4 Unitarni prostori

4.1 Definicija i svojstva unitarnih prostora

$\mathbb{K}$ = polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, V je vektorski prostor nad $\mathbb{K}$

Definicija. *Skalarni produkt* na V je svaka funkcija $(\cdot \mid \cdot)\colon V \times V \to \mathbb{K}$ koja ima sljedeća svojstva:

(1) za sve $v_1, v_2, w \in V$ i sve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ vrijedi $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid w) = \alpha_1(v_1 \mid w) + \alpha_2(v_2 \mid w)$ (linearnost u prvoj varijabli)

(2) za sve $v, w \in V$ vrijedi $(v \mid w) = \overline{(w \mid v)}$ (hermitska komutativnost)

(3) za svaki $v \in V$ vrijedi $(v \mid v) \geqslant 0$ i za svaki $v \in V$ vrijedi $(v \mid v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (pozitivna definitnost)

Uređeni par $(V, (\cdot \mid \cdot))$ zove se *unitarni prostor*.

Iz svojstava (1) i (2) slijedi svojstvo:

(1') za sve $v, w_1, w_2 \in V$ i sve $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$ vrijedi

$$(v \mid \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \overline{\beta_1}(v \mid w_1) + \overline{\beta_2}(v \mid w_2)$$

(antilinearnost u drugoj varijabli)

Primjeri unitarnih prostora.

1. $V = \mathbb{K}^n$ za neki $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ fiksni skalari, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in V$.

$$(v \mid w) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \overline{w_j}$$

$(\cdot \mid \cdot)$ je skalarni produkt na $\mathbb{K}^n$. Za $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ ovo je standardni skalarni produkt na $\mathbb{K}^n$.

2. $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $V = C([a, b], \mathbb{K}) = \{f\colon [a, b] \to \mathbb{K} \mid f \text{ neprekidna}\}$, $f, g \in V$.

$$(f \mid g) := \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

$(\cdot \mid \cdot)$ je skalarni produkt na $C([a, b], \mathbb{K})$.

3. $V = M_n(\mathbb{K})$ za neki $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in V$.

$$(A \mid B) := \operatorname{tr}(AB^*),$$

gdje je $B^* = \bar{B}^\tau$ matrica adjungirana matrici B. $(\cdot \mid \cdot)$ je skalarni produkt na $M_n(\mathbb{K})$. Naime, za matrice $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{ij}]$ imamo $(A \mid B) = \operatorname{tr}([\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\overline{\beta_{jk}}]) = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}\overline{\beta_{jk}}$ pa je unitarni prostor $M_n(\mathbb{K})$ prirodno izomorfan unitarnom prostoru $\mathbb{K}^{n^2}$ uz standardni skalarni produkt (kao vektorski prostori $\mathbb{K}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{K})$, n^2-torke umjesto kao vektore pišemo kao $n \times n$ matrice).

Napomena. Na svakom realnom ili kompleksnom konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru može se definirati skalarni produkt. Naime, za svaki konačno-dimenzionalni vektorski prostor V nad $\mathbb{K}$ postoji izomorfizam $\Phi\colon V \to \mathbb{K}^n$, $n = \dim V$, jer svaki vektorski prostor posjeduje bazu. Ako je $(\cdot \mid \cdot)$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{K}^n$, onda je formulom $\langle v \mid w\rangle := (\Phi(v) \mid \Phi(w))$ definiran skalarni produkt $\langle \cdot \mid \cdot\rangle$ na vektorskom prostoru V.

U daljnjem je V unitarni prostor sa skalarnim produktom $(\cdot \mid \cdot)$. Za $v \in V$ je

$$||v|| := \sqrt{(v \mid v)}$$

norma (*duljina*) vektora v. Funkcija $||\cdot||\colon V \to \mathbb{R}$ ima svojstva:

(1) $(\forall v \in V)(||v|| \geqslant 0)$

(2) $(\forall v \in V)(||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0)$

(3) $(\forall v \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{K})(||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||)$

(4) $(\forall v, w \in V)(||v + w|| \leqslant ||v|| + ||w||)$

To su tzv. *aksiomi norme.* Zbog toga što ova norma potječe od skalarnog produkta za nju vrijedi još *relacija paralelograma*:

$$(\forall v, w \in V)\ (||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2).$$

Ona se dobije ovako: $||v + w||^2 + ||v - w||^2 = (v + w \mid v + w) + (v - w \mid v - w) = (v \mid v) + (v \mid w) + (w \mid v) + (w \mid w) + (v \mid v) - (v \mid w) - (w \mid v) + (w \mid w) = 2(v \mid v) + 2(w \mid w) = 2||v||^2 + 2||w||^2$.

U svakom unitarnom prostoru V vrijedi:

Schwarz-Cauchy-Bunjakovskijeva nejednakost. Za sve $v, w \in V$ je

$$|(v \mid w)| \leqslant ||v|| \cdot ||w||.$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su v i w kolinearni (tj. linearno zavisni).

Zadatak 1. Da li postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je sa $((x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3)) = ax_1y_1 - ax_2y_2 + x_3y_3$ definiran skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$?

Zadatak 2. Koristeći SCB-nejednakost, dokažite da vrijedi $(\frac{a+b}{2})^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Zadatak 3. Neka je V unitarni prostor nad $\mathbb{K} =$ polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Za vektore $x, y \in V$ dokažite da vrijedi

$$(x \mid y) = 0 \ \Leftrightarrow\ (\forall \alpha \in \mathbb{K})\,(||x|| \leqslant ||x + \alpha y||).$$

Zadatak 4. Neka za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi $AA^* = A^2$. Dokažite da je A hermitska matrica, tj. da vrijedi $A^* = A$.

Zadatak 5. Provjerite jesu li sljedeći vektorski prostori unitarni uz sljedeća preslikavanja:

(a) $\mathbb{R}^3$ uz $((x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3)) = \sin(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$

(b) $\mathbb{R}^3$ uz $((x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$

(c) $\mathbb{R}$ uz $(x \mid y) = xy + 2$

(d) $\mathbb{R}^2$ uz $((x_1, x_2) \mid (y_1, y_2)) = x_1^2 + y_1^2$

Gram-Schmidtov postupak ortonormiranja. Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor, $(a_1, \ldots, a_m)$ linearno nezavisan sistem vektora iz V. Definiramo vektore $(e_1, \ldots, e_m)$ induktivno na sljedeći način:

$$e_1 := \frac{a_1}{||a_1||}$$

$$b_{k+1} := a_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (a_{k+1} \mid e_j)\, e_j, \qquad e_{k+1} := \frac{b_{k+1}}{||b_{k+1}||}$$

$$k = 1, \ldots, m-1$$

Tada je $(e_1, \ldots, e_m)$ ortonormirani sistem vektora koji još ima svojstva:

$$[\{e_1, \ldots, e_k\}] = [\{a_1, \ldots, a_k\}], \text{ za } k = 1, \ldots, m$$

$$(a_k, e_k) \geqslant 0, \text{ za } k = 1, \ldots, m$$

Zadatak 6. Neka su f_1, f_2 i $f_3 \in C([0,1], \mathbb{R})$, $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = t^2$ za svaki $t \in [0, 1]$. Ortonormirajte sistem (f_1, f_2, f_3).

Zadatak 7. Neka su v_1, $v_2 \in \mathbb{C}^2$ takvi da je $||v_1|| = 1$, $||v_2|| = 2$ i $(v_1 \mid v_2) = \sqrt{3}$. Ortonormirajte sistem (v_1, v_2).

Ako za S, $T \subseteq V$ vrijedi $(\forall v \in S)(\forall w \in T)((v \mid w) = 0)$, onda pišemo $S \perp T$ i kažemo da su S i T *međusobno ortogonalni.*

Za $S \subseteq V$ definiramo skup

$$S^{\perp} := \{v \in V \mid \{v\} \perp S\} = \{v \in V \mid (\forall w \in S)((v \mid w) = 0)\}$$

koji zovemo *ortogonalni komplement* skupa S. Očigledno je $S \perp S^{\perp}$.

Propozicija. Neka je V konačno-dimenzionalni unitarni prostor, $S \subseteq V$, $L \leqslant V$. Tada vrijedi:

(a) $S^{\perp} = [S]^{\perp}$, $\{0\}^{\perp} = V$, $V^{\perp} = \{0\}$

(b) $(L^{\perp})^{\perp} = L$, $(S^{\perp})^{\perp} = [S]$

(c) $V = L \oplus L^{\perp}$ (kažemo da je V ortogonalna suma potprostora L i $L^{\perp}$)

(d) $\dim L^{\perp} = \dim V - \dim L$

Zadatak 8. Neka je $M = [\{(0,0,1,1), (1,0,1,0)\}] \leqslant \mathbb{R}^4$. Nađite jednu ortonormiranu bazu za $M^\perp$ uz standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^4$.

Teorem. Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor.

(1) (**Pitagorin poučak**) Ako su $a_1, \ldots, a_n$ u parovima ortogonalni, onda vrijedi

$$||\sum_{j=1}^n a_j||^2 = \sum_{j=1}^n ||a_j||^2.$$

(2) Ako je $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq V$ ortonormiran skup, onda za svaki $x \in V$ vrijedi (**Besselova nejednakost**)

$$\sum_{j=1}^n |(x \mid e_j)|^2 \leqslant ||x||^2.$$

U slučaju da je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza, vrijedi za svaki $x \in V$ (**Parsevalova jednakost**)

$$\sum_{j=1}^n |(x \mid e_j)|^2 = ||x||^2.$$

(3) (**Teorem o najboljoj aproksimaciji**) Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq V$ ortonormiran skup. Za $x \in V$ označimo $y_0 := \sum_{j=1}^n (x \mid e_j)e_j$. Tada za svaki $y \in [\{e_1, \ldots, e_n\}]$, $y \neq y_0$ vrijedi

$$||x - y_0|| < ||x - y||.$$

Zadatak 9. Nađite najbolju aproksimaciju matrice $A = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right] \in M_2(\mathbb{C})$ u potprostoru od $M_2(\mathbb{C})$ koji čine matrice traga 0.

4.2 Linearni operatori na unitarnim prostorima

Teorem. (Riesz) Za svaki funkcional $f \in V'$ postoji jedinstveni vektor $a \in V$ takav da je

$$f(v) = (v \mid a), \quad \forall v \in V.$$

Teorem. Za svaki $A \in L(V, W)$ postoji jedinstveni $A^* \in L(W, V)$ takav da je

$$(Av \mid w)_W = (v \mid A^*w)_V, \quad \forall v \in V, \ \forall w \in W.$$

Operator A^* zovemo *adjungiranim operatorom* operatora A.

Propozicija. Pridruživanje $A \mapsto A^*$ ima svojstva:

(a) bijektivno je $L(V, W) \to L(W, V)$

(b) antilinearno je, tj. $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$ za A, $B \in L(V, W)$

(c) $(AB)^* = B^*A^*$, za $B \in L(V, W)$, $A \in L(W, U)$

(d) $(A^*)^* = A$, za $A \in L(V, W)$

(e) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, za $A \in L(V, W)$ bijekciju

(f) $I_V^* = I_V$

Propozicija. Ako su (e), (f) redom ortonomirane baze vektorskih prostora V, W te $A \in L(V, W)$, onda vrijedi:

$$A^*(e, f) = (A(f, e))^* = (\overline{A(f, e)})^\tau.$$

Zadatak 1. Na prostoru $\mathcal{P}_2$ realnih polinoma stupnja $\leqslant 2$ uz skalarni produkt $(p \mid q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$ promotrimo linearni funkcional S, zadan sa $Sp = \frac{1}{2}p(1) - \frac{1}{6}p'(1) + \frac{1}{24}p''(1)$, $p \in \mathcal{P}_2$. Odredite $s \in \mathcal{P}_2$ takav da je $Sp = (p \mid s)$ za svaki $p \in \mathcal{P}_2$.

Propozicija. Za svaki $A \in L(V, W)$ vrijedi $V = \mathrm{Ker}A \oplus \mathrm{Im}A^*$ i $W = \mathrm{Ker}A^* \oplus \mathrm{Im}A$.

Zadatak za DZ. Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor i $A \in L(V)$. Dokažite da vrijedi

$$\mathrm{Im}(AA^*) = \mathrm{Im}A.$$

Zadatak 2. Nađite adjungirani operator operatora $A \in L(\mathbb{C}^2)$, $A(x_1, x_2) = (2x_1, ix_1 - x_2)$.

Definicija. Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor. Operator $A \in L(V)$ je *hermitski* ako vrijedi $A^* = A$, *antihermitski* ako vrijedi $A^* = -A$, *unitaran* ako vrijedi $AA^* = A^*A = I$, tj. $A^{-1} = A^*$, *normalan* ako vrijedi $AA^* = A^*A$.

Analogno definiramo *hermitsku* matricu, *antihermitsku* matricu, *unitarnu* matricu i *normalnu* matricu.

Napomena. Operator je hermitski ako i samo ako u nekoj (pa onda i u svakoj) ortonormiranoj bazi ima hermitsku matricu. Analogna tvrdnja vrijedi i za antihermitski operator, unitaran operator i normalan operator.

Zadatak 3. Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor nad $\mathbb{C}$.

(a) Dokažite da za svaki $A \in L(V)$ postoje jedinstveni hermitski operatori H, $K \in L(V)$ takvi da je $A = H + iK$.

(b) Dokažite da je $A \in L(V)$ normalan ako i samo ako H i K iz gornjeg prikaza međusobno komutiraju.

Zadatak 4. Napišite operator $A \in L(\mathbb{C}^2)$, $A(x_1, x_2) = (2x_1, ix_1 - x_2)$ u obliku $H + iK$, gdje su H, $K \in L(\mathbb{C}^2)$ hermitski operatori.

Zadatak 5. Neka je $\mathcal{P}_n$ prostor kompleksnih polinoma stupnja $\leqslant n$ uz skalarni produkt zadan sa $(f \mid g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$, $f, g \in \mathcal{P}_n$. Je li operator deriviranja $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, $Df = f'$ hermitski operator?

Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor i $M \leqslant V$. Tada vrijedi $V = M \oplus M^\perp$, tj. svaki vektor $x \in V$ ima jedinstven zapis oblika $x = a + b$, $a \in M$, $b \in M^\perp$. Operator $P \in L(V)$ definiran s $Px := a$ zove se *ortogonalni projektor* (ili hermitski projektor).

Propozicija. Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor i $P \in L(V)$. Operator P je ortogonalni projektor ako i samo ako vrijedi $P^2 = P = P^*$.

Zadatak 6. Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor i neka su P_1, $P_2 \in L(V)$ ortogonalni projektori. Uz koje uvjete na P_1 i P_2 je operator P_1P_2 ortogonalni projektor? Na koji potprostor u tom slučaju on projicira prostor V?

Zadatak za DZ. Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor i neka su P_1, $P_2 \in L(V)$ ortogonalni projektori. Uz koje uvjete na P_1 i P_2 je operator $P_1 + P_2$ ortogonalni projektor? Na koji potprostor u tom slučaju on projicira prostor V?

4.3 Unitarni operatori

Unitarne operatore možemo okarakterizirati na nekoliko načina.

Teorem. Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Ekvivalentno je:

(a) A je unitaran

(b) $A^*A = I$ (ili $A^*A = I$)

(c) $(\forall v, w \in V)\,((Av \mid Aw) = (v \mid w))$, tj. A čuva skalarni produkt

(d) $(\forall v \in V)(||Av|| = ||v||)$, tj. A čuva normu

(e) za svaku ortonormiranu bazu $(e_1, \ldots, e_n)$ od V je $(Ae_1, \ldots, Ae_n)$ opet ortonormirana baza od V

(f) postoji ortonormirana baza $(e_1, \ldots, e_n)$ od V takva da je $(Ae_1, \ldots, Ae_n)$ ortonormirana baza od V

Zadatak 1. Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor nad $\mathbb{C}$. Dokažite: ako su A, $B \in L(V)$ unitarni operatori takvi da je operator $A + B$ također unitaran, onda je AB^* unitaran operator za koji vrijedi $(AB^*)^3 = I$.

Zadatak 2. Dokažite: ako je A unitaran operator takav da je $A + I$ također unitaran, onda je $A^3 = I$.

Zadatak za DZ. Na unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ zadan je operator $A(x_1, x_2, x_3) = (\frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_3, \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_3, x_2)$. Provjerite je li operator A unitaran i odredite A^{-1}.

4.4 Normalni operatori

Teorem. Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Ekvivalentno je:

(a) A je normalan

(b) $(\forall v, w \in V)\,((A^*v \mid A^*w) = (Av \mid Aw))$

(c) $(\forall v \in V)(||A^*v|| = ||Av||)$

Ako je V kompleksan unitaran prostor, onda vrijedi i:

(d) postoji ortonormirana baza od V u kojoj A ima dijagonalnu matricu.

Zadatak 1. Neka je operator $A \in L(\mathbb{C}^3)$ zadan sa

$$A(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3, 2x_1 + 2x_3, 4x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

Ako postoji, odredite ortonormiranu bazu za $\mathbb{C}^3$ u kojoj A ima dijagonalni prikaz.

Teorem. Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor nad $\mathbb{C}$. Ako je $\mathcal{A}$ familija normalnih operatora koji međusobno komutiraju, onda postoji ortonormirana baza prostora V u kojoj svi operatori iz $\mathcal{A}$ imaju dijagonalnu matricu.

Zadatak 2. Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in L(V)$ normalan operator. Dokažite:

(a) A je hermitski $\Leftrightarrow \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

(b) A je antihermitski $\Leftrightarrow \sigma(A) \subseteq i\mathbb{R}$

(c) A je unitaran $\Leftrightarrow \sigma(A) \subseteq S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

Zadatak 3. Na kompleksnom konačno-dimenzionalnom unitarnom prostoru dan je normalan operator A za koji vrijedi $A^5 + A^3 - A^2 - I = 0$. Dokažite da A mora biti unitaran.

Zadatak 4. Neka je V konačno-dimenzionalan kompleksni unitarni prostor i $A \in L(V)$. Dokažite: A je normalan operator ako i samo ako postoji unitaran operator $U \in L(V)$ takav da je $A^* = UA$.

4.5 Hermitski i pozitivni operatori

Teorem. Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor (nad $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$). Ako je $\mathcal{A}$ familija hermitskih operatora na V koji međusobno komutiraju, onda postoji ortonormirana baza prostora V u kojoj svi operatori iz $\mathcal{A}$ imaju (realne) dijagonalne matrice.

Definicija. Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor. Operator $A \in L(V)$ je *pozitivan* ako je $A^* = A$ i vrijedi $(\forall v \in V)\,((Av \mid v) \geqslant 0)$. Tada pišemo $A \geqslant 0$. Operator $A \in L(V)$ je *strogo pozitivan* ako je $A^* = A$ i vrijedi $(\forall v \in V\backslash\{0\})\,((Av \mid v) > 0)$. Tada pišemo $A > 0$.

Propozicija. Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ hermitski operator. Tada vrijedi:

(a) A je pozitivan $\Leftrightarrow \sigma(A) \subseteq [0, +\infty\rangle$

(b) A je strogo pozitivan $\Leftrightarrow \sigma(A) \subseteq \langle 0, +\infty\rangle$

Teorem. (O pozitivnom drugom korijenu) Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor. Za svaki $A \in L(V)$, $A \geqslant 0$ postoji jedinstveni $B \in L(V)$, $B \geqslant 0$ takav da je $B^2 = A$. Kažemo da je B *pozitivni drugi korijen* operatora A i pišemo $B = \sqrt{A}$. Štoviše, imamo da vrijedi

$$(\forall T \in L(V))(AT = TA \Leftrightarrow BT = TB).$$

Teorem. (O polarnoj formi) Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor. Za svaki $A \in L(V)$ postoje unitarni operatori $U_1, U_2 \in L(V)$ i pozitivni operatori $P_1, P_2 \in L(V)$ takvi da je $A = P_1 U_1 = U_2 P_2$. Operatori P_1, P_2 su jednoznačno određeni s A, a ako je operator A regularan, onda su jednoznačno određeni i operatori U_1, U_2.

Zadatak 1. Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Dokažite: ako vrijedi $A^*A - AA^* \geqslant 0$, onda je A normalan.

Zadatak 2. Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor nad $\mathbb{C}$. Neka su A, $B \in L(V)$, $A > 0$ takvi da vrijedi $AB + iBA = 0$. Dokažite da je $B = 0$.

Zadatak 3. Neka je P pozitivan operator na konačno-dimenzionalnom unitarnom vektorskom prostoru koji zadovoljava jednakost $P^{10} + 2P^4 - 3I = 0$. Dokažite da je $P = I$.

Zadatak 4. Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor i neka su A, $B \in L(V)$ takvi da je $||Av|| = ||Bv||$ za svaki $v \in V$. Dokažite da postoji unitaran operator U takav da je $B = UA$.

Zadatak 5. Operator $A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadan je formulom $A(x, y) = (2x + 3y, 3x + 5y)$. Dokažite da je A pozitivan operator i odredite njegov pozitivni drugi korijen $\sqrt{A}$.

4.6 Dodatni zadaci

Zadatak 1. Koliko najviše elemenata može imati spektar unitarnog operatora $U \in L(\mathbb{C}^{2006})$ takvog da je operator $U - I$ također unitaran?

Zadatak 2. Neka je A linearan operator na konačno-dimenzionalnom unitarnom prostoru V. Dokažite: ako vrijedi $||A^*x|| = ||Ax||$ za svaki $x \in V$, onda je A normalan.

Zadatak 3. Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor i $H \in L(V)$ hermitski operator. Neka je λ_0 najmanja svojstvena vrijednost operatora H. Dokažite: $\lambda_0\,(x \mid x) \leqslant (Hx \mid x)$ za sve $x \in V$.

Zadatak 4. Neka je $H \in M_n(\mathbb{C})$ hermitska matrica i pretpostavimo da su B, $C \in M_n(\mathbb{C})$ hermitske matrice takve da je $B^3 = H = C^3$. Dokažite da je $B = C$.