2 Jordanova forma

2.1 Nilpotentni operatori

Definicija. Neka je V vektorski prostor. Operator $N \in L(V)$ je *nilpotentan indeksa* p ($p \in \mathbb{N}$) ako vrijedi $N^p = 0$, $N^{p-1} \neq 0$.

Propozicija. Ako je $e \in V$ takav da je $N^{p-1}e \neq 0$, onda je $\{N^{p-1}e, \dots, Ne, e\}$ linearno nezavisan skup.

Korolar. Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor, $\dim V = n$. Ako je $N \in L(V)$ nilpotentan indeksa $\operatorname{ind} N = n$ i ako je $e \in V$ takav da je $N^{n-1}e \neq 0$, onda je $(N^{n-1}e, \dots, Ne, e)$ baza prostora V. Zovemo je *ciklička baza za operator* N i u njoj N ima matricu

$$N(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Uočimo $N^2(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \dots, N^{n-1}(e) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$

Propozicija. Ako je $N \in L(V)$ nilpotentan indeksa $\operatorname{ind} N = n = \dim V$ i ako je $A \in L(V)$ takav da je $AN = NA$, onda postoji polinom $p(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ takav da je $A = p(N)$. Drugim riječima, svi operatori koji komutiraju s N su polinomi od N.

Propozicija. Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{K}$, $\dim V = n$.

(a) Ako je $N \in L(V)$ nilpotentan indeksa p, onda je $k_N(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$, $\mu_N(\lambda) = \lambda^p$, $\sigma(N) = \{0\}$.

(b) Ako je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ i ako za $N \in L(V)$ vrijedi $\sigma(N) = \{0\}$, onda N mora biti nilpotentan.

Korolar. Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor, $\dim V = n$. Ako je $N \in L(V)$ nilpotentan indeksa p, onda je $p \leqslant n$, tj. uvijek je

$$\operatorname{ind} N \leqslant \dim V.$$

Zadatak 1. Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor, $\dim V = n > 1$. Ako je $A \in L(V)$ nilpotentan i $\operatorname{ind} A = n$, dokažite da ne može postojati $B \in L(V)$ za koji bi vrijedilo $B^2 = A$.

Zadatak 2. Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor, $N \in L(V)$ nilpotentan, $\operatorname{ind} N = p$. Definirajmo operator $T \in L(L(V))$ formulom $T(A) := NA - AN$, $A \in L(V)$. Dokažite da je T nilpotentan indeksa $\operatorname{ind} T \leqslant 2p - 1$.

Zadatak 3. Neka operator $B \in L(V)$ ima u nekoj bazi $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ od V matrični prikaz

$$B(e) = \begin{bmatrix} -3 & -5 & -9 \\ 9 & 3 & 9 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dokažite da je B nilpotentan operator indeksa 3 i nađite jednu cikličku bazu za operator B.

Zadatak 4. Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor, $\dim V = n$. Neka je $N \in L(V)$ nilpotentan, $\operatorname{ind} N = n$ i neka je $A \in L(V)$, $AN = NA$. Dokažite da je $\det(A + N) = \det A$.

Zadatak 5. Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$ nilpotentan. Odredite indeks nilpotentnosti operatora A ako je $\operatorname{ind} A^3 = 4$, $\operatorname{ind} A^2 = 5$.

Teorem. (Osnovni teorem o redukciji nilpotentnog operatora indeksa manjeg od $\dim V$**)** Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{K}$, $N \in L(V)$ nilpotentan, $\operatorname{ind} N = p < n = \dim V$. Tada postoje potprostori V_1, ..., $V_m \leqslant V$ takvi da je

$$\dim V \geqslant \dim V_1 \geqslant \ldots \geqslant \dim V_m \geqslant 1$$

koji su N-invarijantni (tj. $NV_i \subseteq V_i$) i takvi da je

$$V = V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_m$$

i inducirani operatori $N_i := N|_{V_i}$ su nilpotentni s indeksima $\operatorname{ind} N_i = \dim V_i$. Ako se u navedenom rastavu k-dimenzionalan potprostor pojavljuje n_k puta, onda je

$$\begin{aligned} n_k &= \mathrm{r}(N^{k+1}) + \mathrm{r}(N^{k-1}) - 2\mathrm{r}(N^k) \\ &= 2\mathrm{d}(N^k) - \mathrm{d}(N^{k-1}) - \mathrm{d}(N^{k+1}) \\ &= 2d_k - d_{k-1} - d_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ukupan broj potprostora u navedenom rastavu je $m = \mathrm{d}(N)$.

Uočimo: $n_p = \mathrm{r}(N^{p+1}) + \mathrm{r}(N^{p-1}) - 2\mathrm{r}(N^p) > 0$ jer $N^{p-1} \neq 0$ i $N^p = 0$. Dakle, u gornjem rastavu se pojavljuje p-dimenzionalan potprostor.

Uzmemo li u potprostoru V_j ciklički vektor e_j i pomoću njega izgradimo bazu

$$N_j^{\dim V_j - 1} e_j,\ N_j^{\dim V_j - 2} e_j, \ldots,\ N_j e_j,\ e_j$$

prostora V_j (uočite da je to isto što i $N^{\dim V_j - 1} e_j,\ N^{\dim V_j - 2} e_j, \ldots,\ N e_j,\ e_j$), dobivamo da za nilpotentan operator N postoji baza (e) od V takva da je $N(e)$ kvazidijagonalna matrica. Na dijagonali blok matrice $N(e)$ nalaze se elementarne Jordanove klijetke reda $\dim V_j$, tj. matrice oblika

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{\dim V_j \times \dim V_j}.$$

Tu bazu nazivamo *Jordanova baza* nilpotentnog operatora N. Kvadratnu matricu J zovemo *Jordanovom klijetkom* ako je J dijagonalna blok-matrica s elementarnim klijetkama na dijagonali. Pored toga, redovi klijetki koju su u J na dijagonali ne rastu kada idemo po dijagonali iz lijevog gornjeg kuta u desni donji kut matrice.

Matrica J ima sve elemente jednake nuli osim možda nekih elemenata na gornjoj sporednoj dijagonali koji su jednaki 1. Na gornjoj sporednoj dijagonali u J dolazi najprije $\dim V_1 - 1$ jedinica, pa jedna nula, onda $\dim V_2 - 1$ jedinica, pa jedna nula, i tako dalje do $\dim V_m - 1$ jedinica.

Primjer.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(n = 5,\ m = 2;\ \dim V_1 = 3,\ \dim V_2 = 2)$

Zadatak 6. Operator $B \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je svojim matričnim prikazom u bazi (e) sa

$$B(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pokažite da je B nilpotentan, odredite mu indeks i Jordanovu klijetku.

Zadatak 7. Operator $N \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je svojim matričnim prikazom u kanonskoj bazi (e) sa

$$N(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pokažite da je N nilpotentan, odredite mu indeks, Jordanovu klijetku i jednu njegovu Jordanovu bazu.

Opći postupak za pronalaženje Jordanove baze nilpotentnog operatora indeksa p:

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathrm{Ker} N^p \dot{-} \mathrm{Ker} N^{p-1} & u_1, \dots, u_a & & & & & \\
\mathrm{Ker} N^{p-1} \dot{-} \mathrm{Ker} N^{p-2} & N u_1, \dots, N u_a & v_1, \dots, v_b & & & & \\
\mathrm{Ker} N^{p-2} \dot{-} \mathrm{Ker} N^{p-3} & N^2 u_1, \dots, N^2 u_a & N v_1, \dots, N v_b & w_1, \dots, w_c & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
\mathrm{Ker} N^2 \dot{-} \mathrm{Ker} N & N^{p-2} u_1, \dots, N^{p-2} u_a & N^{p-3} v_1, \dots, N^{p-3} v_b & N^{p-4} w_1, \dots, N^{p-4} w_c & \dots & y_1, \dots, y_d & \\
\mathrm{Ker} N \dot{-} \{0\} & N^{p-1} u_1, \dots, N^{p-1} u_a & N^{p-2} v_1, \dots, N^{p-2} v_b & N^{p-3} w_1, \dots, N^{p-3} w_c & \dots & N y_1, \dots, N y_d & z_1, \dots, z_e
\end{array}$$

Jordanova baza izgleda ovako:

$$\left\{ N^{p-1} u_1, N^{p-2} u_1, \dots, N u_1, u_1, \dots, N^{p-1} u_a, \dots, N u_a, u_a, \dots, N y_1, y_1, \dots, N y_d, y_d, z_1, \dots, z_e \right\}$$

Primjer.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{d}(N) = m = 4$ (ukupno 4 bloka); $\dim V_1 = 4$, $\dim V_2 = 3$, $\dim V_3 = 1$, $\dim V_4 = 1$

$$\begin{array}{rllll} \mathrm{Ker}(N^4) \dot{-} \mathrm{Ker}(N^3) & f_4 & & & \\ \mathrm{Ker}(N^3) \dot{-} \mathrm{Ker}(N^2) & f_3 & f_7 & & \\ \mathrm{Ker}(N^2) \dot{-} \mathrm{Ker}(N) & f_2 & f_6 & & \\ \mathrm{Ker}(N) \dot{-} \{0\} & f_1 & f_5 & f_8 & f_9 \end{array}$$

Prvo nađemo najveći linearno nezavisan skup vektora u $\mathrm{Ker}(N^4) \backslash \mathrm{Ker}(N^3)$, ovdje $\{f_4\}$.
Zatim $f_3 = Nf_4$, $f_2 = Nf_3$, $f_1 = Nf_2$.
Skup $\{f_3\}$ nadopunimo do najveég linearno nezavisnog skupa $\{f_3, f_7\}$ u $\mathrm{Ker}(N^3) \backslash \mathrm{Ker}(N^2)$.
Zatim $f_6 = Nf_7$, $f_5 = Nf_6$.
Skup $\{f_2, f_6\}$ već jest najveći linearno nezavisan skup u $\mathrm{Ker}(N^2) \backslash \mathrm{Ker}(N^1)$.
Skup $\{f_1, f_5\}$ nadopunimo vektorima f_8 i f_9 do baze prostora $\mathrm{Ker} N$.

Primjer. Koristeći se ovim postupkom možemo odrediti Jordanovu bazu operatora B iz Zadatka 6.

$$B(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mi smo pronašli

$$J(B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 8. Neka je $A \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan svojim matričnim prikazom u kanonskoj bazi (e) od $\mathbb{C}^4$

$$A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dokažite da je A nilpotentan i odredite mu indeks nilpotentnosti. Nadalje, odredite broj i dimenziju cikličkih potprostora, te odredite Jordanovu klijetku od A i jednu Jordanovu bazu.

Zadatak 9. Pretpostavimo da je $N \in L(\mathbb{C}^7)$ nilpotentan operator za koji vrijedi

$$\mathrm{ind}\, N \leqslant 3,\ \mathrm{r}(N) + \mathrm{r}(N^2) = 5.$$

Ispitajte je li Jordanova klijetka od N jednoznačno određena, te je, ako jest, odredite.

2.2 Jordanova forma operatora

Teorem. (O Jordanovoj formi) Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem, $\dim V = n$. Neka $A \in L(V)$ ima karakteristični polinom

$$k_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

i minimalni polinom

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{p_r}.$$

Tada postoje potprostori V_1, ..., $V_r \leqslant V$ invarijantni s obzirom na operator A takvi da je

$$V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_r = V,$$

$\dim V_j = k_j$, za $j = 1, \ldots, r$, te da za inducirani operator $A_j \in L(V_j)$ na potprostoru V_j vrijedi

$$A_j = \lambda_j I_{V_j} + N_j,$$

pri čemu je $N_j \in L(V_j)$ nilpotentni operator indeksa p_j, za $j = 1, \ldots, r$. $(*)$

Nadalje, za svaki $j \in \{1, \ldots, r\}$ postoje potprostori X_{j1}, ..., $X_{jm_j} \leqslant V_j$ invarijantni s obzirom na operator N_j i takvi da je $X_{j1} \dotplus \ldots \dotplus X_{jm_j} = V_j$ te da za inducirani operator $N_{ji} \in L(X_{ji})$ na potprostoru X_{ji} vrijedi $\operatorname{ind} N_{ji} = \dim X_{ji}$, za $i = 1, \ldots, m_j$.

Drugim riječima, postoji baza prostora V (tzv. *Jordanova baza*) u kojoj operator A ima matricu sljedećeg oblika (tzv. *Jordanovu formu*):

$$A(e) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I + N_1 & & & \\ & \lambda_2 I + N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r I + N_r \end{bmatrix}_{n \times n},$$

gdje je

$$\lambda_j I + N_j = \begin{bmatrix} \lambda_j I + N_{j1} & & & \\ & \lambda_j I + N_{j2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_j I + N_{jm_j} \end{bmatrix}_{k_j \times k_j}$$

i

$$\lambda_j I + N_{ji} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & & \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{bmatrix}_{\dim X_{ji} \times \dim X_{ji}}$$

su *temeljni Jordanovi blokovi* ili *elementarne Jordanove klijetke* pridružene skalaru λ_j.

Činjenice:

- $\{\lambda_1, ..., \lambda_r\} = \sigma(A)$.
- Zbroj dimenzija svih elementarnih klijetki pridruženih skalaru λ_j je jednak k_j.

- Broj elementarnih klijetki pridruženih skalaru λ_j jednak je $\mathrm{d}(A - \lambda_j I)$, tj. geometrijskoj kratnosti svojstvene vrijednosti λ_j.
- Najveća elementarna klijetka pridružena skalaru λ_j ima dimenziju p_j.
- Broj elementarnih klijetki pridruženih skalaru λ_j koje imaju dimenziju $l \in \mathbb{N}$ jednak je

$$n_l^{(\lambda_j)} = 2\mathrm{d}((A - \lambda_j I)^l) - \mathrm{d}((A - \lambda_j I)^{l-1}) - \mathrm{d}((A - \lambda_j I)^{l+1}).$$

Napomena. Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem. Operatori A, $B \in L(V)$ su slični (tj. postoji $T \in GL(V)$ takav da je $B = T^{-1}AT$) ako i samo ako imaju iste Jordanove forme (do na poredak blokova).

Uvedimo oznaku $d_l^{(\lambda_j)} := \mathrm{d}((A - \lambda_j I)^l)$.

Zadatak 1. Linearni operator $A \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je u kanonskoj bazi od $\mathbb{C}^4$ matricom

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nađite minimalni polinom i Jordanovu formu operatora A.

Zadatak 2. Označimo s $\mathcal{P}_3$ vektorski prostor polinoma nad $\mathbb{C}$ stupnja $\leqslant 3$ u varijabli t. Kanonska baza prostora $\mathcal{P}_3$ je $(1, t, t^2, t^3)$. Linearni operator $A \in L(\mathcal{P}_3)$ definiran je sa

$$Ap(t) := 2\,p(0)(1-t) + p(1)(1+t) + \frac{1}{\lambda}\,p''(0)(3t^2 - t^3) + \frac{1}{6}\,p'''(0)(t^2 + t^3).$$

Napišite matricu operatora A u kanonskoj bazi od $\mathcal{P}_3$ te mu nađite minimalni polinom i Jordanovu formu.

Zadatak 3. Neka za operator $A \in L(V)$ vrijedi $k_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^3$. Kako sve može izgledati $\mu_A(\lambda)$? Možemo li za svaki od mogućih rezultata za μ_A jednoznačno (do na poredak blokova) odrediti Jordanovu formu operatora A?

Zadatak 4. Koliko najviše elemenata može imati skup operatora $\mathcal{S} \subseteq L(\mathbb{C}^3)$ takav da za svaki $T \in \mathcal{S}$ vrijedi $\sigma(T) \subseteq \{2, 3\}$ i nikoja dva operatora nisu slična?

Zadatak 5. Operator $A \in L(\mathbb{C}^7)$ u nekoj bazi (f) za $\mathbb{C}^7$ ima matrični prikaz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & & & & & \\ & -3 & & & & & \\ & & -3 & & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite $\sigma(A + 3I)$, $k_A(\lambda)$, geometrijsku kratnost svojstvene vrijednosti 1, $\det(A^{-1}(A + 2I))$, $\mu_A(\lambda)$ i $\mathrm{tr}(A + I)$.

Zadatak 6. Napišite Jordanovu formu operatora $A \in L(\mathbb{C}^7)$ ako je poznato da vrijedi:

(a) $\mathrm{r}(A) = 4$, $\mathrm{r}(A^2) = 1$, $\mathrm{r}(A^3) = 0$

(b) $\sigma(A) = \{-2, 2\}$, stupanj od μ_A je 2, $\mathrm{tr}(A) = 6$

(c) $k_A(\lambda) = -(\lambda - 3)^3\, \mu_A(\lambda)$, $(\mu_A(\lambda))^4 = -(\lambda + 3)^9\, k_A(\lambda)$