Vièteovo rješenje van Roomenove jednadžbe

Karla Štefan

Krajem 16. stoljeća nizozemski matematičar Adriaan van Roomen postavio je vrlo složen matematički problem kao izazov europskim matematičarima. Zadatak je bio riješiti polinomsku jednadžbu 45. stupnja

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 + \cdots + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = A,$$

pri čemu je $A = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$.

U to se vrijeme rješavanje jednadžbi ovako visokog stupnja algebarskim metodama smatralo nemogućim, ali francuski matematičar François Viète pronašao je elegantno rješenje koristeći trigonometriju.
Primijetio je da polinom na lijevoj strani odgovara formuli za sinus višestrukog kuta.

$$2\sin(n\alpha) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^i \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} x^{n-2i}, \qquad \mathrm{x} = 2\sin\alpha$$

Za $n = 45$ dobiva se:

$$2\sin(45\alpha) = \sum_{i=0}^{22} (-1)^i \frac{45}{45-i} \binom{45-i}{i} x^{45-2i}.$$

Zbog toga se lijeva strana zadane jednadžbe može zapisati kao

$$2\sin(45\alpha) = A.$$

S druge strane, Viète je prepoznao da ta vrijednost predstavlja duljinu stranice pravilnog petnaesterokuta upisanog u jediničnu kružnicu, što se trigonometrijski može zapisati kao

$$A = 2\sin\left(\frac{\pi}{15}\right).$$

Time je problem sveden na jednostavnu trigonometrijsku jednadžbu: $\sin(45\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{15}\right)$.
Slijede rješenja: $45\alpha = \frac{\pi}{15} + 2k\pi$ ili $45\alpha = \pi - \frac{\pi}{15} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Dijeljenjem s 45 dobivaju se moguće vrijednosti kuta α, a potom i konačna rješenja početne jednadžbe preko izraza $x = 2\sin\alpha$.
Sinus je periodična funkcija pa je dovoljno promatrati vrijednosti $k = 0,1,2,\ldots,44$, pri čemu se dobiva ukupno 45 različitih realnih rješenja jednadžbe (23 pozitivna i 22 negativna). Vrijedi napomenuti da je sam van Roomen tražio samo pozitivna rješenja, dok je Vièteov pristup otvorio vrata općem, sustavnom rješavanju.

Vièteovo rješenje bilo je važno jer je pokazalo duboku povezanost algebre i trigonometrije te pridonijelo razvoju moderne matematike.

Reference:

- *David Richeson, Van Roomen's Problem: Solution Explained* — *https://fermatslasttheorem.blogspot.com/2007/02/van-roomens-problem-solution-explained.html*
- J. J. O'Connor i E. F. Robertson, *François Viète* — https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viete/