

Teorija vjerojatnosti 2

Zadaci za vježbu I

PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu

ljetni semestar – 2025/26

Napetost i konvergencija vjerojatnosnih mjera

Zadatak 1. a) Pokažite da je svaka pojedina vjerojatnosna mjera μ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ napeta. b) Pokažite da je unija dvije napete familije vjerojatnosnih mjera napeta.

Zadatak 2. Ako je $\{\mu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ niz vjerojatnosnih mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, pokažite da niz čini napetu familiju mjera ako i samo ako

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(x : |x| > K) \rightarrow 0,$$

za $K \rightarrow \infty$.

Zadatak 3. Pokažite, ako su X_n , $n \geq 1$, sl. vektori na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, njihove razdiobe $\{P_{X_n}\}$ čine napetu familiju ako i samo za svaki niz (c_n) , $c_n \rightarrow 0$, vrijedi $c_n X_n \xrightarrow{P} 0$.

Zadatak 4. Pokažite da na $([0, 1], \mathcal{B})$ za $n \in \mathbb{N}$ vjerojatnosne mjere

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{i/n}$$

zadovoljavaju $\mu_n \xrightarrow{w} Leb$.

Zadatak 5. Pokažite da za svaku vjerojatnosnu mjeru μ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ postoji dvostruki niz $(a_{n,i})_{n \in \mathbb{N}, |i| \leq n}$ takav da diskretne vjerojatnosne mjere

$$\mu_n = \sum_{i=-n}^n a_{n,i} \delta_{i/n}$$

zadovoljavaju $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

Karakteristične funkcije

Zadatak 6. Odredite karakteristične funkcije: a) binomne razdiobe $B(n, p)$ b) uniformne razdiobe na intervalu $[0, a]$ za $a > 0$.

Zadatak 7. Ako je $Z \sim N(0, 1)$ karakteristična funkcija joj je $\varphi_Z(t) = e^{-t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$, koristeći karakteristične funkcije dokažite da za nezavisne $Z_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $Z_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ vrijedi $Z_1 + Z_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Zadatak 8. Sl. varijabla X na \mathbb{R} je simetrična ako $X \stackrel{d}{=} -X$. Pokažite X je simetrična ako i samo ako njena karakteristična funkcija ϕ_X prima samo realne vrijednosti.

Zadatak 9. Pokažite da je realni dio karakteristične funkcije i sam karakteristična funkcija, ali njen imaginarni dio nikad ne može biti karakteristična funkcija.

Zadatak 10. Ako je $\phi_X(t)$ karakteristična funkcija sl. varijable X na \mathbb{R} tada je to i $e^{\lambda(\phi_X(t)-1)}$ za sve $\lambda > 0$. (uputa: $e^{\lambda(\phi_X-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda(\phi_X-1)}{n}\right)^n$.)

Zadatak 11. Odredite Laplaceovu transformaciju eksponencijalne razdiobe s parametrom $\lambda > 0$.

Zadatak 12. (Cramér-Wold) Dokažite da za $X, X_n, n \geq 1$, sl. vektore na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ vrijedi $X_n \xrightarrow{d} X$ ako i samo ako $\langle t, X_n \rangle \xrightarrow{d} \langle t, X \rangle$ za sve $t \in \mathbb{R}^d$.

Centralni granični teorem i konvergencija mjera

Zadatak 13. a) Iskažite Lindeberg-Fellerov centralni granični teorem i b) pokažite kako iz njega slijedi centralni granični teorem za n.j.d. niz (X_n) za koji vrijedi $0 < \sigma^2 = \text{Var}(X_1) < \infty$.

Zadatak 14. Pokažite da za niz nezavisnih sl. varijabli (X_n) takav da $\mathbb{E}|X_n|^{2+\delta} < \infty$ za $n \in \mathbb{N}$ i takav da za $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \text{Var} X_i$ i $n \rightarrow \infty$ vrijedi

$$\frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_n - \mathbb{E}X_n|^{2+\delta} \rightarrow 0,$$

tad

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{s_n} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1).$$

Zadatak 15. Neka su $X, X_n, n \geq 1$ n.j.d. sl. varijable s Cauchyjevom razdiobom koja ima gustoću $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ i karakterističnu funkciju $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$. Odredite (ako postoji) limes po distribuciji niza S_n/n gdje je $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Zadatak 16. Pretpostavite da za $X, X_n, n \geq 1$ sl. vektore na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ vrijedi $X_n \xrightarrow{d} X$ te $\mathbb{P}(X \in C) = 1$. Ako je $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ izmjeriva i neprekidna na C obrazložite zašto vrijedi $\psi(X_n) \xrightarrow{d} \psi(X)$.

Zadatak 17. Za niz vjerojatnosnih mjera $\mu, \mu_n, n \geq 1$ $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ definirajte značenje izraza $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ i iskažite Hellyjev teorem.

Zadatak 18. Iskažite Prohorovljev teorem za niz vjerojatnosnih mjera $\mu_n, n \geq 1$ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Zadatak 19. Ako je $Z \sim N(0, 1)$ s funkcijom gustoće φ , pokažite da za $x > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(Z > x) \leq \frac{1}{x} \varphi(x).$$

Zadatak 20. LED svjetla nekog proizvođača imaju očekivani vijek trajanja od $\mu = 10,000$ sati i standardnu devijaciju od $\sigma = 800$ sati. Točna razdioba životnog vijeka je nepoznata. Ako je instalirano $n = 64$ svjetala u nekoj ustanovi, odredite aproksimativno vjerojatnost da prosječni životni vijek tih svjetala bude manji od 9800 sati.

Zadatak 21. Prodavaonica slatkiša prodaje miješane praline "velike&male". U velikoj kutiji pralina 50% su "velike" s očekivanom težinom od 20 g i standardnom devijacijom od 2 g, a preostale su "male" s očekivanom težinom od 10 g i standardnom devijacijom od 2 g. Ako izaberemo slučajno $n = 100$ pralina, kolika je (približno) vjerojatnost da je njihova prosječna težina veća od 15.6 g (uputa: odredite prva dva momenta miješane razdiobe).

Zadatak 22. Neka su $X_n, n \geq 1$ n.j.d. sl. varijable s gustoćom $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ za $x \in \mathbb{R}$. Pokažite da vrijedi

$$\sqrt{n} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1),$$

(uputa: iskoristite centralni granični teorem, jaki zakon velikih brojeva i Slutskyjev argument).

Brownovo gibanje

Zadatak 23. Navedite definiciju Brownovog gibanja $(B_t)_{t \geq 0}$ i odredite $\text{Cov}(B_s, B_t)$ za $0 \leq s < t$.

Zadatak 24. Za Brownovo gibanje $(B_t)_{t \geq 0}$, pokažite a) i $(-B_t)_{t \geq 0}$ odn. b) $(a^{-1/2}B_{at})_{t \geq 0}$ su Brownova gibanja za sve $a > 0$.

Zadatak 25. Za Brownovo gibanje $(B_t)_{t \geq 0}$, pokažite $B_n/n \xrightarrow{\text{g.s.}} 0$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \rightarrow \infty$.

Zadatak 26. Pokažite da postoji dvostrano Brownovo gibanje $(B_t)_{t \geq 0}$ sa g.s. neprekidnim putevima, nezavisnim prirastima, za koje $B_0 = 0$, a $B_{t+h} - B_t \sim N(0, h)$ za sve $t \in \mathbb{R}$ i $h \geq 0$.

Zadatak 27. Iskažite Blumenthalov zakon 0-1 (precizno definirajte korištene pojmove).

Zadatak 28. Pokažite a) ako je $\tau = \inf\{t > 0 : B_t > 0\}$ tada $\mathbb{P}(\tau = 0) = 1$, b) za $T_0 = \inf\{t > 0 : B_t = 0\}$ takodjer vrijedi $\mathbb{P}(T_0 = 0) = 1$.