2\pi ft_0} (-df) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} 2C(f) e^{i2\pi ft_0} df + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \underbrace{[a(f) - ib(f)]}_{2c(f)} e^{i2\pi ft_0} df = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} 2C(f) e^{i2\pi ft_0} df + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 2C(f) e^{i2\pi ft_0} df \end{aligned}$$

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f) e^{i2\pi f t_0} df,$$

pri čemu za negativne frekvencije treba uzeti konjugirano kompleksnu veličinu od  $C(f)$ , tj.  $C^*(f)$ , jer je

$$C(-f) = \frac{1}{2} [a(-f) - ib(-f)] = \frac{1}{2} [a(f) + ib(f)] = C^*(f).$$

[ $a$  je parna,  $b$  je neparna funkcija]

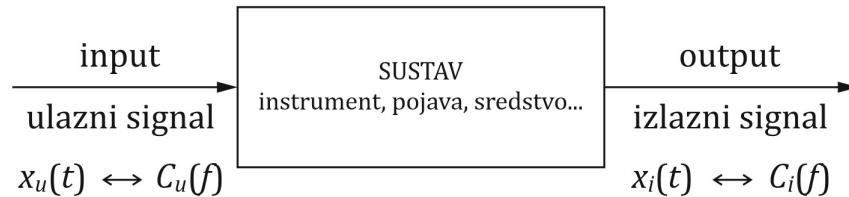
Ovo je inverzna Fourierova transformacija, koju možemo izraziti i koristeći kružnu frekvenciju,  $\omega$ , umjesto  $f$  (primijetimo da je  $df = d\omega/2\pi$ ):

$$x(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega.$$



## O karakteristikama fizikalnih sustava u odnosu na frekvenciju

Osvrnut ćemo se na neke karakteristike fizikalnih sustava u ovisnosti o frekvenciji. To, primjerice, može biti mjerni instrument (seizmograf, mareograf...), ili sredstvo kroz koje se valovi rasprostiru (npr. cijela Zemlja, površinski slojevi tla, morska voda, zrak, ...) – sve što može promijeniti spektralni sastav pojave koju promatramo.



Sustav ćemo predočiti 'crnom kutijom' – ne zanima nas što je u njoj niti kako npr. instrument radi, ali nas zanima kako se prolaskom kroz taj sustav promijenio ulazni signal  $x_u(t)$  čiji spektar označimo s  $C_u(f)$ . Na slici dvostruke strelice označavaju Fourierov par, tj. proces (inverzne) Fourierove transformacije. Dakle  $C_i(f)$  je spektar izlaznog signala  $x_i(t)$ .

Razmotrit ćemo samo *idealne sustave*. Idealni je sustav onaj koji:

- ima konstantne parametre
- linearan je u odnosu izlaz/ulaz.

Sustav ima *konstantne parametre* ako mu se *bitna svojstva ne mijenjaju s vremenom*. Do promjene svojstava može doći npr. starenjem elektronskih komponenata, promjenama elastičkih svojstava opruge, popravcima, i sl.

*Linearan sustav* ima frekventnu karakteristiku koja je *aditivna i homogena*.

*Aditivnost znači*: izlaz zbroja dvaju različitih pojava jednak je zbroju izlaza svake od njih (svejedno je zbraja li se prije ili poslije sustava).

*Homogenost znači*: izlaz  $n$ -strukog ulaza jednak je  $n \times 1$  izlaz (svejedno je množi li se prije ili poslije sustava).

Linearnost je obično razumna pretpostavka, ali ipak instrumenti ponekad nisu linearni – njihov utjecaj na signal tada ovisi o amplitudi ulaznog signala. Primjer

je mehanički seizmograf kod kojega trenje igra veću ulogu kod male nego kod velike pobude.

Sustav koji promatramo, npr. seizmograf, će – ovisno o tipu seizmografa – više ili manje modificirati ulazni signal (trešnju tla), pa njegov izlaz (seizmogram) neće vjerno predstavljati ulaznu pojavu. Tako ćemo definirati *dinamičku karakteristiku sustava* kao omjer spektara izlaznog i ulaznog signala:

$$Z(f) = \frac{C_i(f)}{C_u(f)}.$$

Kod idealnih sustava  $Z$  ovisi jedino o frekvenciji i parametrima sustava, a ne ovisi niti o ulaznoj pojavi niti o vremenu. Dinamička karakteristika sustava općenito je kompleksan broj, te se može napisati kao

$$Z(f) = |Z(f)|e^{-\delta(f)}.$$

Apsolutnu vrijednost  $|Z(f)|$  nazivamo dinamičko povećanje, a  $\delta(f)$  faza [eng. *gain factor; phase factor*]. Poznavajući dinamičku karakteristiku sustava možemo na osnovi poznatog izlaza odrediti ulaz i obrnuto.

Kako se određuje karakteristika nekog instrumenta?

1. Većina modernih instrumenata kalibrirana je u tvornici, te se njihova karakteristika tijekom uporabnog vijeka vrlo malo (zanemarivo) mijenja. U tom slučaju njihova je karakteristika navedena u dokumentaciji instrumenta, te ju je potrebno (vrlo rijetko) provjeravati kalibracijom.
2. Mjerenjem pojave na ulazu i izlazu. Ovo je ponekad lako izvedivo, a ponekad jako teško.
3. Teorijski, na temelju poznatih parametara sustava.

Neka je npr. sustav seizmograf s mehaničkom registracijom. U seizmometriji ćete naučiti da je njegova dinamička karakteristika zadana parametrima:

$$|Z(f)| = \frac{\bar{v}}{\sqrt{\left[\left(\frac{f_0}{f}\right)^2 - 1\right]^2 + 4h^2 \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}}$$

$$\delta(f) = \frac{\epsilon f}{\pi(f_o^2 - f^2)}.$$

Parametri sustava su:

$\bar{V}$  – *statičko povećanje*

$h$  – *konstanta mirenja*

$f_o$  – *vlastita frekvencija seizmografa*

$\epsilon$  – *faktor mirenja.*

Dakle, želimo li iz zapisa seizmografa s poznatom karakteristikom  $Z(f)$  rekonstruirati pravo gibanje tla valja:

1. Izračunati spektar seizmograma:

$$C_i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(f) e^{-i2\pi ft} dt;$$

2. Izračunati spektar ulaza (gibanje tla):

$$C_u(f) = \frac{C_i(f)}{Z(f)};$$

3. Izračunati  $x_u(t)$  kao Fourierov par od  $C_u(f)$ :

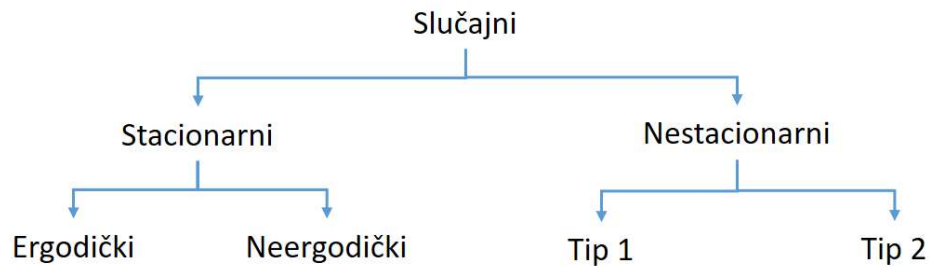
$$x_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_u(f) e^{i2\pi ft} df.$$

Ovdje valja biti oprezan u dijelu frekvencija koje instrument vrlo slabo bilježi, jer će tamo karakteristika  $Z(f)$  biti jako mala, pa će nazivnik u 2. koraku biti jako velik. Zato valja primjenu 2. koraka ograničiti samo na onaj frekventni pojas u kojemu je unutrašnji šum instrumenta znatno manji od razine ulaznog signala (tada je instrument linearan).

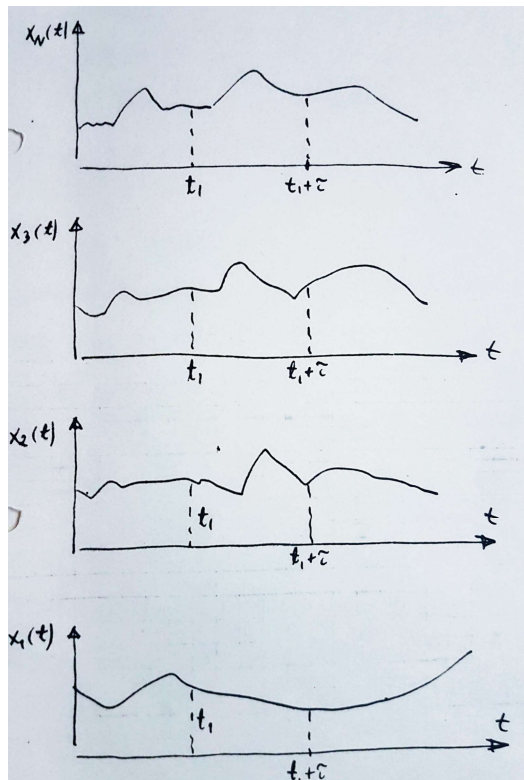
## Slučajni podaci

Već je rečeno da se podaci koji su slučajne vrijednosti ne mogu opisati eksplicitnim matematičkim izrazom, jer svako opažanje predstavlja jedinstven događaj između više mogućih. Isječak iz vremenske slike slučajnih podataka je *uzorak*.

Slučajne se pojave mogu svrstati u *stacionarne* i *nestacionarne*, koje se dalje dijele kako je prikazano slikom.



Ako se određene vrijednosti pridružene nekoj pojavi mogu smatrati slučajnima, tada se pojava može opisati npr. srednjacima uzoraka.



Neka je na slikama predočeno nekoliko ( $N$ ) uzoraka (to se naziva *ensemble*).

Srednjak slučajnih vrijednosti u nekom trenutku  $t_1$  možemo odrediti kao srednjak trenutnih vrijednosti svih uzoraka koji su nam na raspolaganju.

Slično vrijedi i za korelaciju slučajnih vrijednosti u dva različita trenutka (autokorelacija). Možemo pisati:

$$\mu_x(t_1) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1)$$

$$R_x(t_1, t_1 + \tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1)x_k(t_1 + \tau),$$

gdje smo pretpostavili da su težine uzoraka jednake.

Općenito  $\mu(t_1)$  i  $R(t_1, t_1 + \tau)$  ovisit će o trenutku  $t_1$  i razlici trenutaka  $\tau$ . Za takvu pojavu kažemo da je *nestacionarna*.

U posebnom slučaju kad  $\mu(t_1)$  i  $R(t_1, t_1 + \tau)$  ne ovise o trenutku  $t_1$ , već samo o  $\tau$ , za pojavu kažemo da je *slabo stacionarna* ili *stacionarna u širem smislu*. Prema tome, tada je srednjak konstantan, a funkcija autokorelacije ovisi samo o vremenskoj razlici  $\tau$ , te je  $\mu_x(t_1) = \mu_x$ ,  $R_x(t_1, \tau) = R_x(\tau)$ .

U slučaju da su svi momenti i pridruženi momenti neovisni o vremenu  $t_1$ , za pojavu kažemo da je *strogo stacionarna*.

### *Ergodička slučajna pojava*

Ranije smo rekli da se određena svojstva slučajne pojave mogu odrediti kao srednjak vrijednosti uzoraka u određenom trenutku  $t_1$ . Međutim, često je moguće opisati svojstva stacionarne slučajne pojave jednostavnim određivanjem srednjaka jednog od uzoraka. Zamislimo npr.  $k$ -ti uzorak. Tada su srednjak i autokorelacija:

$$\mu_x(t_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt,$$

$$R_x(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t)x_k(t + \tau) dt.$$

Ukoliko je slučajna pojava stacionarna, a  $\mu_k(x)$  i  $R_x(\tau, k)$  ne variraju kada ih računamo za različite uzorke i jednaki su  $\mu_x$  i  $R_x(t)$  za stacionarnu slučajnu pojavu kažemo da je *ergodička*.

Ergodički slučajni procesi su važna klasa slučajnih pojava jer sva njihova bitna obilježja možemo dobiti na osnovi jednog, odnosno, radi kontrole, nekoliko uzoraka.

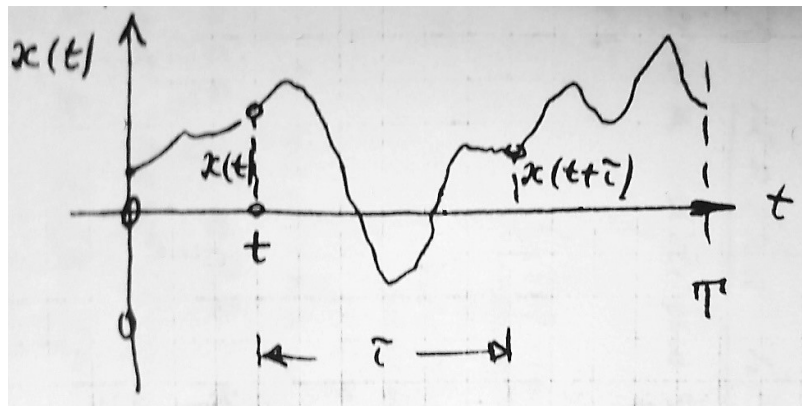
U praksi se nešto odstupa od stroge definicije stacionarnosti. Da bismo uzorak tretirali kao uzorak stacionarnih podataka, parametri (srednjak i autokorelacija) određeni iz podataka kraćih vremenskih intervala ne bi smjeli „značajno“ odstupati od jednog intervala do drugog.

U daljem se nećemo detaljno baviti svojstvima slučajnih pojava (to ćete detaljnije naučiti u drugim kolegijima), ali ćemo ipak posvetiti pažnju svojstvima koja se važna za spektralnu analizu. To su funkcije (auto)korelacije i funkcije spektra gustoće snage.

### Funkcija autokorelacije

Funkcija autokorelacije slučajnih vrijednosti opisuje opću ovisnost vrijednosti podataka u određenom trenutku, o vrijednostima podataka u neko drugo vrijeme.

Neka je dana vremenska slika uzorka kao na slici, a vrijeme kada smo počeli prikupljati podatke uzmimo kao  $t = 0$ .



Ocjenu autokorelacije između vrijednosti  $x(t)$  u vrijeme  $t$  i  $x(t + \tau)$  u trenutku  $t + \tau$  možemo dobiti kao srednju vrijednost produkta  $x(t)x(t + \tau)$  u intervalu vremena  $T$ . Ta srednja vrijednost produkta teži egzaktnoj vrijednosti funkcije autokorelacije kada  $T$  teži u beskonačnost:

$$R_x(\tau) = \int_0^{\infty} x(t)x(t + \tau) dt.$$

To je, kako vidimo, *realna* funkcija. Lako je vidjeti da je to i *parna* funkcija:

$$\int_0^{\infty} x(t)x(t + \tau) dt = \begin{cases} u = t + \tau \\ t = u - \tau \end{cases} = \int_0^{\infty} x(u - \tau)x(u) du$$

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau),$$

a može poprimiti pozitivne i negativne vrijednosti.

Budući da se granica integracija proteže u beskonačnost može se postaviti pitanje o uvjetima konvergencije toga integrala. Ne ulazeći duboko u taj problem možemo reći da postoje ova dva pravila:

1. Za teorijski definirane funkcije integral konvergira ako postoji konačna granična vrijednost, tj. ispunjeni su Dirichlet-ovi uvjeti.
2. Za empirijske vrijednosti treba navesti da postoje alternativne definicije funkcije autokorelacije, npr.:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t + \tau) dt.$$

Razumljivo je da je u praktičnom postupku interval integracije ograničen, u našem slučaju  $T$ , te prethodni izraz znači prosječnu vrijednost produkta  $x(t)x(t - \tau)$  unutar intervala  $T$ . Uključivanje faktora  $1/T$  služi kao neka vrst normiranja, što je posebno potrebno kada uspoređujemo podatke različitih intervala  $T$ . Konačno, nas i zanimaju relativni odnosi, ali određeni na način da veličine možemo uspoređivati.

*Primjer:* Odredi autokorelogram funkcije  $x(t) = X \sin 2\pi f_0 t$ !

Pretpostavimo  $T = kT_0 = k \frac{1}{T_0}$ , dakle gledamo funkciju u intervalu koji odgovara cjelobrojnom višekratniku perioda.

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt &= \\ &= \int_0^T X \sin 2\pi f_0 t \ X \sin 2\pi f_0(t + \tau) dt = X^2 \int_0^T \sin 2\pi f_0 t \ \sin 2\pi f_0(t + \tau) dt \\ &= X^2 \int_0^T \frac{1}{2i} (e^{i2\pi f_0 t} - e^{-i2\pi f_0 t}) \ \frac{1}{2i} (e^{i2\pi f_0(t+\tau)} - e^{-i2\pi f_0(t+\tau)}) dt = \\ &= -\frac{X^2}{4} \int_0^T [e^{i2\pi f_0(2t+\tau)} + e^{-i2\pi f_0(2t+\tau)} - e^{-i2\pi f_0\tau} - e^{i2\pi f_0\tau}] dt = \\ &= \frac{X^2}{4} \int_0^T [2 \cos 2\pi f_0(2t + \tau) - 2 \cos 2\pi f_0\tau] dt = \end{aligned}$$

[Prvi član jednak je nuli (integral kosinusa po punom periodu)]

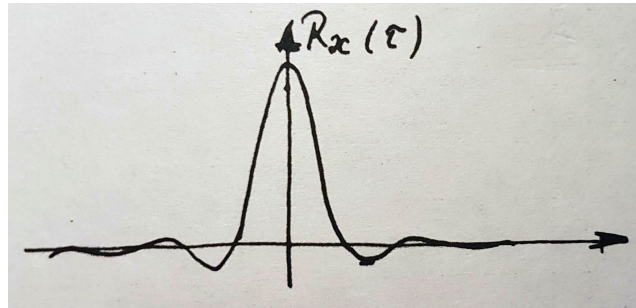
$$= \frac{X^2}{2} \cos 2\pi f_0\tau \int_0^T dt = T \frac{X^2}{2} \cos 2\pi f_0\tau,$$

pa je funkcija autokorelacije:

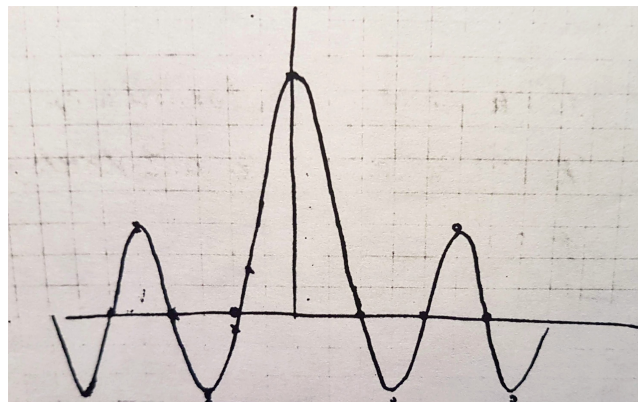
$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left( T \frac{X^2}{2} \cos 2\pi f_0\tau \right) = \frac{X^2}{2} \cos 2\pi f_0\tau.$$

Dakle, korelogram sinusa je kosinus iste frekvencije, a amplituda je jednaka polovici kvadrata amplitude sinusa. Kako smo i očekivali, to je realna i parna funkcija. Informacija o fazi je izgubljena.

Autokorelogram slučajnih podataka ima oštar vrh za  $\tau = 0$ , a dalje brzo opada prema nuli. Dakle, slučajni podaci dobro su korelirani samo 'sami sa sobom', što je i očekivano.



Autokorelogram zbroja sinusoidalnih podataka i slučajnog šuma jednak je zbroju pripadnih autokorelograma, kao na slici:



Određivanje funkcije autokorelacije ponekad omogućava otkrivanje determinističke pojave koja inače može biti maskirana jakim šumom. To je jedna od mogućih primjena autokorelacije. Druge, manje očite, povezane su sa spektrima gustoće snage (vidi dolje!).

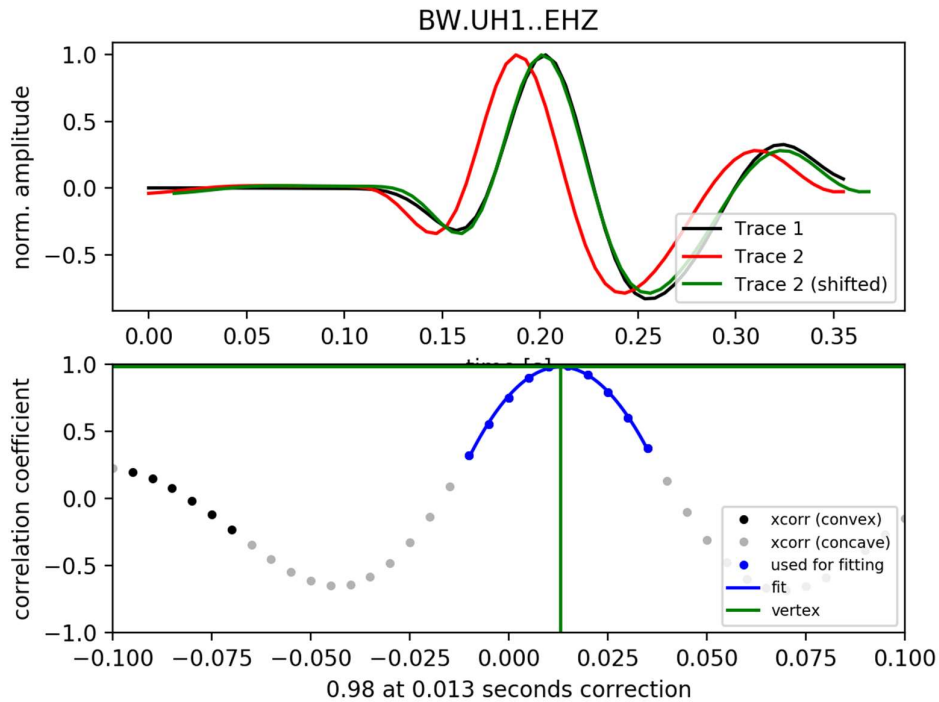


## Funkcije međukorelacije

Tek radi potpunosti, navedimo da je funkcija međukorelacije (*cross-correlation*) definirana slično, samo se gleda međusobna ovisnost podataka dvije funkcije,  $x(t)$  i  $y(t)$ :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt$$

Ona u općem slučaju nije parna funkcija. U geofizici, posebno u seizmologiji, funkcije međukorelacije služe i za precizno određivanje vremenskih razlika nastupa iste grupe valova na dvije seizmološke postaje u istoj mreži (vidi sliku dolje), ili npr. za precizno mjerenje dvoloma S-valova koji prolaze kroz anizotropno sredstvo.



## Funkcije spektra gustoće energije (snage)

(Power spectral density functions)

Funkcija spektra gustoće energije za slučajne podatke opisuje općenito sastav podataka u odnosu na spektralnu gustoću vrijednosti njihovih kvadrata.

Budući da je spektralna analiza kao matematička disciplina bila u prvom redu primjenjivana na električne pojave, to su se i mnogi izrazi u spektralnoj analizi zadržali u analogiji s elektrotehničkim nazivima. Tako je definirana i funkcija spektra gustoće energije, ili kako se često također zove – spektra gustoće snage.

Uzmimo da se u krugu električne struje jakosti  $I(t)$  nalazi otpor  $R$  od  $1 \Omega$ . Tada je gubitak energije kruga u vremenu  $\Delta t$ :

$\Delta W = I^2(t)(R = 1)\Delta t$ , a ukupni gubitak energije tijekom vremena  $0 \rightarrow T_p$

$$W = \int_0^{T_p} I^2(t) dt.$$

U jedinici vremena *prosječni gubitak energije* tj. *prosječna snaga* je

$$\bar{W} = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} I^2(t) dt.$$

To nije ništa drugo do *prosječna vrijednost kvadrata jakosti električne struje*. Tako se i u spektralnoj analizi zadržao izraz *spektar gustoće snage (energije)*, bez obzira o kakvoj se funkciji  $I(t)$  radi.

Označimo funkciju vremena s  $x(t)$  i neka je definirana u intervalu  $[0, T_p]$ . Analogno nazivu u elektrotehnici i ovdje možemo reći da je prosječna snaga

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x^2(t) dt,$$

no odmah uočavamo da je to statistička prosječna vrijednost kvadrata naše funkcije. Označimo je  $\overline{x^2(t)}$ . Funkciju  $x(t)$  možemo izraziti Fourierovim integralom:

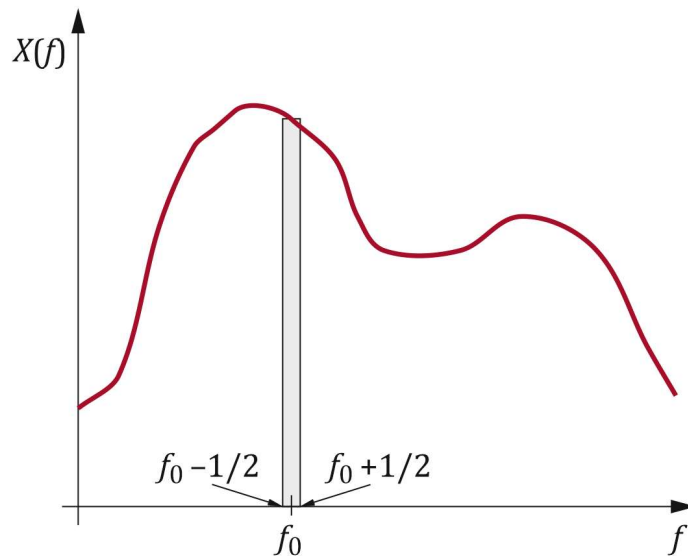
$$x(t) = \int_0^{\infty} X(f) \cos(2\pi f t - \theta) df.$$

Ograničimo se sada samo na onaj dio spektra koji se nalazi unutar jediničnog intervala oko neke frekvencije  $f_0$ , dakle unutar  $\left[f_0 - \frac{1}{2}, f_0 + \frac{1}{2}\right]$ .

Sada možemo izračunati onaj dio funkcije  $x(t)$  koji sadrži frekvencije samo unutar tog intervala,  $f \in \left[f_0 - \frac{1}{2}, f_0 + \frac{1}{2}\right]$ , tako da primjereno promijenimo granice integracije Fourierovog integrala:

$$x(t; f_0, 1) = \int_{f_0-1/2}^{f_0+1/2} X(f) \cos(2\pi f t - \theta) df.$$

Ovdje je  $x(t; f_0, 1)$  'dio' funkcije  $x(t)$  koji sadrži frekvencije ( $f$ ) samo unutar jediničnog (1) intervala oko frekvencije  $f_0$ .



Pretpostavit ćemo da je taj interval frekvencija u odnosu na cijeli interval frekvencija dovoljno uzak da se niti  $[X(f), \theta(f)]$  niti kosinus ne mijenjaju znatno, pa ih možemo zamijeniti njihovim vrijednostima u  $f = f_0$ .

$$x(t; f_0, 1) = X(f_0) \cos(2\pi f_0 t - \theta(f_0)).$$

Prosječna vrijednost od  $x^2(t; f_0, 1)$  je:

$$\begin{aligned} \overline{x^2(t; f_0, 1)} &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x^2(t; f_0, 1) dt = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} X^2(f_0) \underbrace{\cos^2(2\pi f_0 t - \theta(f_0))}_{\phi} dt = \\ &= \frac{X^2(f_0)}{T_p} \int_0^{T_p} \cos^2 \phi dt = \{\text{neka je } T_p = k/f_0\} = \frac{X^2(f_0)}{2T_p} \int_0^{T_p} (1 + \cos 2\phi) dt = \end{aligned}$$

$$\{\text{integral } \cos 2\phi \text{ po periodu} = 0\} = \frac{X^2(f_0)}{2T_p} \int_0^{T_p} dt = \frac{X^2(f_0)}{2}.$$

Ovu veličinu zvat ćemo spektrar gustoće energije (snage).

*spektrar* – jer se odnosi na određenu frekvenciju;

*gustoće* – jer se odnosi na *jedinicu* frekvencije i vremena;

*energije* – jer označuje srednju vrijednost kvadrata funkcije.

Pisat ćemo:

$$G(f) = \frac{X^2(f)}{2}.$$

Razumljivo da bismo ukupnu prosječnu snagu dobili zbrojem doprinosa snaga pojedinih frekvencija, tj.

$$\overline{x^2(t)} = \int_0^{\infty} G(f) df.$$

Grafički prikaz funkcije  $G(f)$  o frekvenciji naziva se spektralna slika snage. Spektri gustoće snage uglavnom se koriste za karakterizaciju širokopolasnih slučajnih signala (npr. mikroseizmičkog nemira), dakle pojava koje dugo traju (npr. stacionarne pojave svojstva ne mijenjaju s vremenom što implicira beskonačno dugo trajanje i beskonačnu ukupnu energiju) i nisu periodičke, dakle ne udovoljavaju kriterijima da ih se 'napadne' alatima niti harmoničke niti spektralne analize. Uočite i da je ovakvom reprezentacijom spektralnog sastava neke pojave potpuno izgubljena informacija o fazi.

## Veza funkcije autokorelacije i spektra gustoće snage

Funkciju autokorelacije definirali smo ovako:

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} x(t)x(t + \tau) dt, \quad t \in [0, \infty].$$

Kao i svaka funkcija vremena, i ona ima svoj spektar. Izrazimo ga kosinusovom i sinusovom transformacijom. Kako je  $R$  parna funkcija, sinus-spektar joj je nula:

$$\begin{aligned} R(\tau) \nearrow a_R(f) &= 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f \tau dt \\ &\searrow b_R(f) = 0 \end{aligned}$$

pa se  $R(\tau)$  može pisati kao

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} a_R(f) \cos 2\pi f \tau df. \quad (*)$$

Analogno ćemo spektar funkcije  $x(t)$  prikazati također kosinus i sinus spektrom:

$$\begin{aligned} x(t) \nearrow a_R(f) &= 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos 2\pi f t dt \\ &\searrow b_R(f) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \sin 2\pi f t dt \end{aligned}$$

{Ovdje je donja granica integracije nula, jer smo naprijed definirali da vrijeme mjerimo od nule,  $t \in [0, \infty]$ .}

$$x(t) = \int_0^{\infty} [a(f) \cos 2\pi f t + b(f) \sin 2\pi f t] df.$$

Sada imamo [uz  $\omega = 2\pi f$ ]:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_0^{\infty} x(t)x(t + \tau) dt \\ &= \int_0^{\infty} x(t) \left\{ \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega(t + \tau) + b(\omega) \sin \omega(t + \tau)] df \right\} dt \\ &= \{\text{zamijenimo } df \text{ i } dt\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} x(t) \left\{ \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t \cos \omega \tau \right. \\
&\quad \left. - a(\omega) \sin \omega t \sin \omega \tau + b(\omega) \sin \omega t \cos \omega \tau + b(\omega) \cos \omega t \sin \omega \tau] dt \right\} df = \\
&= \int_0^{\infty} \left\{ a(\omega) \cos \omega \tau \int_0^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - a(\omega) \sin \omega \tau \int_0^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \right. \\
&\quad \left. + b(\omega) \cos \omega \tau \int_0^{\infty} x(t) \sin \omega t dt + b(\omega) \sin \omega \tau \int_0^{\infty} x(t) \cos \omega t dt \right\} df.
\end{aligned}$$

Četiri integrala u vitičastim zagradama prepoznamo kao  $a(\omega)/2$  i  $b(\omega)/2$ , pa dalje imamo:

$$\begin{aligned}
R(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} [a(\omega)a(\omega) \cos \omega \tau - a(\omega)b(\omega) \sin \omega \tau + \\
+ b(\omega)b(\omega) \cos \omega \tau + b(\omega)a(\omega) \sin \omega \tau] df.
\end{aligned}$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \underbrace{[a^2(f) + b^2(f)]}_{X^2(f)} \cos 2\pi f \tau df = \{(*)\} = \int_0^{\infty} a_R(f) \cos 2\pi f \tau df.$$

Slijedi da je

$$\frac{X^2(f)}{2} = a_R(f) = G(f).$$

Time smo izveli važno svojstvo spektra gustoće snage  $G(f)$  – on je jednak spektru (Fourierovoj transformaciji) funkcije autokorelacije te pojave! U literaturi se zato spektri gustoće snage ponekad zovu i autospektralne funkcije gustoće (*autospectral density functions*).

Na taj smo način povezali domenu nedeterminističkih, slučajnih, podataka (autokorelaciju i spektar gustoće snage) i alata koje smo upoznali kod determinističkih tranzijentnih pojava, konkretno Fourierove transformacije.

## Diracova $\delta$ -funkcija

Diracova  $\delta$ -funkcija jedan je od osnovnih alata primijenjene matematike, a osobitu primjenu ima u spektralnoj analizi. Pripada tzv. singularnim funkcijama (*singularity functions*). Iako je to važna funkcija definirana je na nekoliko fundamentalno različitih načina. Spomenimo ove:

$$A. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \begin{array}{ll} \delta(t) = 0 & \text{za } t \neq 0 \\ \delta(t) \text{ je nedefinirana} & \text{za } t = 0 \end{array}$$

'Površina' pod  $\delta$ -funkcijom jednaka je 1, pa je to dakle beskonačni puls u nuli.

$$B. \text{ Kao limes: } \delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t),$$

gdje je  $f_n$  red funkcija koje zadovoljavaju:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) dt = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0 \quad \text{za } t \neq 0$$

$$C. \text{ Svojtvom: } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0),$$

gdje je  $f$  bilo kakva funkcija kontinuirana u ishodištu.

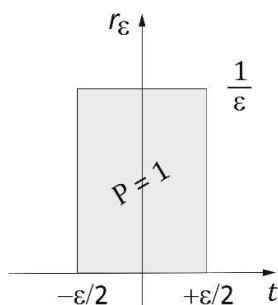
D. Svojtvom da je  $\delta$ -funkcija jednaka inverznoj Fourierovoj transformaciji konstante:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega.$$

Sve su ove definicije 'besmislene' ako  $\delta$ -funkciju promatramo kao običnu funkciju. Zato ćemo uvesti novi koncept generalizirane funkcije (funkcionala) ili razdiobe (ne u statističkom smislu). Razdiobom  $g(t)$  ćemo zvati proces koji proizvoljnoj funkciji  $\varphi(t)$  klase C (to su funkcije koje imaju bilo koju derivaciju i trnu prema nuli brže od  $t^n$ ,  $n$  je bilo koji cijeli broj, kad  $t \rightarrow \infty$ ) pridružuje broj  $N_g[\varphi(t)]$ . Za  $\delta$ -funkciju može se pokazati da je dovoljan uvjet da je neprekinuta u ishodištu. Broj  $N_g[\varphi(t)]$  može biti bilo što ovisno o  $\varphi(t)$ . Općenito, obično se uzima

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \varphi(t) dt = N_g[\varphi(t)].$$

$\delta$ -funkciju definira prema definiciji C integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$ . Za obične funkcije ovaj integral ima smisao sam po sebi.  $\delta$ -funkcija je, međutim, skupa s integralom definirana brojem  $\varphi(0)$ , pa  $\delta$  i integral sami po sebi nemaju nikakvo značenje.



Promotrimo načas integral jediničnog pravokutnog pulsa  $r_\epsilon(t)$  definiranog grafom, i neke funkcije  $\varphi(t)$ . Očito je da će iznos ovog integrala biti to sličniji  $\varphi(0)$ , što je  $\epsilon$  manji, pa imamo:

$$\varphi(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} r_\epsilon(t)\varphi(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} \varphi(t)dt,$$

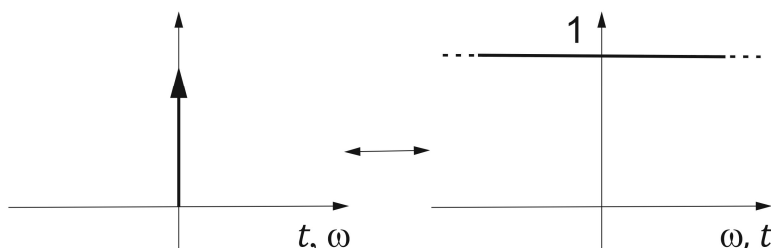
pa je dakle (iz C)  $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} r_\epsilon(t)$ .

Ovdje je red funkcija  $f_n(t)$  iz definicije B koji ima jedan član jednak  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} r_\epsilon$ . Tako smo razdiobu  $\delta(t)$  izrazili limesom pravokutnog pulsa. Mogli smo upotrijebiti i kakvu drugu oko nule simetričnu funkciju, npr. Gaussovu ili kardinalni sinus (vidi kasnije). Kako je površina pravokutnika na slici uvijek jednaka ( $P = 1$ ), njegovim sužavanjem kako  $\epsilon \rightarrow 0$  on mora rasti, pa je očito da  $\delta$ -funkciju možemo zamisliti kao puls u  $t = 0$ , dok je ona jednaka 0 ta  $t \neq 0$ .

Kakva još svojstva ima  $\delta$ -funkcija? Što je npr. Fourierova transformacija od  $\delta(t)$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt$ ? Ovdje je  $\varphi(t) = e^{-i\omega t}$ , pa je

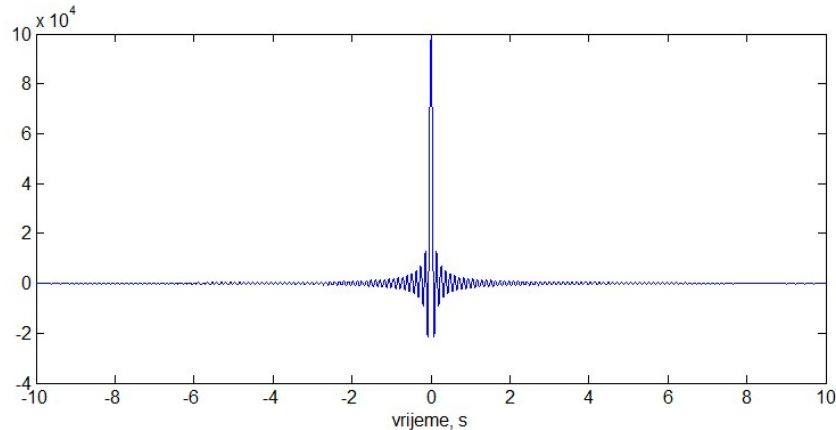
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = \{\text{definicija C}\} = e^{-i\omega 0} = 1.$$

Znači spektar  $\delta(t)$  je konstanta! Ova činjenica ima veliku primjenu, pa ćemo uvijek kada imamo posla s nekom impulsnom silom očekivati bijeli šum kao spektar (bijeli šum je signal u kojem sve frekvencije imaju jednaku amplitudu).





Ovo znači da  $\delta$ -funkciju možete dobiti zbrajajući beskonačno mnogo kosinusa svih frekvencija. Da to vidite, pokušajte zbrajati kosinuse različitih frekvencija (ali bez faznog pomaka) – oni se svi zbroje u  $t = 0$ , a za sva druga vremena se kosinusi u sumi ponište. Npr. ovo je suma 100.000 kosinusa s frekvencijama između 0.0 Hz i 500 Hz.:



Vrijedi i obrat – bijeli šum ima spektar koji je jednak  $\delta$ -funkciji. Pokažite to!

Inverzna Fourierova transformacija konstante, dakle, daje  $\delta$ -funkciju,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{i\omega} d\omega = \delta(t),$$

što je i naša definicija D.

Kako je  $\delta(t) = 0$  za  $t \neq 0$ , to možemo pisati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1 = \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Prvi i treći integral jednaki su nuli jer je tamo  $\delta = 0$ , dok je za drugi integral  $e^{-i\omega t} = 1$ , pa je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Površina ispod  $\delta$ -funkcije jednaka je 1, što je njezino važno svojstvo po definiciji A. Odavde izravno slijedi i svojstvo C:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(t) dt = f(0).$$

Lako je pokazati da vrijede i ova svojstva:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t - \tau) dt = \{f(t - \tau = 0)\} = f(\tau)$$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) f(t) dt = \{t - \tau \neq 0 \rightarrow \delta(t - \tau) = 0\} = \\ = \int_{\tau - \epsilon}^{\tau + \epsilon} \delta(t - \tau) f(t) dt = f(\tau) \underbrace{\int_{\tau - \epsilon}^{\tau + \epsilon} \delta(t - \tau) dt}_1 = \{definicija A\} = f(\tau)$$

Svojstva a) i b) zovu se svojstva *prosijavanja* (engl: *sifting property*), jer iz funkcije  $f(t)$  izvlače točno određenu vrijednost, onu na koju pokazuje  $\delta$ -funkcija.

$$c) \delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t). \quad \text{Dokaz:}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at) \varphi(t) dt = \{u = at, \dots\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) \varphi(u/a) du = \frac{1}{a} \varphi(0),$$

$$\text{a znamo: } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \{def. C\} = \varphi(0), \quad \text{pa slijedi:}$$

$$a \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at) \varphi(t) dt = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt.$$

Dakle, usporedbom podintegralnih funkcija:

$$a\delta(at) = \delta(t), \delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t).$$

$$\text{Zbog toga je npr. } \delta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \delta(f) = 2\pi\delta(\omega).$$

$$d) f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t). \quad \text{Dokaz:}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\delta(t)f(t)} \varphi(t) dt = \{def. C\} = f(0)\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\delta(t)f(0)} \varphi(t) dt$$

Potcrtani izrazi moraju dakle biti jednaki, pa je dokaz proveden!

Pomoću  $\delta$ -funkcije možemo izračunati i Fourierovu transformaciju funkcija kosinus i sinus u beskonačnom intervalu. Napišimo npr. prvo kosinus pomoću Moivreove formule:

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}).$$

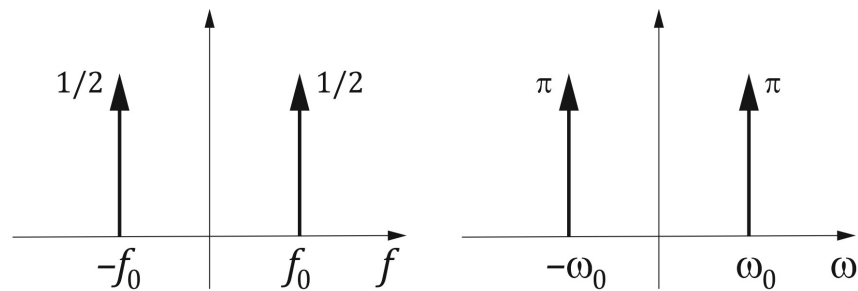
Trebamo izračunati Fourierovu transformaciju:

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt =$$

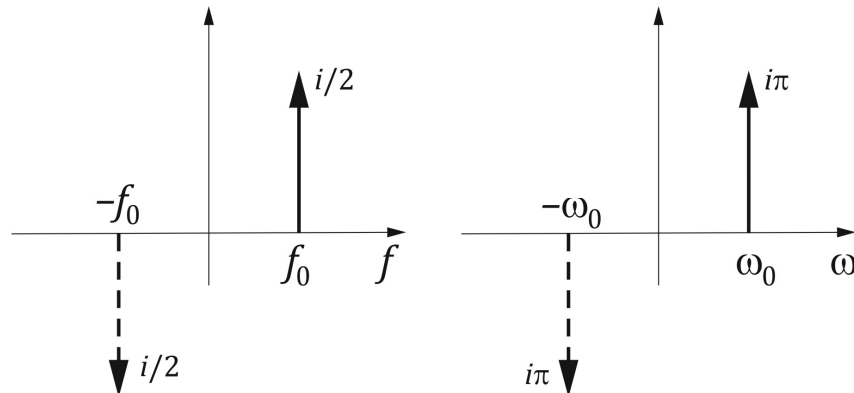
$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi(f - f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi(f + f_0)t} dt =$$

$$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \{\delta(f) = 2\pi\delta(\omega)\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



Na isti bismo način dobili da je Fourierov par funkcije  $\sin \omega_0 t$ :

$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow \frac{i}{2} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] = i\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].$$



Pokažimo sada da se  $\delta$ -funkcija može dobiti i kao ovakav limes:

$$\delta(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t}. \quad (A)$$

Dovoljno je pokazati da desna strana ima osnovno svojstvo  $\delta$ -funkcije:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t} \varphi(t) dt = \varphi(0).$$

Rastavimo integral ovako:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t} \varphi(t) dt = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t} \varphi(t) dt. \right]$$

Uz razumnu pretpostavku da je  $\varphi(t)/t$  integrabilno u  $(-\infty, -\epsilon)$  i  $(\epsilon, \infty)$  slijedi prema *Riemann-Lebesque*-ovoj lemi da su i prvi i treći integral jednaki nuli. Ta funkcija oko nule nije integrabilna jer je  $t$  u nazivniku.

Digresija – *Riemann-Lebesque*-ova lema:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b e^{-i\omega t} \varphi(t) dt = \varphi(0), \quad \text{za } a, b \text{ bilo koji broj (uključujući i } \pm \infty),$$

ako je  $\varphi(t)$  apsolutno integrabilna.

Sinus možemo pisati kao  $\sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{\alpha} + e^{-\alpha})$ , pa je lema izravno primjenljiva.

$\varphi(t)$  je kontinuirana u nuli, pa se smije pisati  $\varphi(t) = \varphi(0)$  za  $t \in [-\epsilon, +\epsilon]$ , ako je  $\epsilon$  dovoljno mali:

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\sin \omega t}{\pi t} \varphi(t) dt = \varphi(0) \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\sin \omega t}{\pi t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \omega t = x, \quad \frac{1}{t} = \frac{\omega}{x} \\ dt = \frac{dx}{\omega} \\ \text{granice!} \end{array} \right\} =$$

$$\varphi(0) \int_{-\epsilon\omega}^{+\epsilon\omega} \frac{\omega}{x} \frac{\sin x}{\pi} \frac{dx}{\omega} = \varphi(0) \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\sin x}{\pi x} dx.$$

Ovo je tablični integral i može se pokazati da u limesu vrijedi:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\epsilon\omega}^{+\epsilon} \frac{\sin x}{\pi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\pi x} dx = 1.$$

[Izvod vidi u Papoulis, (II-57).]

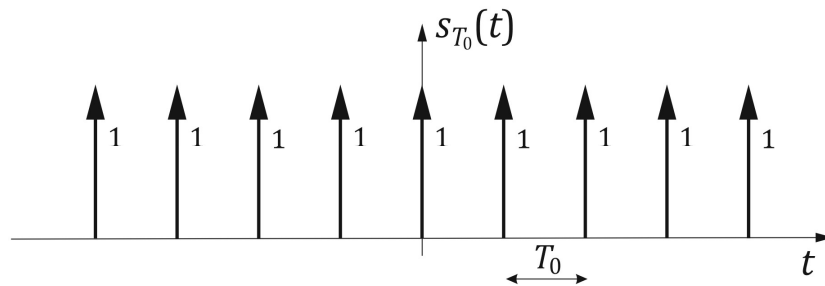
Tako konačno imamo:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t} \varphi(t) dt = \varphi(0),$$

čime je dokaz proveden.

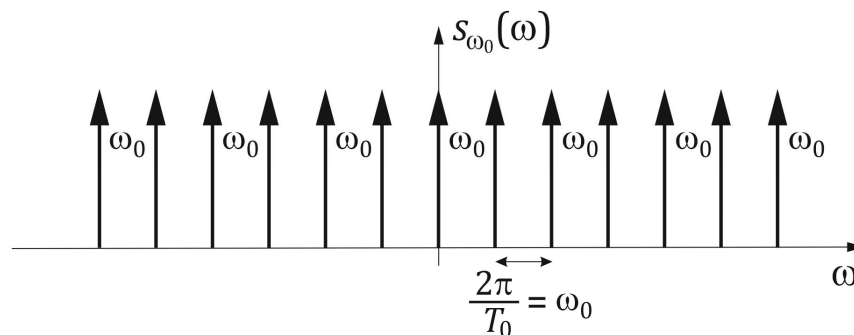
\* \* \*

Ovo ćemo primijeniti pri traženju Fourierova para tzv. jedinične funkcije češlja, tj. niza ekvidistantnih  $\delta$ -funkcija. Ona izgleda ovako:



U literaturi ova se funkcija često označava i simbolom III koji podsjeća i na ćirilično veliko slovo 'Š', pa ga se ponekad 'engleski' čita 'sha' (ša)!

Dokazat ćemo da je Fourierov par također funkcija češlja ovoga oblika:



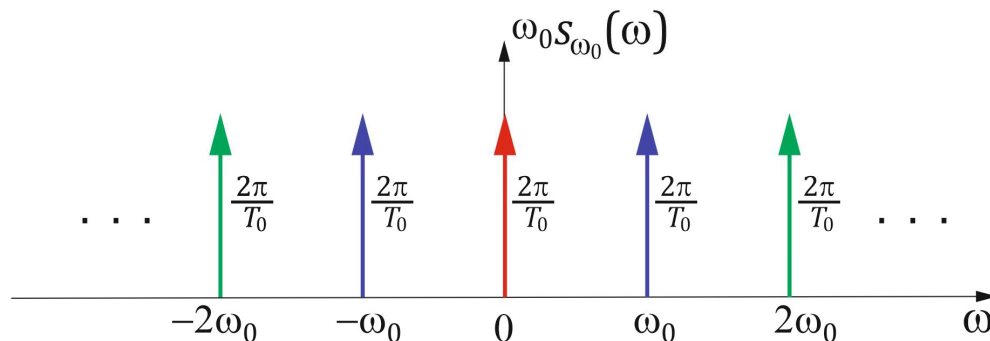
Znači dokazat ćemo da je:

$$s_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) \leftrightarrow \omega_0 s_{\omega_0}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0). \quad (*)$$

Dakle Fourierov par je također funkcija češlja s razmakom među zupcima  $\frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$ . 'Visina' šiljaka kako je naznačena na slikama jednostavno ukazuje koliko puta je djelovanje svake  $\delta$ -funkcije (svakoga zupca češlja) jače od 'obične', jedinične. Primijetite da smo gornjom formulom funkciju češlja izrazili *sumom*  $\delta$ -funkcija kakve smo do sada upoznali. Indeks označava razmak zubaca pripadne funkcije češlja.

DIGRESIJA – možemo li si na temelju onoga što smo do sada naučili i vizualno predočiti da je naša tvrdnja istinita?

$\omega_0 s_{\omega_0}(\omega)$  izgleda ovako:



Kako smo malo prije vidjeli, spektar funkcije  $\cos \omega t$  su zapravo dvije  $\delta$ -funkcije (pomnožene s  $\pi$ ) na frekvencijama  $\pm \omega_0$ . Tako, npr. dvije  $\delta$ -funkcije na poziciji  $\omega_0$  (plave) zapravo predstavljaju spektar funkcije  $\frac{2}{T_0} \cos \omega_0 t$ , a zelene su spektar od  $\frac{2}{T_0} \cos 2\omega_0 t$ . Srednja (crvena) je spektar od  $\frac{2}{T_0} \cos 0 = \frac{2}{T_0} = konst.$  – to smo već prije pokazali,  $\delta$ -funkcija je spektar konstante. Zbrojimo li sve kosinuse  $\frac{2}{T_0} \cos n\omega_0 t$  za  $n \rightarrow \infty$ , oni će se uvijek zbrajati za  $t = \frac{n}{f_0} = nT_0$ , a za druge vrijednosti će se poništavati, pa ćemo dobiti 'češalj' s razmakom šiljaka jednakim  $T_0$ . Dokažimo to sada i egzaktno!

Da bismo dokazali tvrdnju (\*), dovoljno je pokazati da je inverzna Fourierova transformacija od  $\omega_0 s_{\omega_0}(\omega)$  jednaka  $s_{T_0}(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0) e^{i\omega t} d\omega &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x = \omega - n\omega_0 \\ dx = d\omega \\ \omega = x + n\omega_0 \end{array} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} e^{in\omega_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{ixt} dx}_{=\exp(i0t)=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} e^{in\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Ovo je kompleksni oblik Fourierovog reda ( $s$  je periodička funkcija!). Uvedimo sada *realnu* funkciju  $k_N(t)$  kao sumu:

$$k_N(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{T_0} \sum_{n=-N}^N e^{in\omega_0 t} \right). \quad \text{To je dakle suma kosinusa.}$$

Suma geometrijskog reda općenito je jednaka:

$$a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^n = a_1 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

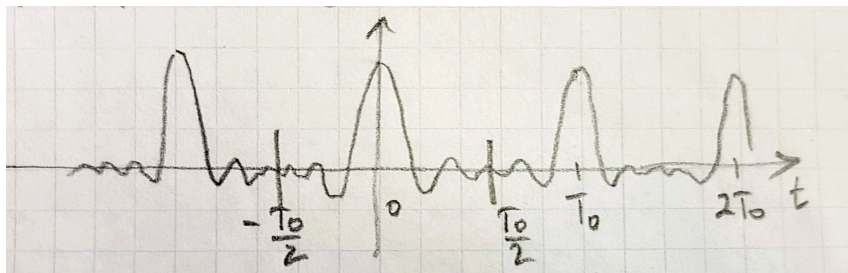
Ovdje je  $q = e^{i\omega_0 t}$ ,  $a_1 = e^{-iN\omega_0 t}$ , a članova ima  $n = 2N + 1$ . Zato je:

$$k_N(t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{T_0} \underbrace{e^{-iN\omega_0 t}}_{a_1} \frac{1 - e^{i\omega_0 t(2N+1)}}{1 - e^{i\omega_0 t}} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{T_0} \frac{e^{i(N+1)\omega_0 t} - e^{-iN\omega_0 t}}{e^{i\omega_0 t} - 1} \right].$$

Realni dio ovog izraza je:

$$k_N(t) = \frac{\sin \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega_0 t}{T_0 \sin \frac{\omega_0 t}{2}},$$

i zove se kernel (jezgra) Fourierovog reda. To je periodična funkcija s periodom  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  i izgleda otprilike ovako:



Ako dokažemo da u  $k_N(t)$  u intervalu  $[-\frac{T_0}{2}, +\frac{T_0}{2}]$  teži prema  $\delta(t)$  za  $N \rightarrow \infty$ , slijedit će:

$\lim_{N \rightarrow \infty} k_N(t) = s_{T_0}(t)$ , što i tražimo.

$$k_N(t) \frac{t}{t} = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega_0 t}{T_0 t} \frac{t}{\sin \frac{\omega_0 t}{2}}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega_0 t}{T_0 t} = \frac{\pi}{T_0} \delta(t). \quad \text{To smo dokazali ranije – jednažba (A).}$$

Dakle, kako je  $t / \sin \frac{\omega_0 t}{2}$  ograničeno u  $[-T_0/2, +T_0/2]$ , za  $|t| < \frac{T_0}{2}$ , vrijedi:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} k_N(t) &= \frac{\pi}{T_0} \delta(t) \frac{t}{\sin \frac{\omega_0 t}{2}} = \{\text{iz svojstva } f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)\} = \\ &= \frac{\pi}{T_0} \frac{t}{\sin \frac{\omega_0 t}{2}} \Big|_{t=0} \delta(t). \end{aligned}$$

Kako je

$$\frac{\pi}{T_0} \frac{t}{\sin \frac{\omega_0 t}{2}} \Big|_{t=0} = \frac{\frac{\pi}{T_0} t}{\sin \frac{\omega_0 t}{2}} = \frac{\frac{\omega_0 t}{2}}{\sin \frac{\omega_0 t}{2}} \Big|_{t=0} = 1,$$

imamo konačno:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [k_N(t)]_{-T_0/2}^{+T_0/2} = \delta(t),$$

pa je i inverzna Fourierova transformacija od  $\omega_0 s_{\omega_0}(\omega)$  jednaka  $s_{T_0}(t)$ .



## **Analiza digitalnih podataka**

Ovdje ćemo razmotriti specifičnosti analize i probleme s kojima se možemo susresti pri analizi digitalnih podataka. Pretpostavit ćemo da je vremenski diskretni slijed podataka takav da je vremenski razmak dva susjedna podatka (interval digitalizacije ili interval uzorkovanja) uvijek jednak. Prije nego se priđe spektralnoj analizi podataka, često su nužne određene prethodne obrade 'sirovih' podataka. Na početku ćemo samo ukratko razmotriti jednu od osnovnih koja se praktički uvijek provodi, eliminiranje trenda.

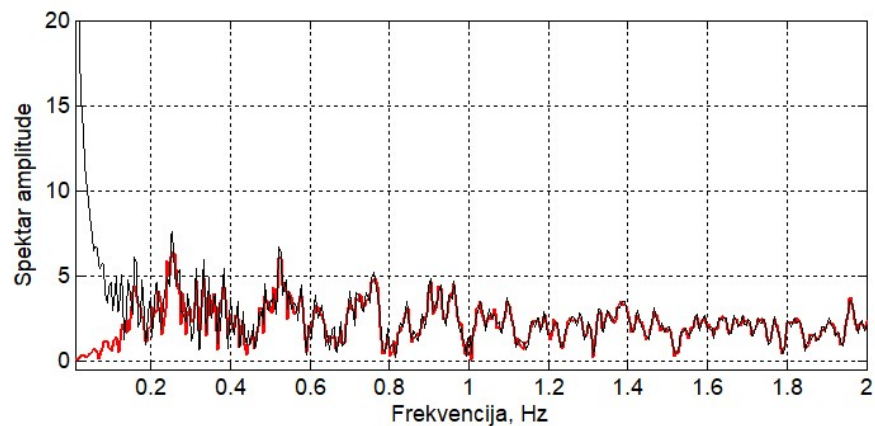
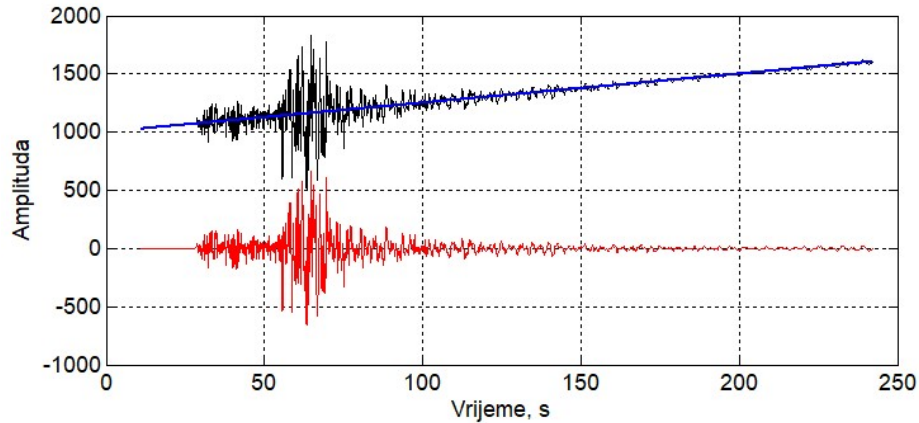
### *Eliminiranje trenda*

Eliminiranje trenda spomenut ćemo ovdje isključivo radi potpunosti predavanja, jer se nadam da su tehnike kojima se to postiže već poznate.

Trend se definira kao komponenta podataka čiji je period veći od vremenskog intervala u kojemu poznajemo podatke. Za to se koriste standardni statistički postupci. Uglavnom je to postupak najmanjih kvadrata, koji se rabi najčešće za eliminiranje linearnog trenda, ali i trendova koji se opisuju polinomima drugog ili višeg reda.

Na slici je prikazan seizmogram potresa (crno) koji očito ima pozitivni linearni trend. Do toga može doći npr. zbog polaganog zagrijavanja ili hlađenja seizmometra u zoru ili sumrak. To rezultira superpozicijom seizmograma potresa na kosinusoidu vrlo dugačkoga perioda ( $\approx 24$  sata). Lokalno, tijekom intervala vremena prikazanoga slikom (koji je mnogo manji od 24 sata) taj trend moguće je aproksimirati pravcem (plavo). Postupkom uklanjanja trenda dobije se korigirani seizmogram (crveno), koji oscilira strogo oko nule.

Da je trend važno ukloniti pokazuje donja slika – spektri amplituda 'sirovog' (crno) i korigiranog seizmograma (crveno). Vidimo da se oni znatno razlikuju za niske frekvencije, jer je FFT algoritam u obzir uzeo da u signalu postoje i komponente vrlo malih frekvencija (dugačkih perioda). Ovdje je zapravo riječ o superpoziciji seizmograma na signal beskonačno velikog perioda (pravac).



Dakle, uklanjanje trenda je važan, često i neizostavan korak pripreme podataka za analizu. Najčešće se to postiže jednostavnom prilagodbom pravca regresije (u smislu najmanjih kvadrata) 'sirovim' podacima (plavo), kojega se *oduzme* od mjerenja. Dakle, simbolički pisano u našem slučaju: [crveno] = [crno] – [plavo].

Naravno, trend može biti dobro opisan i npr. kvadratnom (ili kojom drugom) funkcijom, pa ćemo postupkom najmanjih kvadrata naći takvu parabolu koja najbolje opisuje mjerene podatke, te je konačno oduzeti od podataka. U detalje postupka određivanja pravca regresije ovdje nećemo ulaziti.

Postupak uklanjanja trenda često je u poznatim programskim paketima posve olakšan jer su dostupne gotove prikladne rutine (npr. *detrend* u Matlabu).

Priprema podataka obično uključuje i modificiranje signala (eng. *tapering*) kako bi se minimizirao utjecaj činjenice da uvijek na raspolaganju imamo signal konačne duljine. O tome nešto kasnije.

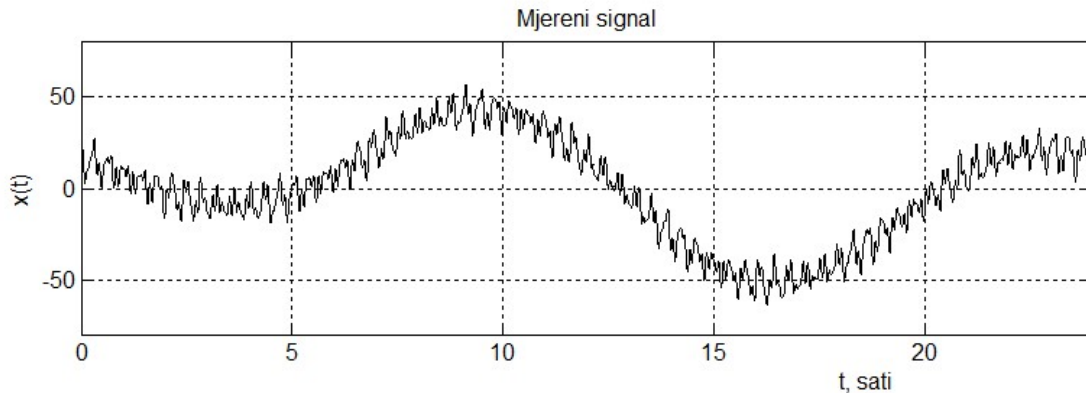
## Digitalno filtriranje

Filtriranje podataka podrazumijeva izdvajanje samo onih spektralnih komponenti koje nas zanimaju. To se obično postiže tako da se iz signala nastoje što potpunije izbaciti sve one frekvencije koje nas ne zanimaju ili smetaju pri obradi podataka. Filtriranju se mogu podvrgnuti kako analogni, tako i digitalni signali. Iako i analogno filtriranje ima svoju važnu primjenu (vidi npr. kasnije u poglavlju o uzorkovanju), ovdje ćemo se baviti samo najosnovnijim tehnikama digitalnog filtriranja, dakle filtriranja digitaliziranog, diskretnog, signala.

Filtriranje podataka izvodi se radi:

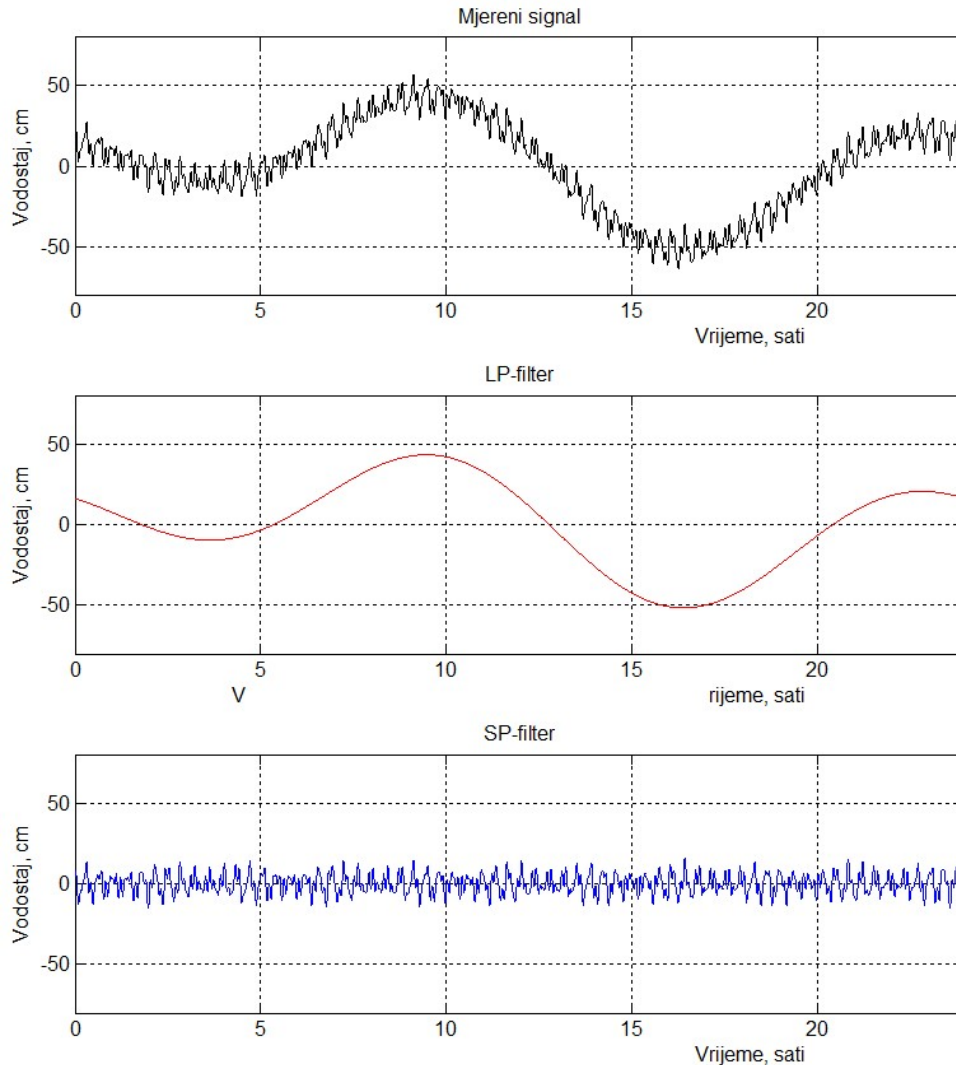
- izgladivanja podataka,
- izdvajanja interesantnog pojasa frekvencija (npr. smanjenja utjecaja šuma),
- usporedbe svojstava pojave u pojedinim frekventnim pojasevima.

Neka su originalni podaci označeni s  $x(t)$ , kao na slici:



Ova slika može prikazivati, npr. mareogram (zapis mareografa, instrumenta koji bilježi razine mora). Vidi se da se sastoji od dugih oscilacija (uočava se period od oko 24 sata, a vidi se još barem jedna spektralna komponenta perioda oko 12 sati) na koje su superponirane oscilacije mnogo kraćih perioda (najizraženije su one od oko 20 minuta). Ako je ovo mareogram, tada one duge oscilacije prikazuju morska doba (plimu i oseku), dok superponirani visokofrekventni signal možda odgovara sešima (to su stojni valovi ili vlastite oscilacije zaljeva ili bazena u kojem se mareograf nalazi; npr. Bakarski zaljev).

Ovisno o tome na čemu je trenutno Vaš fokus istraživanja, možda Vas zanimaju morska doba (pa su seši neka vrsta šuma), a možda baš želite proučiti spektralni sastav seša pa Vam smetaju dugoperiodičke oscilacije. U oba slučaja pomoći će digitalno filtriranje, kao što možete vidjeti na slici.



Ovdje su na srednjem i donjem panelu izdvojene dugoperiodičke (niskofrekventne) i kratkoperiodičke (visokofrekventne) komponente opaženog signala. U prvom slučaju primijenili bismo neki od niskopropusnih (*low-pass*, *LP*) filtara, dok bi se u drugom slučaju koristili visokopropusnim (*high-pass*, *HP*) filtriranjem. Dakle filtri imena dobivaju prema dijelu frekvencija koji propuštaju.

Kvantitativno, postupak filtriranja možemo opisati izrazom:

$$Y(f) = Z(f)X(f),$$

gdje su:

$X(f)$  – spektralna slika osnovnih podataka,

$Y(f)$  – spektralna slika podataka nakon filtriranja,

$Z(f)$  – karakteristika filtra.

Sjetimo se da smo istu formulu već jednom napisali – u poglavlju o linearnim fizikalnim sustavima. Kako je to linearna jednadžba, i filtre koji se njome opisuju zvat ćemo linearnim filtrima. Jasno je da će i u ovom slučaju vrijediti principi aditivnosti i homogenosti.

O karakteristici filtra ovisit će koje će frekvencije biti istaknute, a koje umanjene.

Primjeri:

$$Z(f) = 1.0$$

Nema filtriranja,  $X(f) = Y(f)$ .

$$Z(f) = 25.5$$

Pojačalo

$$Z(f) = \begin{cases} 1.0 & \dots & |f| \leq 5 \\ 0.0 & \dots & |f| > 5 \end{cases}$$

Niskopropusni (LP, *low-pass*) filter

$$Z(f) = \begin{cases} 1.0 & \dots & |f| \geq 10 \\ 0.0 & \dots & |f| < 10 \end{cases}$$

Visokopropusni (HP, *high-pass*) filter

$$Z(f) = \begin{cases} 1.0 & \dots & 7 \leq |f| \leq 15 \\ 0.0 & \dots & \textit{ostalo} \end{cases}$$

Pojasno propusni (BP, *band-pass*) filter

$$Z(f) = \begin{cases} 0.0 & \dots & 7 \leq |f| \leq 15 \\ 1.0 & \dots & \textit{ostalo} \end{cases}$$

Pojasno nepropusni (BS, *band-stop*) filter

Filtriranje u prostoru frekvencija je dakle vrlo jednostavno – spektar pojave modificiramo tako da sadrži samo one frekvencije koje želimo, napravimo inverznu Fourierovu transformaciju – i gotovo! Postavlja se, međutim, pitanje možemo li zadani vremenski niz filtrirati u prostoru vremena, dakle bez prethodnog računanja njegovog spektra. Pogledajmo dakle, kakav je odnos vremenskih slika podataka  $x(t)$ ,  $y(t)$  i karakteristike filtra.

Primijenit ćemo i ovdje Fourierove transformacije, pa tako za vremensku sliku filtriranih podataka vrijedi:

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{i2\pi f t_0} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Z(f) e^{i2\pi f t_0} df.$$

Označimo sada s  $z(\tau)$  vremensku sliku karakteristike filtra [ $z(\tau) \leftrightarrow Z(f)$ ], pa imamo:

$$z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(f) e^{i2\pi f \tau} df, \quad Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau,$$

a posljednji izraz uvršten u onaj za  $y(t_0)$  daje

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau \right] e^{i2\pi f t_0} df.$$

Zamjenom redoslijeda integriranja imamo:

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f (t_0 - \tau)} df \right] d\tau,$$

odnosno

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) x(t_0 - \tau) d\tau = z(t) * x(t)$$

ili, za vrijeme kao kontinuiranu varijablu:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) x(t - \tau) d\tau = z(t) * x(t)$$

Ovo je *integral konvolucije*, jedan od najvažnijih integrala primijenjene matematike. Vidimo da za zadanu karakteristiku filtra  $z(\tau)$ , filtriranu vrijednost niza u trenutku  $t_0$  možemo izračunati kao integral u koji ulaze *sve točke* originalnog niza  $x(t)$ ! Konvoluciju dva niza se uobičajeno označava zvjezdicom (\*), da nas podsjeti kako množenju u prostoru frekvencija odgovara konvolucija u prostoru vremena:

$$Z(f)X(f) \leftrightarrow z(t) * x(t),$$

a vrijedi i obrat:

$$z(t)x(t) \leftrightarrow Z(f) * X(f).$$

Dakle, umnošku spektara dva signala odgovara konvolucija ta dva signala u vremenu, a spektar umnoška dvije vremenske funkcije jednak je konvoluciji njihovih spektara. *Množenje i konvolucija su Fourierov par!*

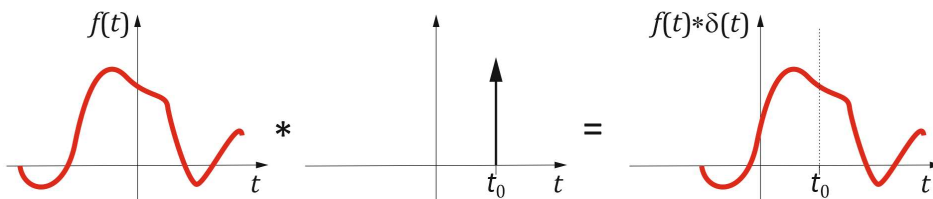
Pogledajmo i neka važnija svojstva konvolucije:

a) Konvolucija s  $\delta$ -funkcijom:

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = f(t)$$

pa je i

$$f(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - t_0 - \tau)d\tau = f(t - t_0).$$



Dakle konvolucija s  $\delta$ -funkcijom jednostavno premješta funkciju  $f$  na mjesto  $\delta$ -funkcije!

Primijetimo da ako za ulazni signal odaberemo  $\delta$ -funkciju [ $x(t) = \delta(t)$ ], filtrirani će signal  $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$  prema ovome svojstvu biti jednak  $z(t)$ . Zato  $z(t)$  često nazivamo i odzivom filtra (ili sustava) na impuls (engl. *impulse response*).

b) Svojstvo komutacije:  $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \\ &= \{\lambda = t - \tau, \quad d\tau = -d\lambda, \quad \text{granice} \rightarrow -\text{granice}\} \\ &= - \int_{\infty}^{-\infty} x(t - \lambda)y(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda)x(t - \lambda)d\lambda = y(t) * x(t) \end{aligned}$$

c) Svojstvo asocijativnosti:  $[x(t) * y(t)] * z(t) = x(t) * [y(t) * z(t)]$ .

Izvod je dosta dugačak, ostavljam ga Vama!

d) Svojstvo distributivnosti:

$$x(t) * [y_1(t) + y_2(t)] = x(t) * y_1(t) + x(t) * y_2(t)$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} x(t) * [y_1(t) + y_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)[y_1(t - \tau) + y_2(t - \tau)]d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y_1(t - \tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y_2(t - \tau)d\tau = x(t) * y_1(t) + x(t) * y_2(t) \end{aligned}$$

e) Derivacija konvolucije:  $y'(t) = x'(t) * z(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) z(t - \tau)d\tau$$

Vremenska derivacija od  $y(t)$  je

$$y'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) z'(t - \tau)d\tau = x(t) * z'(t) = \{\text{komutacija!}\} = x'(t) * z(t).$$

f) Svojstvo površine:

Ako je  $y(t) = x(t) * z(t)$ , površina ispod  $y$  je produkt površina ispod  $x$  i  $z$ .

$$A(y) = A(x) A(z)$$

$$\begin{aligned} A(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) z(t - \tau)d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} z(t - \tau)dt = A(x) A(z). \end{aligned}$$

g) Svojstvo skaliranja: Ako je  $y(t) = x(t) * z(t)$  tada vrijedi:

$$y(at) = |a|x(at) * z(at).$$



### Kako grafički provesti konvoluciju dvije funkcije, $z(\tau)$ i $x(\tau)$ ?

Konvolucija u trenutku  $t_0$  je  $y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)x(t_0 - \tau)d\tau$

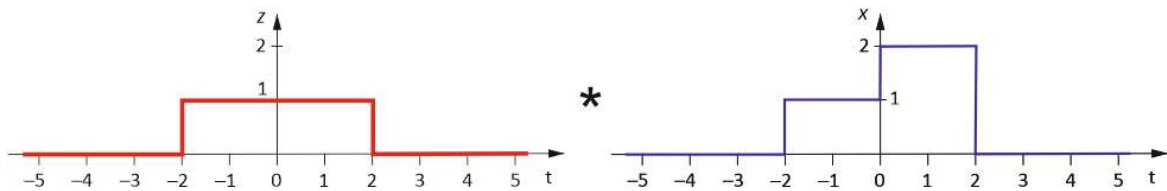
Valja izračunati površinu ispod produkta dvije funkcije:  $z(\tau)$  i  $x(t_0 - \tau)$ . Funkcija  $x(t_0 - \tau)$  je funkcija *negativnog* vremena  $\tau$ . Ako znamo kako izgleda  $x(\tau)$ , kako izgleda  $x(t_0 - \tau)$ ?

Najprije postavimo  $t_0 = 0$ , i uočimo da ćemo zrcaljenjem  $x(\tau)$  oko ordinate dobiti funkciju  $x'(\tau) = x(-\tau)$ . Ako  $x'$  pomaknemo *u desno* za  $t_0$  dobit ćemo funkciju  $x''(\tau) = x'(-t_0 + \tau) = x(t_0 - \tau)$ .

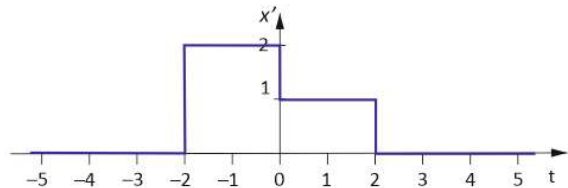
Dakle,  $x(t_0 - \tau)$  dobijemo iz  $x(\tau)$  tako da  $x(\tau)$  zrcalimo oko ordinate i pomaknemo je za  $t_0$  u desno (engl. 'flip and shift').

Primjer 1.

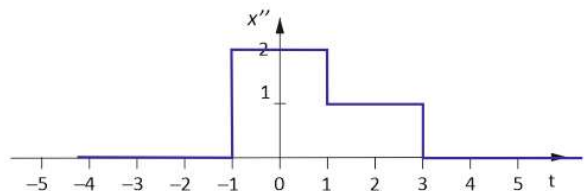
$$y = z * x, \quad y(1) = ?$$



1) Zrcali  $x$  oko ordinate.  
To je sada  $x'$ .

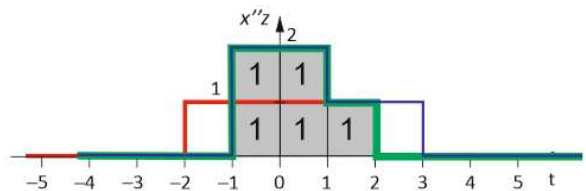


2) Pomakni  $x'$  za 1 u desno.  
To je sada  $x''$ .



3) Pomnoži  $x''$  i  $z$  (zeleno).

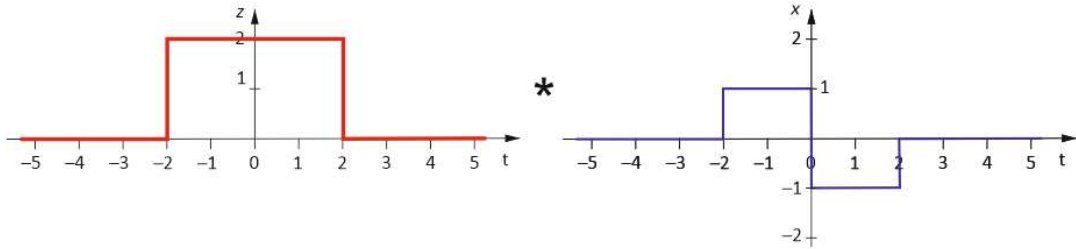
4) Integriraj  $(x''z)$ . To je površina ispod produkta!



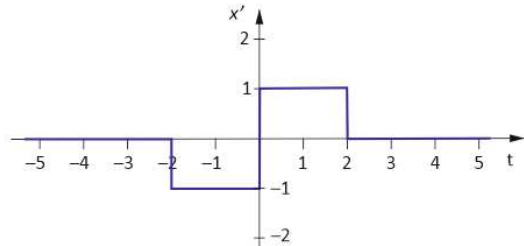
**Rezultat:  $y(1) = 5$**

Primjer 2.

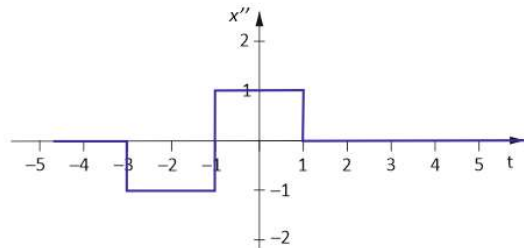
$$y = z * x, \quad y(-1) = ?$$



1) Zrcali x oko ordinate.  
To je sada  $x'$ .

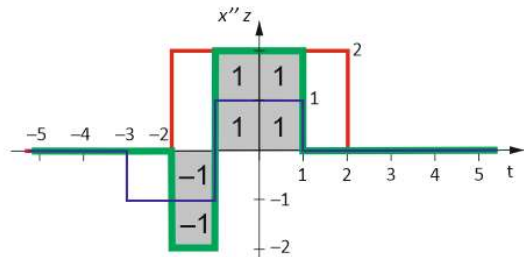


2) Pomakni  $x'$  za  $-1$  u desno  
(ili za 1 u lijevo). To je sada  $x''$ .



3) Pomnoži  $x''$  i z (zeleno).

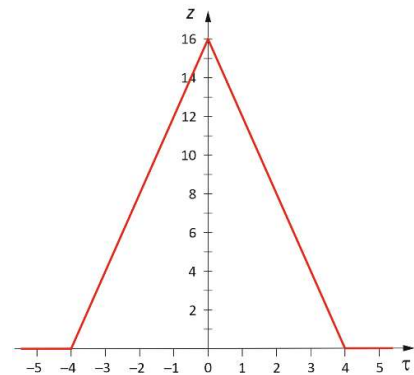
4) Integriraj  $(x''z)$ . To je površina ispod produkta!



**Rezultat:  $y(-1) = 2$**

Zadatak:

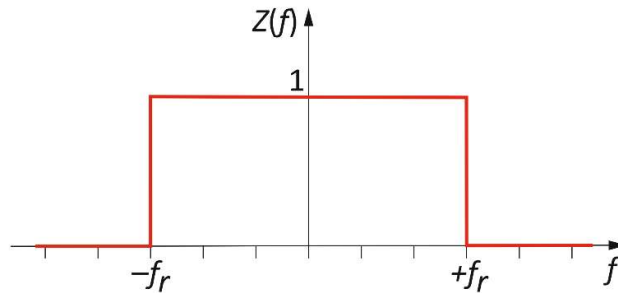
Izračunajte konvoluciju funkcije  $z(\tau)$  iz prethodnog zadatka same sa sobom!



## Idealan niskopropusni (low-pass) filter

Definirajmo takav filter njegovom karakteristikom  $Z(f)$ :

$$Z(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_r \\ 0, & |f| > f_r \end{cases}$$



Dakle, ovaj će filter propustiti samo frekvencije koje su manje ili jednake  $f_r$ , dok će ostale u potpunosti potisnuti. Funkcija oblika  $Z(f)$  zove se i *boxcar* funkcija, i idealna je da se iz nekog niza 'izvuče' samo određeni interval.

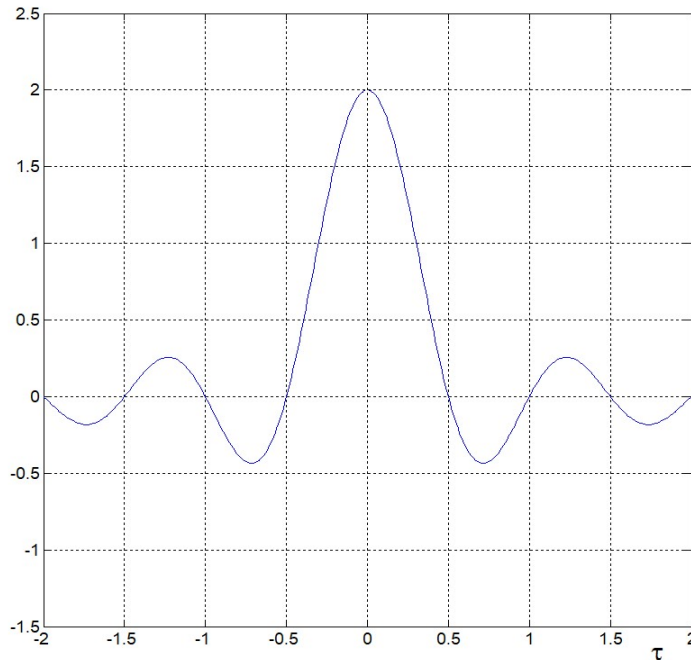


Kako izgleda funkcija  $z(\tau)$  koja je, kako smo vidjeli, jednaka Fourierovoj transformaciji  $Z(f)$ ?

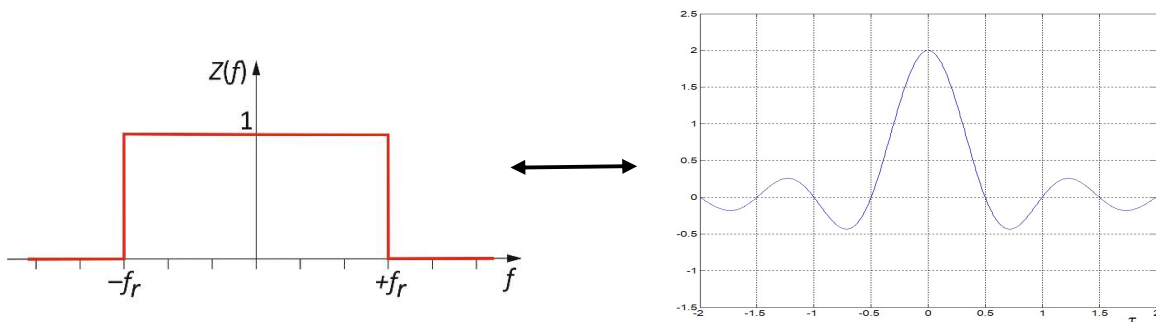
$$\begin{aligned} z(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} Z(f) e^{i2\pi f\tau} df = \int_{-f_r}^{+f_r} e^{i2\pi f\tau} df \\ &= \frac{1}{\pi\tau} \frac{1}{2i} (e^{i2\pi f_r\tau} - e^{-i2\pi f_r\tau}) = \frac{1}{\pi\tau} \sin 2\pi f_r\tau. \end{aligned}$$

$$z(\tau) = \frac{\sin 2\pi f_r\tau}{\pi\tau} = 2f_r \operatorname{sinc}(2\pi f_r\tau)$$

Ovdje je  $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ , funkcija koja se zove **kardinalni sinus**.



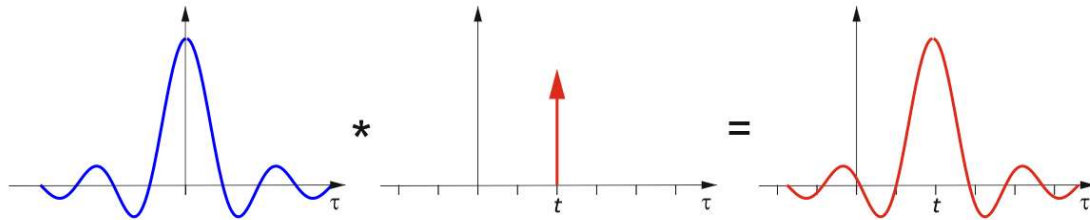
$z(\tau)$  je funkcija sinus frekvencije  $f_r$  modificirana funkcijom  $1/\tau$ . Najviša je u nuli, gdje iznosi  $2f_r$  (jer je  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sinc}(x) = 1!$ ), poprima i pozitivne i negativne vrijednosti, a oscilacije trnu kako  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . Ovo je u spektralnoj analizi jako važna funkcija upravo zbog svoje veze s *boxcar* funkcijom:



**Zapamtimo: Kardinalni sinus i boxcar funkcija su Fourierov par.**

Uočimo i da će za  $f_r \rightarrow \infty$ , karakteristika filtra  $Z(f) \rightarrow 1 \forall f$ , visina funkcije  $z(\tau)$  će rasti u beskonačnost, a njezina širina će se smanjivati prema nuli –  $z(\tau)$  će tada težiti  $\delta$ -funkciji! Ranije smo pokazali da to svojstvo vrijedi i za jedinični pravokutni puls (*boxcar* funkciju) kada  $f_r \rightarrow 0$ .

Iako se zovu ‘idealnim’ (jer ‘idealno’ režu neželjene frekvencije) ovakvi filtri se u praksi rijetko upotrebljavaju. Da vidimo zašto, pogledajmo kako izgleda filtrirana  $\delta$ -funkcija. Izračunajmo, dakle konvoluciju  $z(\tau)$  i  $\delta(\tau)$ :

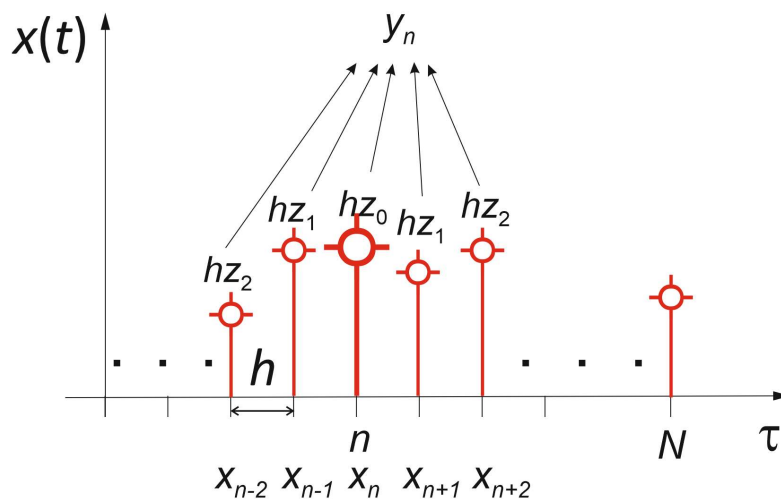


Dakle, idealnim LP filtriranjem  $\delta$ -funkcije, tj. pulsa u  $\tau = t$ , dobije se na istom mjestu kardinalni sinus. Međutim, iako je impuls nastao u  $\tau = t$ , filtrirani signal postoji i *prije* toga vremena, što je, naravno fizikalno nemoguće, dakle signal postoji prije uzroka! To se zove *akauzalnost*, i ona će biti to jače izražena što je filter uži. U praksi ovo može jako smetati – ako je npr. riječ o početku seizmograma, i ako na njega prije analize primijenimo idealni filter da se smanji utjecaj visokofrekventnog šuma, često ćemo nastupno vrijeme potresa pročitati prerano jer će se pokrajnji ekstremi kardinalnog sinusa činiti kao početak potresa.

Vidjeli smo, dakle, da ćemo filtriranje postići pomoću konvolucije mjerenog signala  $x(t)$  i vremenske karakteristike filtra  $z(t)$ :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)x(t - \tau)d\tau.$$

Primijenimo sada taj izraz na diskretne vrijednosti mjerenoga niza:



Neka je naš niz digitaliziran svakih  $h$  sekundi (kasnije ćemo naučiti kako izabrati  $h$ ), i neka se sastoji od  $N$  podataka. Tada općenito, diskretno vrijeme, možemo označiti s  $t = nh$ , dok ćemo  $\tau$  označiti s  $\tau = kh$ .

Sada integral konvolucije možemo pisati u diskretnom obliku, pretvorivši ga u sumu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)x(t - \tau)d\tau \rightarrow y_n = \sum_{k=-M}^{+M} z(kh)x[(n - k)h]h = \sum_{k=-M}^{+M} h z_k x_{n-k} \quad (*)$$

gdje je

$$z_k = \frac{1}{\pi kh} \sin(2\pi f_r kh).$$

Kako je  $z(\tau)$  simetrična funkcija, izraz za  $y_n$  možemo pisati i kao:

$$y_n = h z_0 x_n + \sum_{k=1}^{+M} h z_k (x_{n-k} + x_{n+k}) \quad (**)$$

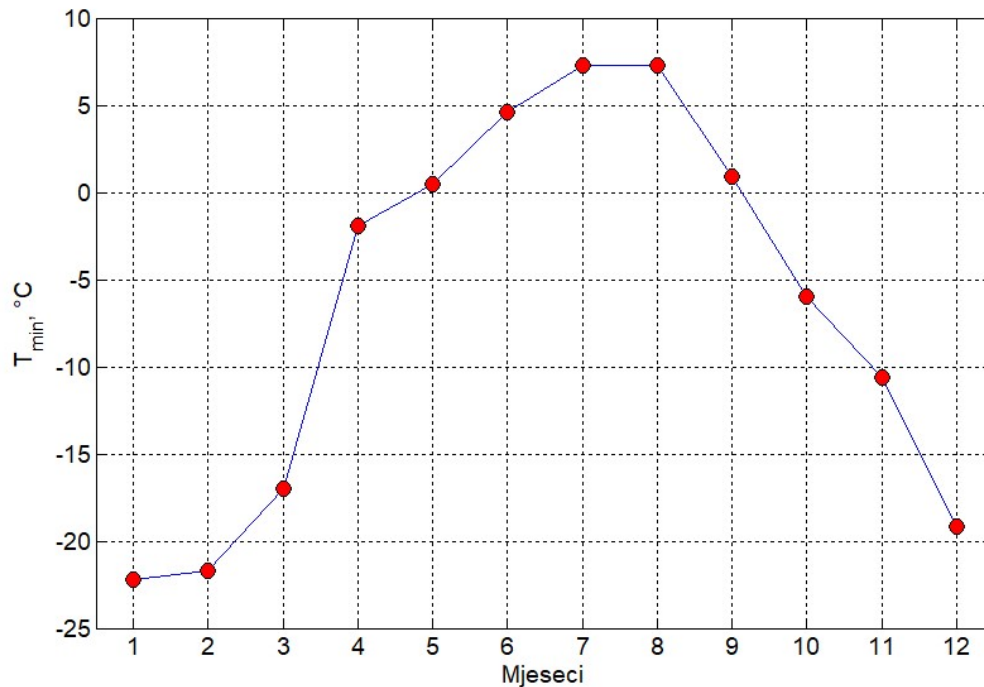
To znači da za svaku filtriranu vrijednost  $y_n$  moramo izračunati sumu (\*\*), a  $y_n$  ovisi o svim izmjerenim vrijednostima  $x_n$ , kako o onima prije vremena  $t = nh$ , tako i onima poslije njega! Ova činjenica 'smeta' filtriranju u realnom vremenu, pa se u tzv. *jednostranoj verziji filtra* koriste samo već dogođeni podaci  $x_{n-k}$ .

Također uočavamo da će broj  $z_k$  ovdje djelovati kao težina za  $x_{n \pm k}$ , pa se zato  $z(\tau)$  često naziva i funkcijom težina. Najveću težinu imat će pri tome, naravno,  $x_n$  [ $k = 0, z_0 = 2f_r$ ], te  $x_{n \pm 1}$  [ $k = 1, z_1 = \frac{1}{\pi h} \sin(2\pi f_r h)$ ]. Broj  $M$  zove se red filtra, i određujemo ga sami vodeći računa o tome da u sumi treba ići toliko daleko da utjecaj daljnjih članova na zbroj možemo zanemariti. Kako kardinalni sinus relativno sporo trne prema nuli, to će i  $M$  morati biti relativno velik, što može znatno usporiti račun. Pošto suma ima konačan broj pribrojnika, to će i  $z$  biti konačan ( $M+1$  član), pa se ovakvi filtri zovu filtrima s *konačnim odzivom na impuls (FIR – Finite Impulse Response)*.

**Zadatak** – Zadane su vrijednosti apsolutnih minimuma temperature po mjesecima u Zagrebu u razdoblju 1862.–1961. (prvih 100 godina rada Meteorološkog opservatorija na Griču):

$t =$	1	2	3	4	5	6
$x(t)$	-22.2	-21.7	-17.0	-1.9	0.5	4.6

$t =$	7	8	9	10	11	12
$x(t)$	7.3	7.3	0.9	-6.0	-10.6	-19.2



Vidimo, kako je i očekivano, oscilaciju dugog perioda (oko 12 mjeseci, na koju su superponirane oscilacije kraćih perioda.

Filtrirajte taj niz:

- idealnim niskopropusnim filtrom koji propušta periode  $T \geq T_r = 6$  mj.
- idealnim visokopropusnim filtrom koji propušta periode  $T \leq T_r = 6$  mj.

Za niskopropusno filtriranje koristit ćete izraz (\*\*), pri čemu je  $h = 1$  mjesec, a  $f_r = 1/6$  mjesec<sup>-1</sup>. Najprije koristite filter 3. reda ( $M = 3$ ), a zatim sve ponovite s filtrom 6. reda ( $M = 6$ ).

Prvo odredite funkciju težina za  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

$$z_k = \frac{1}{\pi k} \sin(2\pi f_r k) = \frac{1}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi}{3} k\right) = \frac{1}{\pi k} \sin(60^\circ k)$$

Molim Vas, pazite na jedinice koje Vaš kalkulator ili program koristi za argument sinusa (stupnjevi ili radijani)!

Npr.  $z_0 = 2f_r = \frac{1}{3} = 0.3333$ ; ...  $z_5 = \frac{1}{5\pi} \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -0.055, \dots$

Sada možete za svaki mjesec ( $n = 1, 2, \dots, 12$ ) izračunati pripadnu filtriranu vrijednost za  $M = 3$  (odnosno  $M = 6$ ).

Npr. za travanj ( $n = 4$ ), i uz  $M = 6$ , imamo:

$$y_4 = z_0 (-1.9) + \sum_{k=1}^6 z_k (x_{4-k} + x_{4+k})$$

Da bismo izračunali sumu moramo znati npr.  $x_{4-6} = x_{-2}$ . To ćemo riješiti tako da pretpostavimo da je zadani niz periodičan pa će biti  $x_0 = x_{12}$ ,  $x_{-1} = x_{11}$ , ...,  $x_{13} = x_1$ , itd.

Kako ćete najjednostavnije provesti visokopropusno filtriranje?

Molim Vas da mi rješenja ovoga zadatka pošaljete e-mailom u obliku kratkog referata, gdje će biti naveden postupak računa, te s nacrtane dvije slike (za  $M = 6$  i  $M = 3$ ) na kojima će biti prikazani ulazni podaci te filtrirani podaci LP i HP filtrima.

Ako ćete to raditi nekim računalnim programom, pokušajte odrediti broj  $M$  nakon kojega nema smisla više ga povećavati, jer se filtrirani nizovi znatno ne razlikuju. Dobrodošao je i ispis programa!

Svatko tko mi pošalje izvješće barem 7 dana prije završnog kolokvija, dobit će na njemu 5 nagradnih bodova (od mogućih 100)!



### *Rekurzivni digitalni filtri. IIR filtri.*

Problem oštih rubova u karakteristici idealnog LP filtra, te posljedično i potreba za mnogo članova u (\*\*), u praksi se rješava nastojeći naći kompromis, tj. takve filtre koji će imati blažu karakteristiku, ali će zato funkcije težina brže opadati prema nuli. Uz to, pokazalo se da je efikasnije filtriranu vrijednost  $y_n$  procijeniti ne samo na temelju podataka  $x_{n-k}$  (u slučaju jednostranog filtra), nego i već izračunatih vrijednosti filtriranog niza,  $y_{n-l}$ . Takvi filtri, koji koriste ne samo ulazne podatke, nego i prethodne vrijednosti filtriranog niza zovu se *rekurzivni filtri*.

Vidjeli smo ranije da su FIR filtri imali konačan broj pribrojnika u izrazu (\*\*). Ako ne ograničimo sume, definirat ćemo tzv. IIR filtre (*Infinite Impulse Response*), odnosno filtre s beskonačno dugim odzivom na impuls:

$$y_n = \sum_{k=0}^{+\infty} z_k x_{n-k}.$$

Korištenje ovakvog izraza u praksi je nemoguće. Zato se ovu jednadžbu može napisati (dokaz prelazi okvire kolegija!) koristeći konačan broj *nula* ( $N_z$ ) i *polova* ( $N_p$ ) pomoću diferencijske jednadžbe s konstantnim koeficijentima:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N_z} b_k x_{n-k} - \sum_{l=1}^{N_p} a_l y_{n-l}.$$

Vidimo da su u prvoj sumi ulazni podaci ( $x$ ), a u drugoj prethodno filtrirani podaci ( $y$ ). Druga suma počinje s  $l = 1$ , jer je 'nulti' podatak upravo  $y_n$  kojega baš računamo. Polovi, dakle, djeluju na izlazne, a nule na ulazne podatke. Kako  $y_n$  sada ovisi ne samo o ulaznom vremenskom nizu  $x$ , nego i o prethodnim vrijednostima filtriranog niza  $y$ , ovo je primjer rekurzivnog filtra. Svi IIR filtri su ujedno i rekurzivni filtri (obrat ne vrijedi). Jednako svi FIR su nerekurzivni filtri.

Ako uključimo  $y_n$  u drugu sumu, možemo pisati:

$$\sum_{k=0}^{N_z} b_k x_{n-k} = \sum_{l=0}^{N_p} a_l y_{n-l}.$$

Korištenjem tzv. jednostrane Z-transformacije  $\{X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}, z(i\omega) = e^{i\omega h}\}$  koja je diskretni ekvivalent Laplaceove transformacije za kontinuirane funkcije, može se pokazati da će karakteristika takvoga filtra biti oblika:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N_z} b_k z^{-k}}{\sum_{l=0}^{N_p} a_l z^{-l}} = \frac{b_0 \sum_{k=1}^{N_z} b_k z^{-k}}{a_0 \sum_{l=1}^{N_p} a_l z^{-l}}.$$

U brojniku i nazivniku ovoga izraza su polinomi redova  $N_z$  i  $N_p$ . Neka su njihova rješenja  $c_k$  i  $d_l$ . Tada polinome možemo rastaviti u faktore:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0(1 - c_1 z^{-1})(1 - c_2 z^{-1}) \dots (1 - c_{N_z} z^{-1})}{a_0(1 - d_1 z^{-1})(1 - d_2 z^{-1}) \dots (1 - d_{N_p} z^{-1})} = z^{N_p - N_z} \frac{b_0 \prod_{k=1}^{N_z} (z - c_k)}{a_0 \prod_{l=1}^{N_p} (z - d_l)}.$$

Može se pokazati da je  $\frac{Y(i\omega)}{X(i\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{Y(z)}{X(z)}$ , pa karakteristiku filtra možemo izraziti kao:

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = K \frac{(i\omega - Z_1)(i\omega - Z_2) \dots (i\omega - Z_{N_z})}{(i\omega - P_1)(i\omega - P_2) \dots (i\omega - P_{N_p})}.$$

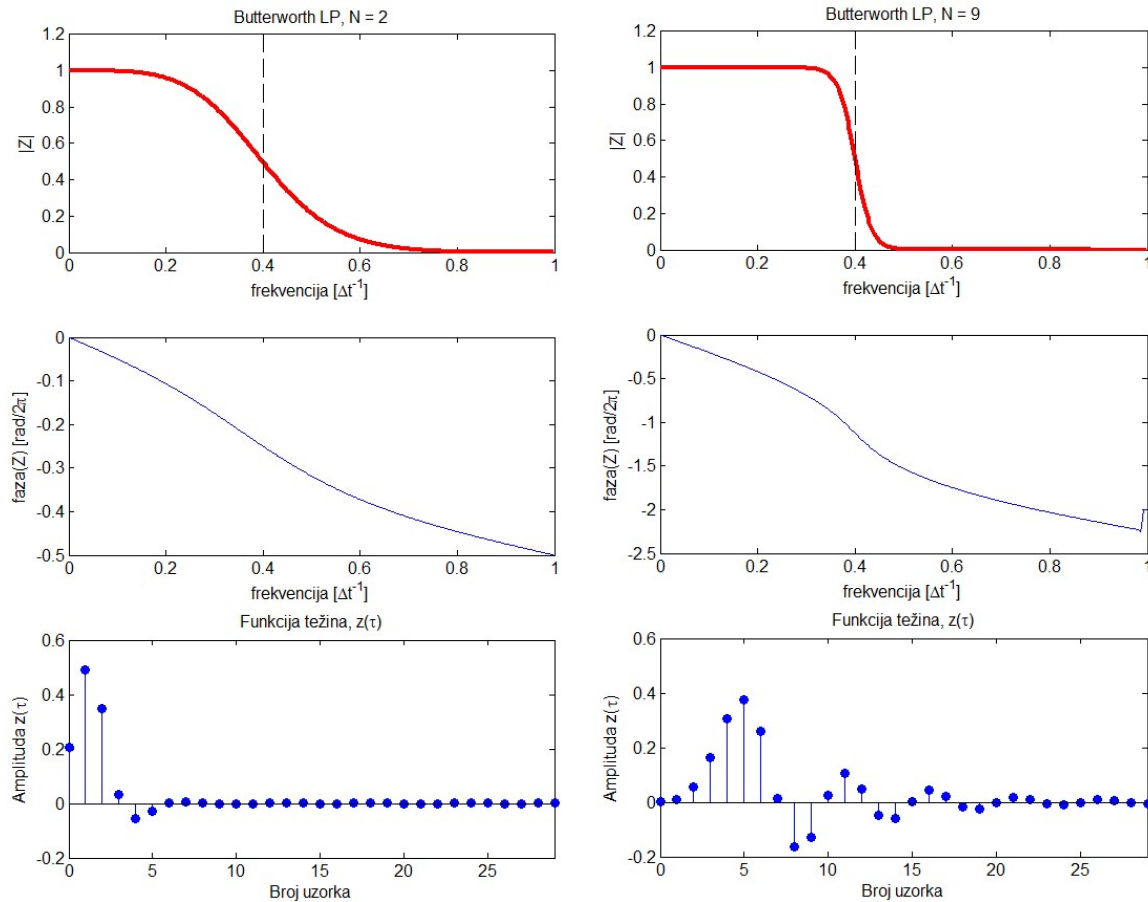
$Z_i$  su nule, a  $P_i$  su polovi toga izraza. To su kompleksne veličine i definiraju odziv IIR filtra reda  $n = \max(N_z, N_p)$ . Detalji izvoda i analiza svojstava Z-transforma nadilaze opseg ovoga uvodnog kolegija. Oni koji žele znati više mogu konzultirati npr. knjige F. Scherbauma (1996), J. Havskova i G. Alguacila (2004), ili pak brojne resurse na internetu.

Primjer često korištenih IIR-filtara, su tzv. Butterworthovi filtri  $n$ -tog reda čija je amplitudna karakteristika  $Z(f)$  za LP-filtar definirana izrazom:

$$|Z(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_r}\right)^{2n}}}.$$

Niskopropusni Butterworthovi filtri imaju  $n$  polova i nemaju nule. Funkcije težina (ili odziv filtra na impuls, *impulse response*),  $z(\tau)$ , za redove  $n = 2$  i  $n = 8$

prikazane su donjim slikama. Na njima je crtkano označena odabrana granična frekvencija  $f_r$  izražena u jedinicama  $\frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{h}$ .

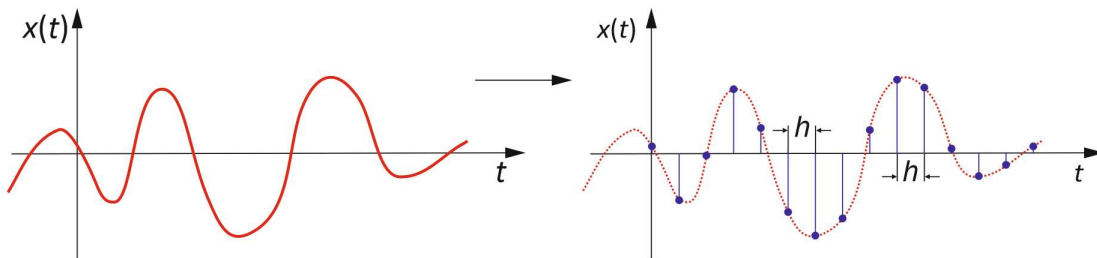


Primijetimo ovdje kako ‘oštrina’ filtra utječe na broj uzoraka (poput  $M$  u (\*\*)) kojima odgovara amplituda  $z(\tau)$  značajno različita od nule. Dok za blagi filtar (reda  $n = 2$ ) amplitude trnu u nulu već za odmak od 5 podataka, ako želimo oštrije filtriranje uz npr.  $n = 8$ , to će se dogoditi za mnogo veći odmak. Također možemo vidjeti da je fazni pomak vrlo izražen, pa ovakvi filtri nisu pogodni ako je važno ne poremetiti fazu među raznim spektralnim komponentama (npr. kod govora ili kod analize disperzivnih signala).

Butterworthovi filtri su među najčešće korištenim IIR filtrima jer im je karakteristika glatka i za niske frekvencije posve ravna krivulja, a strmina prijelaznog pojasa se lagano kontrolira redom filtra. Zbog toga su oni redovito uključeni u sve programske pakete za obradu signala. Osim Butterworthovih najčešće se još koriste Čebiševljevi i Besselovi IIR filtri.

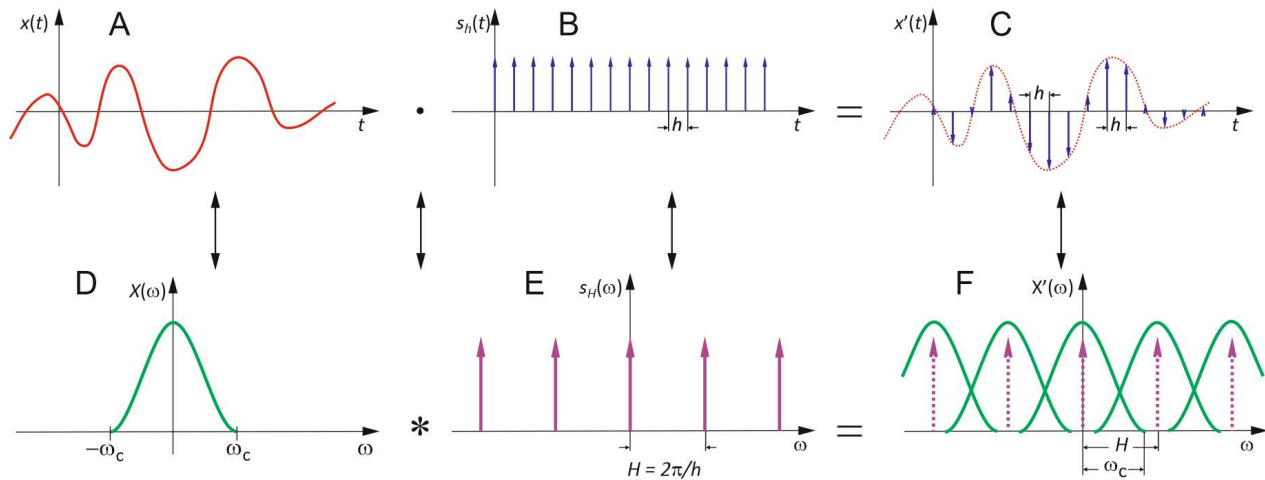
## Teorem o uzorkovanju; *Aliasing*

Prije svake računalne analize vremenskih nizova, analogne vremenske signale ili pojave valja pretvoriti u digitalni oblik – treba ih digitalizirati. Danas to u većini slučajeva rade sami mjerni uređaji, koji u zadanom konstantnom vremenskom intervalu  $h$  uzimaju uzorke predmetne pojave. Takav postupak digitalizacije analognih signala zovemo *uzorkovanje*, a interval  $h$  naziva se *interval uzorkovanja* (engl. *sampling interval*). S time je povezan i pojam učestalosti (frekvencije) uzorkovanja  $f_h = 1/h$  (*sampling frequency*) koja se izražava brojem uzoraka u sekundi, sps (*samples per second*). Često se umjesto sps koristi Hz jer je to frekvencija kojom radi digitalizator dok uzima uzorke.



Ovdje se postavlja pitanje koliki mora biti  $h$ ? Čini se očito da ne smije biti premalen, jer tada uzorci neće dobro predstavljati pojavu. Ne smije biti niti prevelik, jer će tada broj podataka koje valja čuvati i analizirati biti jako velik. Postoji li, dakle, 'optimalni' izbor vrijednosti  $h$  koji ćemo programirati u mjerne instrumente ili ga odabrati pri 'ručnoj' digitalizaciji, po mogućnosti takav da uzorkovanjem (plave točke na gornjoj slici) ne izgubimo nimalo informacija koje nosi analogni, originalni niz?

Da odgovorimo na to pitanje iskoristit ćemo do sada usvojeno znanje. Pretpostavit ćemo da je spektar  $X(\omega)$  vremenskoga niza  $x(t)$  *ograničen*, tj. da postoji takva frekvencija  $\omega_c$  nakon koje su spektralne amplitude jednake nuli [ $X(\omega) = 0, \forall \omega > \omega_c$ ]. Matematički, digitalizaciju možemo opisati množenjem izvornoga niza  $x(t)$  funkcijom češlja s razmakom zubaca  $h$  [svojstvo  $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$ ]. Prikažimo cijeli proces nizom slika:

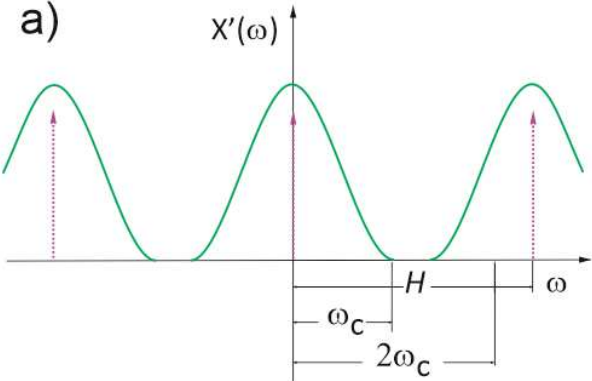
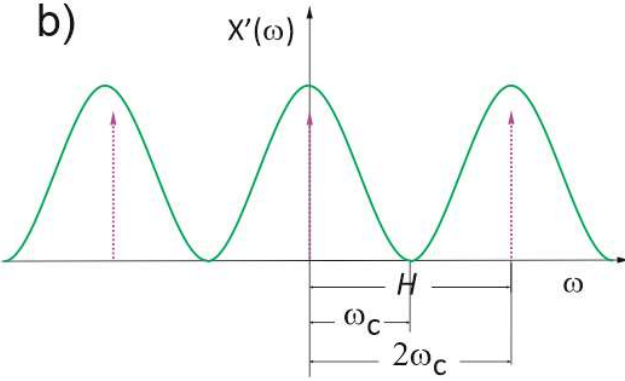
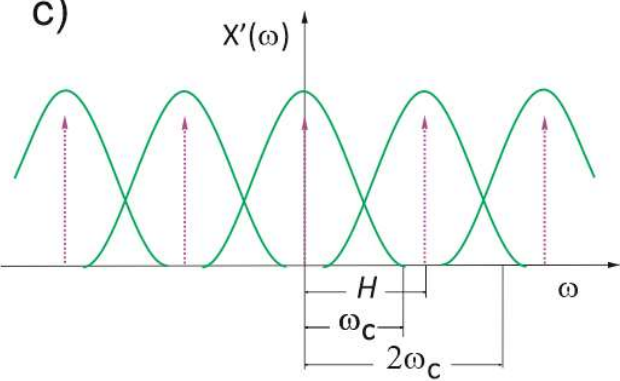


Dakle, vremenski niz (A, crveno) digitaliziramo množenjem s funkcijom češlja sa slike B. Rezultat  $x'(t)$  je niz delta-funkcija od kojih je svaka 'visoka' koliko iznosi  $x(t)$  na tome mjestu. Time smo  $x(t)$  preveli u digitalni oblik.

Sada treba pogledati kakve su posljedice u prostoru frekvencija. Rekli smo da je jedini uvjet da spektar od  $x(t)$  bude ograničen. Njegov oblik nije važan, pa je na slici D prikazan vrlo jednostavan oblik da bude preglednije. Slika D je Fourierov par slike A, što je označeno vertikalnom dvostranom strelicom. Vidjeli smo da množenju u prostoru vremena odgovara konvolucija (oznaka  $*$ ) u prostoru frekvencija. Fourierov par funkcije češlja  $s_h(t)$  na slici B je također funkcija češlja (slika E) s razmakom zubaca  $H = 2\pi/h$ . [Napomena: Ako bismo na osi  $x$  imali frekvenciju  $f$  umjesto kružne frekvencije  $\omega$ , bilo bi  $H = 1/h$ .] Kako konvolucija s  $\delta$ -funkcijom, samo premješta tu funkciju na mjesto  $\delta$ -funkcije, naš spektar će se preslikati na mjesto svakog od zubaca češlja  $s_H(\omega)$  (zeleno na slici F). Sjetimo se još da je

$$s_H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - nH),$$

dakle to je *suma*, pa će i rezultat konvolucije biti *suma* zelenih spektara sa slike F! U slučaju kakav prikazuje slika F, spektar  $X'(\omega)$  bit će vrlo različit od spektra  $X(\omega)$ ! Takav rezultat je posljedica lošega odabira intervala uzorkovanja  $h$ . Razlikujemo tri moguća slučaja:

<p>a)</p> 	$2\omega_c < H,$ $2 \cdot 2\pi f_c < \frac{2\pi}{h}$ $2f_c < \frac{1}{h}$ $h < \frac{1}{2f_c}$
<p>b)</p> 	$2\omega_c = H,$ $f_c = \frac{1}{2h}$ $h = \frac{1}{2f_c}$
<p>c)</p>  <p><i>Zelene spektre valja još i zbrojiti!</i></p>	$2\omega_c > H,$ $f_c > \frac{1}{2h}$ $h > \frac{1}{2f_c}$

U slučaju a) interval uzorkovanja  $h$  manji je od  $1/(2f_c)$ . Spektri se ne preklapaju, a centralni u potpunosti odgovara spektru  $X(\omega)$ . U ovom je slučaju lako jednostavno odbaciti pokrajnje repeticije središnjega spektra, pa će na temelju  $X'(\omega)$  biti moguće rekonstruirati  $X(\omega)$ .

U slučaju b),  $h = 1/(2f_c)$ , pokrajnji spektri se dodiruju, pa nije došlo do preklapanja. Ovo je rubni slučaj u kojemu je još uvijek moguće rekonstruirati izvorni spektar  $X(\omega)$ .

Slučaj c) (također slika F) je onaj koji valja izbjeći – do njega će doći ako odaberemo prevelik interval uzorkovanja, tj. ako bude  $h > 1/(2f_c)$ . U tom će se slučaju pokrajnje repeticije spektara dijelom ili potpuno preklopiti, samim time i zbrojiti (suma nije prikazana gornjom slikom F!), te će spektralna slika biti dijelom ili potpuno uništena. Ovu pojavu zovemo *spektralno preklapanje* ili *aliasing*.

Do *aliasinga* će doći odaberemo li interval uzorkovanja  $h$  koji je veći od recipročne vrijednosti dvostruke najveće frekvencije koju sadrži analizirani signal. Zato možemo zaključiti da je pravilo digitalizacije takvo da moramo signal uzorkovati s *najmanje dvije točke po najkraćem periodu koji postoji u mjerenoj signalu*. S time je u vezi definirana i Nyquistova frekvencija  $f_N$  jednaka

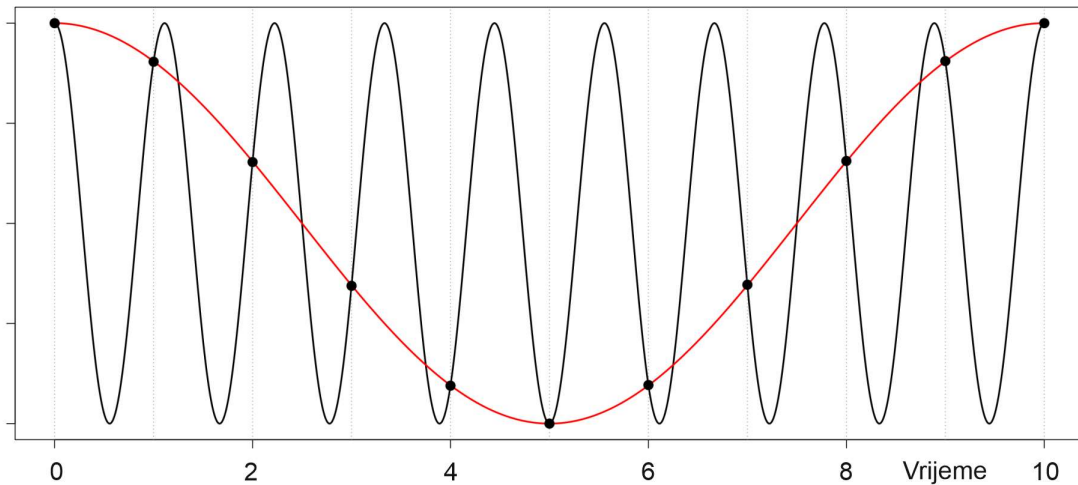
$$f_N = \frac{1}{2h} ,$$

koja ovisi o odabranom intervalu  $h$  i definira najveću frekvenciju koju smije sadržavati analizirani niz ako ga želimo digitalizirati svakih  $h$  sekundi.

Vidimo da će činjenica da smo mjerene kontinuirane podatke diskretizirali rezultirati periodičkim spektrom. Sjetimo se da smo kod periodičkih podataka vidjeli da su im spektri diskretni. Dakle, ako su podaci u jednoj domeni (vrijeme ili frekvencija) diskretni, njihov Fourierov par bit će periodičan – diskretni podaci imaju periodičan spektar, a periodični podaci imaju diskretan spektar!

Također, jasno je da će smisla imati samo spektar za  $|f| < f_c$ , dok ga za frekvencije izvan toga intervala uvijek moramo zanemariti.

Pogledajmo primjer na donjoj slici. Prikazuje kosinusoidu perioda  $T_1 = 1.11$  s (frekvencije  $f_1 = 0.9$  Hz, crna krivulja). Crnim točkama označeni su uzorci uzeti svakih  $h = 1.0$  s. Prema do sada naučenom to nije dovoljno gusto – trebalo bi uzorkovati s *najmanje* 2 uzorka po periodu, dakle s  $h \leq 1/(2 \times 0.9) = 0.556$  s.



Posljedica toga je da računalo koje izvršava Fourierovu transformaciju kroz te točke može provući kosinus perioda 1.11 s (crno), ali i kosinusoidu jednake amplitude i perioda  $T_2 = 10$  s (crveno), odnosno frekvencije  $f_2 = 0.1$  Hz! Zato će i u spektru ta nepostojeća amplituda biti pribrojena pravoj amplitudi na  $T = 10$  s (ako postoji signal na  $T = 10$  s). Taj, nepostojeći signal (crveno), zove se *alias* (lažnjak?) pravog signala.

Općenito, postoji pravilo da će izračunata spektralna amplituda  $X(f)$  biti suma amplituda  $X(2nf_N \pm f)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  U našem primjeru  $f_N = \frac{1}{2h} = \frac{1}{2}$  Hz. Tako će na mjestu  $X(0.1)$  biti zapravo zbrojene amplitude  $X\left(2n\frac{1}{2} \pm 0.1\right)$ , tj. spektralne amplitude  $X(0.1) + X(1.0 \pm 0.1) + X(2.0 \pm 0.1), \dots = X(0.1) + X(0.9) + X(1.1) + X(1.9) + X(2.1) + \dots$ , dok ćemo umjesto  $X(0.9)$  dobiti  $X(0.9) + X(1.0 \pm 0.9) + X(2.0 \pm 0.9), \dots = X(0.9) + X(0.1) + X(1.9) + X(1.1) + X(2.9) + \dots$ . Vidimo da ne samo da se kroz uzorkovane točke može provući i kosinus frekvencije 0.1 Hz, nego će kroz njih točno prolaziti i kosinusi frekvencija 1.9 Hz, 1.1 Hz, 2.9 Hz, ...! [Provjerite to u Matlabu ili kojem drugom programskom paketu!].



Dakle, ako želimo da izračunati  $X'(f)$  bude jednak  $X(f)$ , moraju sve komponente u  $\sum X(2nf_N \pm f)$  za  $n \neq 0$  biti jednake nuli. Primjerice, pretpostavimo interval uzorkovanja  $h = 1/10 \text{ s} = 0.1 \text{ s}$ . Tada je  $f_n = 1/(2h) = 5 \text{ Hz}$ , pa u signalu ne smiju postojati frekvencije veće od 5 Hz. Što ako nije tako?

Kolika će biti izračunata spektralna amplituda za:

a)  $f = 1.0 \text{ Hz}$ ,

b)  $f = 4.9 \text{ Hz}$  i

c)  $f = 5.1 \text{ Hz}$ ?

a) Umjesto  $X(1)$  dobit ćemo  $X(1) + X(10 \pm 1) + X(20 \pm 1) + \dots + X(2nf_N \pm f)$   
 $= X(1) + X(9) + X(11) + X(19) + X(21) + \dots$

Dakle, ako budu svi  $X(f \geq 9) = 0$ , naš će zahtjev biti ispunjen.

b) Umjesto  $X(4.9)$  dobit ćemo  $X(4.9) + X(10 \pm 4.9) + X(20 \pm 4.9) + \dots$   
 $= X(4.9) + X(5.1) + X(14.9) + \dots$

Ovdje, dakle, već svi  $X(f \geq 5.1)$  moraju biti jednaki nuli.

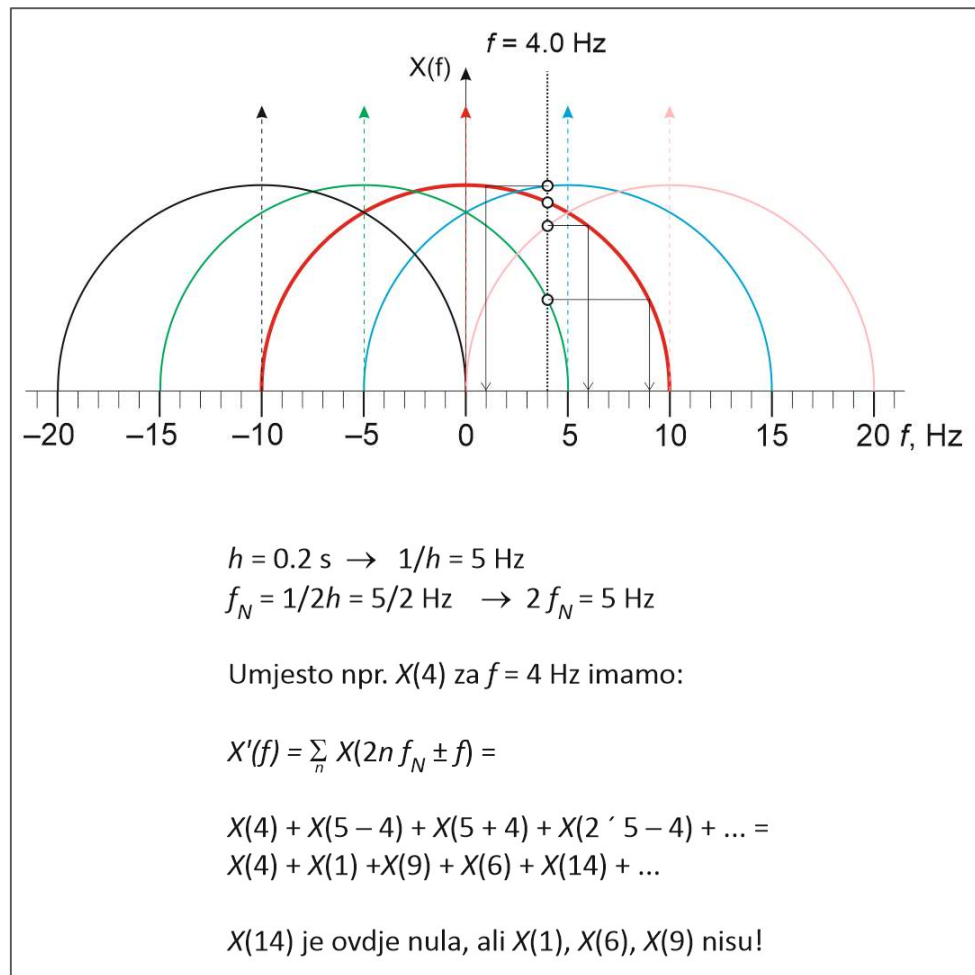
c) Umjesto  $X(5.1)$  dobit ćemo  $X(5.1) + X(10 \pm 5.1) + X(20 \pm 5.1) + \dots$   
 $= X(5.1) + X(4.9) + X(15.1) + \dots$

Ako bismo željeli da je amplituda  $X(5.1)$  smisljena (uz uzorkovanje od  $h = 0.1 \text{ s}$ ), morala bi jednaka nuli biti amplituda  $X(4.9)$  kao i  $X(15.1)$ ...!

Vidimo da ćemo smisljeni spektar dobiti samo ako *ispravno procijenimo* najveću frekvenciju u mjerenom signalu.

Pogledajmo tvrdnju da će se u konačnom spektru superponirati spektralne amplitude  $X(2nf_N \pm f)$  i grafički.

Na donjoj je slici prikazan pravi spektar analiziranog signala **crvenom** linijom. On je ograničen, i sadrži samo frekvencije  $|f| < 10$  Hz. Recimo da smo pripadni vremenski niz uzorkovali svakih  $h = 0.2$  s. Jasno je da je to znatno prevelik interval digitalizacije (trebao bi biti  $h < 1/20$  Hz = 0.05 s), pa će se preko pravoga spektra, preklopiti više od jedne njegove pokrajnje repeticije ( $H = 1/h = 5$  Hz).

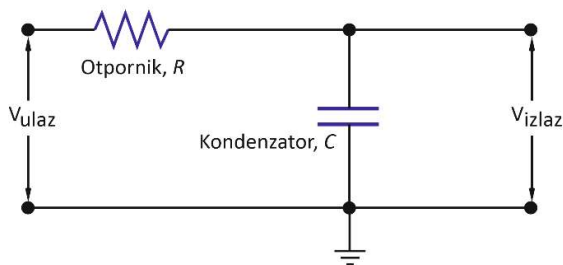


Pogledajmo primjer za  $f = 4$  Hz. Sa slike se vidi da će se na mjestu  $f = 4$  Hz superponirati u ovom slučaju još tri pokrajnja spektra. Njihove amplitude označene su kružićima. Prvi desni preklopljeni spektar (**plavi**) na mjestu  $f = 4$  imat će amplitudu jednaku  $X(1)$  (pratite strelicu!), prvi lijevi (**zeleni**) 'donosi' amplitudu jednaku  $X(9)$ , dok će drugi preklopljeni spektar s desna (**ružičasti**) na tom mjestu biti visok  $X(6)$ . U promatranom će slučaju dakle umjesto  $X(4)$  rezultat biti  $X(4) + X(1) + X(9) + X(6)$ , što odgovara iznosima koje predviđa formula  $X(2nf_N \pm f)$ .

*Aliasing* je nužno izbjeći u svakom slučaju. Kako to sigurno napraviti?  $h$  možemo pouzdano dobro odabrati samo ako možemo razumno pretpostaviti kolika je najveća frekvencija  $f_c$  u vremenskom nizu. To možemo učiniti ako dobro poznajemo signal o kojem se radi ( $h_{max} = 1/2f_c$ ), ali ćemo za svaku sigurnost  $h$  još ponešto smanjiti. Za kontrolu, pogledat ćemo kako izgleda izračunati spektar  $X'(f)$  – ako je središnji (pravi) spektar jasno odijeljen od pokrajnjih replikacija (kako je prikazano u slučaju a) u tablici nekoliko stranica prije), vrlo vjerojatno je  $h$  dobro određen.

Takav pristup, međutim, može se primijeniti samo ako na raspolaganju već imamo analogni signal. U praksi, uzorkovanje se mora obavljati pri akviziciji podataka u mjernom instrumentu (magnetometru, seizmografu, anemometru, mareografu...). Kako nas često interesira samo ograničeni frekventni pojas, signal će analogno-digitalni (A/D) pretvornik u instrumentu tijekom mjerenja morati *prije* uzorkovanja filtrirati tako da se odbace frekvencije veće od najveće frekvencije od interesa. Očito je da se za to ne mogu koristiti digitalni filtri, pa se za to rabe analogni, tzv. *anti-aliasing* filtri.

Donja shema prikazuje shemu niskopropusnog filtra – sastoji se samo od jednog otpornika i jednog kondenzatora. Granična frekvencija (*cut-off frequency*) iznosi



$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad \text{ili} \quad \omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

Vrijeme  $\tau$  je vrijeme koje treba kondenzatoru da se isprazni preko otpornika. Kako smo vidjeli, karakteristika filtra prvog reda je vrlo blaga (20dB/dekadi za  $f > f_c$ ), pa se često rabe filtri drugog reda koji se dobiju tako da se spoje dva filtra prvog reda. Ovakvi filtri unose i znatni fazni pomak. Moderni A/D pretvornici zato signal najprije interno uzorkuju s vrlo malim intervalom  $h' \ll h$  (*oversampling*) kako bi se sačuvao frekventni sastav i dinamički raspon pojave, a onda se signal propušta kroz odgovarajući *digitalni anti-aliasing* LP-

filtar, te se decimira (*downsampling*) uz usrednjavanje uzoraka na željeni  $h$ . Taj postupak također doprinosi smanjenju šuma digitalizacije.

*Zadaci za vježbu:*

Trešnja tla za vrijeme potresa sadrži frekvencije do 30 Hz.

- Koliki smije biti najveći interval uzorkovanja na digitalizatoru da spektar zabilježenog seizmograma bude točno izračunat za sve frekvencije?
- Za koji najmanji interval uzorkovanja neće spektar biti točan niti na jednoj frekvenciji?
- Za koje će frekvencije spektar biti točan ako je digitalizacija provedena svakih  $1/40$  sekundi?

Uputa za b) i c): Skicirajte spektre koje ćete dobiti u svakom slučaju (izračunajte razmak zubaca, pa time i pokrajnjih repeticija spektra u prostoru frekvencija) i zaključite o stupnju preklapanja uzevši u obzir širinu prvog spektra.

### *Nyquist-Shanonov teorem o uzorkovanju*

Nyquist-Shanonov teorem o uzorkovanju (*sampling theorem*) glasi:

Svaka funkcija  $x(t)$  s pojasno ograničenim spektrom ( $|f| < f_c$ ) *potpuno* je određena nizom ekvidistantnih točaka na razmaku  $h = \pi/\omega_c = 1/2f_c$ , te vrijedi:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x_n \sin(\omega_c t - n\pi)}{\omega_c t - n\pi} .$$

*Dokaz* – Zbog ograničenosti spektra vrijedi:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega .$$

Kako je  $t = nh = n\pi/\omega_c$ ,  $x_n = x(nh)$  bit će:

$$x_n = x\left(n\frac{\pi}{\omega_c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} X(\omega) e^{in\pi\omega/\omega_c} d\omega. \quad (*)$$

Razvijmo sada  $X(\omega)$  (za koji sada znamo da je periodičan!) u Fourierov red (sada je to u prostoru frekvencija!) u intervalu  $(-\omega_c, \omega_c)$ . Ovih  $2\omega_c$  sada ima ulogu 'osnovnog perioda':

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-in\pi\omega/\omega_c} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-in\pi\omega/\omega_c}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Fourierov red u } t: \\ x(t) = \sum \alpha_n e^{in\omega_0 t} \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Fourierov red u } \omega: \\ X(\omega) = \sum A_n e^{-inT_0\omega} \\ T_0 = \frac{2\pi}{2\omega_c} = \frac{\pi}{\omega_c} \end{array} \right],$$

gdje je  $A_n$  definiran po analogiji sa slučajem vremenskoj domeni:

$$A_n = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} X(\omega) e^{-in\pi\omega/\omega_c} d\omega. \quad (**)$$

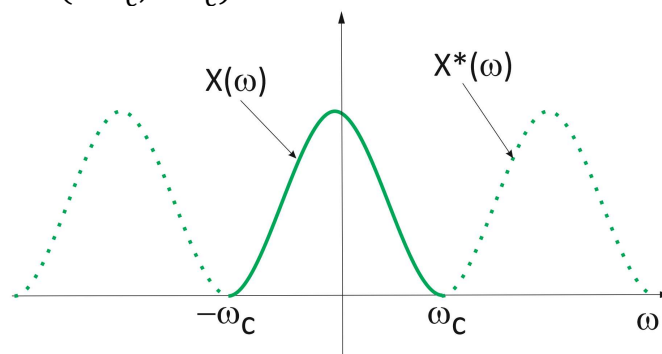
Usporedimo sada (\*) s (\*\*). Slijedi:

$$A_n = \frac{\pi}{\omega_c} x_n.$$

Suma

$$X^*(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_c} x_n e^{-in\pi\omega/\omega_c}$$

je periodička repeticija od  $X(\omega)$  (to je svojstvo Fourierovog reda!), i jednaka je  $X(\omega)$  u intervalu  $(-\omega_c, +\omega_c)$ .



Očito je da  $X(\omega)$  možemo dobiti množenjem  $X^*(\omega)$  *boxcar* funkcijom  $B_{\omega_c}$  širine  $2\omega_c$ .

$$X(\omega) = B_{\omega_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_c} x_n e^{-in\pi / \omega_c} \quad (***)$$

Nadimo sada Fourierov par od (\*\*\*). Fourierova transformacija od  $B_{\omega_c}$  je kardinalni sinus:

$$B_{\omega_c}(\omega) \leftrightarrow \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}.$$

Fourierova transformacija od  $\delta(t - t_0)$  je:

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = \{\text{svojstvo C}\} = e^{-i\omega t_0},$$

pa je:

$$\frac{\pi}{\omega_c} e^{-\frac{in\pi}{\omega_c} \omega} x_n \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} \delta\left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right) x_n.$$

Fourierov par od (\*\*\*) je dakle suma konvolucija

$$(***) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} * \frac{\pi}{\omega_c} \delta\left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right) x_n.$$

Kako konvolucija bilo koje funkcije s  $\delta$ -funkcijom samo pomiče tu funkciju na mjesto  $\delta$ -funkcije, imamo:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\pi}{\omega_c} \frac{\sin \omega_c \left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right)}{\pi \left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin(\omega_c t - n\pi)}{\omega_c t - n\pi},$$

čime je dokaz proveden!

Dakle, na temelju *diskretnih* točaka  $x_n$  možemo rekonstruirati vrijednosti  $x(t)$  za svaki  $t$ , čak i između uzoraka!

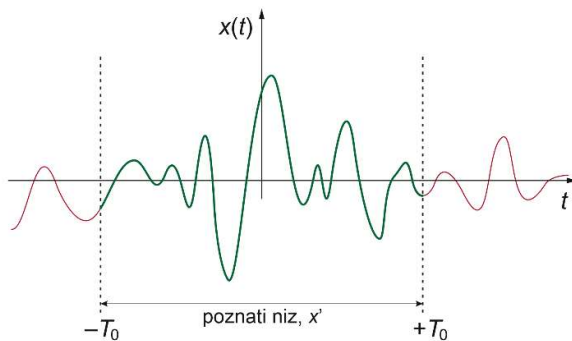
Ovaj teorem se može slično izvesti i u prostoru frekvencija:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\pi}{T}n\right) \frac{\sin(\omega T - n\pi)}{\omega T - n\pi},$$

i vrijedi za vremenski ograničen niz:  $x(t) = 0, |t| > T$ . Sada je spektar jednoznačno određen iz spektralnih amplituda na razmaku  $\pi/T$ .

*Kakva je posljedica činjenice da uvijek poznajemo vremenski niz konačnog trajanja?*

Jasno je da će naše ograničeno poznavanje vremenske pojave (od početka do kraja mjerenja) morati negativno utjecati na račun Fourierove transformacije u kojoj se integriranje proteže u beskonačnost. Kakvu ćemo, dakle, pogrešku napraviti zamijenivši beskonačne granice konačnima?



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$X'(\omega) = \int_{-T_0}^{+T_0} x'(t)e^{-i\omega t} dt$$

Promotrimo to na najjednostavnijem primjeru. Neka je  $x(t) = \cos \omega_0 t$ . Spektar kosinusa znamo, to je:

$$X(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

Neka sada taj kosinus poznajemo samo u intervalu  $[-T_0, +T_0]$ . To ćemo matematički izraziti množenjem s *boxcar* funkcijom  $b_{T_0}$  širine  $2T_0$ :

$$x'(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T_0 \\ 0 & |t| > T_0 \end{cases} \quad \text{odnosno: } x'(t) = x(t) b_{T_0}(t).$$

Općenito se funkcija kojom množenjem modificiramo mjereni niz zove *funkcija modifikacije* (*window function*). Ovdje je to *boxcar*,  $b_{T_0}(t)$ .

Kako izgleda spektar od  $x'(t)$ ?

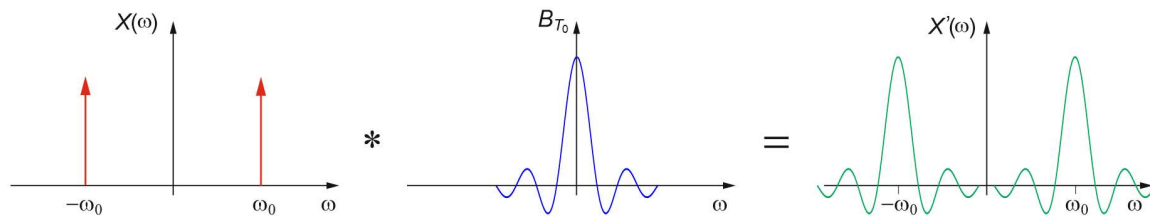
$$\begin{array}{ccccccc} x'(t) & = & x(t) & \times & b_{T_0}(t) & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ X'(\omega) & = & X(\omega) & * & B_{T_0}(\omega) & & \end{array}$$

$B_{T_0}(f)$  je spektar *boxcar* funkcije. Znamo da je to kardinalni sinus:

$$B_{T_0}(f) = \int_{-T_0}^{+T_0} 1 e^{-i2\pi f t} dt = \frac{\sin 2\pi f T_0}{\pi f}.$$

(Ovo je sada kardinalni sinus u području frekvencija,  $T_0$  ima ulogu koju je prije imala granična frekvencija  $f_c$ !)

Spektar naše mjerene (modificirane) funkcije bit će dakle jednak konvoluciji spektra kosinusa,  $X(\omega)$  i kardinalnog sinusa:



Dakle, umjesto dva šiljka, kao spektar dobili smo dva kardinalna sinusa. Oni će biti to bliže  $\delta$  funkciji što je  $T_0$  veći. Za kratka vremena mjerenja imamo problem jer će spektri biti vrlo nereprezentativni za mjerenu pojavu. Istina, središnji maksimum funkcije *sinc* će biti na pravom mjestu, ali će znatna energija prividno 'iscuriti' (*spectral leakage*) u pokrajnje ekstreme. Kao i kod idealnog filtra, i ovdje je to posljedica oštarih rubova *boxcar* funkcije. Ako nismo u mogućnosti produljiti vrijeme mjerenja, postoji li način da smanjimo pokrajnje maksimume spektra funkcije modifikacije?

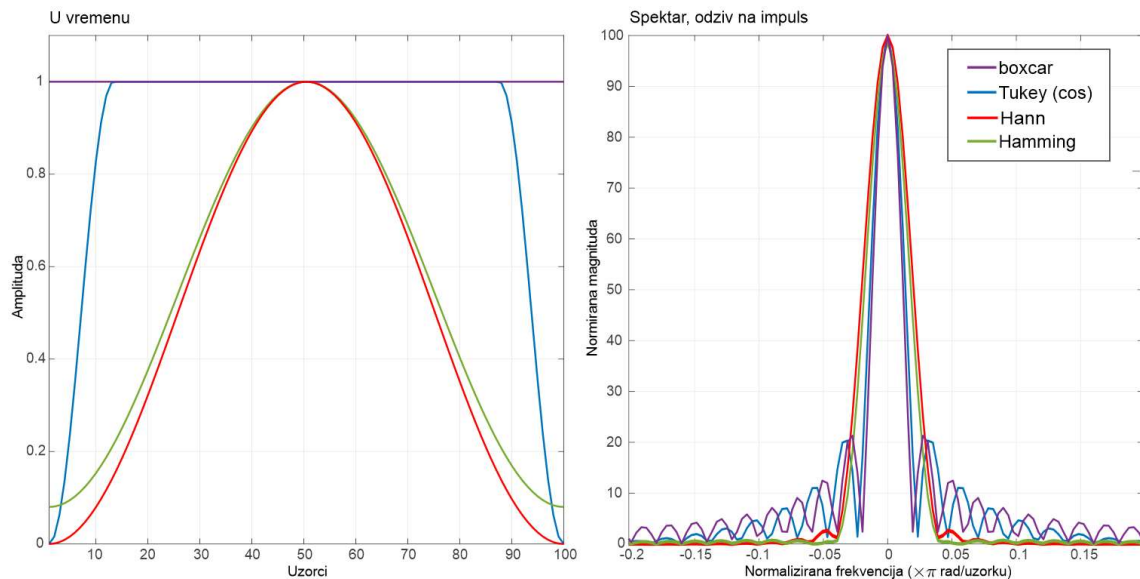
Postoji, ako smo spremni žrtvovati 'oštrinu' središnjeg šiljka. Tako u praksi postoji desetak funkcija modifikacije kojima možemo zamijeniti *boxcar* funkciju. Među najčešće korištene spadaju:



*Hammingova funkcija modifikacije (Richard Hamming):*

$$b_{Ham}(t) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos \frac{\pi t}{T_0}, & |t| \leq T_0, \\ 0, & |t| > T_0 \end{cases}$$

Ova je funkcija prikazana zelenim linijama na donjoj slici. Vidi se da je njezin središnji šiljak nešto širi od onoga kod *boxcar* funkcije, ali su zato pokrajnji ekstremi znatno manji.



Sličan efekt ima i *Hannova funkcija modifikacije (Julius von Hann):*

$$b_{Han}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi t}{T_0} \right), & |t| \leq T_0, \\ 0, & |t| > T_0 \end{cases},$$

ali je curenje energije nešto veće nego kod Hammingove modifikacije. Prikazana je crvenom linijom na slici. U praksi će se često, valjda zbog sličnosti imena s Hammingovom funkcijom, naći naziv *Hanning window*...

Čest je i tzv. Tukey-ev prozor (*Tukey tapering, cosine tapering*), gdje se prvih i zadnjih  $p$  % (obično je to oko 20%) signala množi kosinusnom funkcijom kako bi se ublažili oštri počeci i završeci. Na slici je prikazana plavom bojom, a najviše se primjenjuje kod relativno dugačkih mjerenja, između ostalog i zato da bismo bili sigurni da će niz početi i završiti u nuli. Slika pokazuje da je njezin

efekt, ovisno o odabiru  $p$ , sličan *boxcar* funkciji, ali se povećanjem  $p$  približava ostalim funkcijama modifikacije.

Ovakvo modificiranje mjerenih vremenskih nizova u praksi je vrlo poželjno i treba ga provoditi praktički uvijek prije računanja Fourierovih transformacija. Svi programski paketi koji podržavaju spektralnu analizu imat će već ugrađene rutine koje će, nakon uklanjanja trenda, još i automatski modificirati mjereni niz odabranom funkcijom modifikacije.