Osnove teorije vjerojatnosti

Zadaci za vježbu

PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu

zimski semestar – 2024/25

Zadatak 1. Ako je $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ izmjeriva i monotono rastuća a $\varepsilon > 0$ proizvoljan i t.d. $g(\varepsilon) > 0$. a) Iskažite Markovljevu nejednakost za $\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon)$. b) Dokažite iskazanu nejednakost.

Zadatak 2. Pretpostavite da realne sl. varijable X i Y imaju konačne varijance. a) Dokažite da polinom $g(t) = t^2 \operatorname{Var} Y + 2t \operatorname{Cov}(X, Y) + \operatorname{Var} X$ ima najviše jednu realnu nultočku. b) Izvedite iz te činjenice Cauchy–Schwarzovu nejednakost za $|\operatorname{Cov}(X, Y)|$.

Zadatak 3. Za nenegativnu sl. varijablu X, pokažite detaljno da vrijedi $\mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)dt$.

Zadatak 4. Ako je $\mathcal{G}$ σ–algebra, a X $\mathcal{G}$ izmjeriva sl. varijabla, dokažite precizno da za proizvoljnu nenegativnu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi $\mathbb{E}(\varphi(X) \mid \mathcal{G}) = \varphi(X)$.

Zadatak 5. Pokažite da za $X_n \xrightarrow{P} X$ i g neprekidnu na Borelovom skupu C t.d. $\mathbb{P}(X \in C) = 1$ povlači $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$.

Zadatak 6. Konstruirajte niz sl. varijabli (X_n) takav da $X_n \xrightarrow{P} 0$, ali $\mathbb{E}X_n \to \infty$.

Zadatak 7. Iskažite i dokažite drugu Borel–Cantelli lemu.

Zadatak 8. Ako su $X_n \sim Ber(1/n)$ nezavisne, pokažite $X_n \xrightarrow{P} 0$ iako $\mathbb{P}(X_n = 1 \text{ b.č.}) = 1$.

Zadatak 9. Ako su $W_n \sim Exp(1/n)$ nezavisne, za $X_n = e^{W_n}$ odredite ako postoji $\limsup_{n\to\infty} X_n/n$ g.s.

Zadatak 10. Pretpostavite da su (X_n) nenegativne n.j.d. sl. varijable. a) Odredite $\limsup_{n\to\infty} X_n/n$ g.s. ako je $\mathbb{E}X < \infty$. b) Odredite isti limes ako je $\mathbb{E}X = \infty$.

Zadatak 11. Ako su X, $X_n, n \geq 1$ sl. varijable t.d. $\mathbb{E}|X_n - X| \to 0$, pokažite da vrijedi $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X$.

Zadatak 12. Neka je $c > 0$ proizvoljan, Dokažite $X_n \xrightarrow{P} X$ ako i samo ako $\mathbb{E}|X_n - X| \wedge c \to 0$.

Zadatak 13. Pretpostavite $\mathbb{E}X_n = \mu$, $\operatorname{Var} X_n \to 0$, pokažite detaljno $X_n \xrightarrow{P} \mu$.

Zadatak 14. Pretpostavite $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y$ na istom vjerojatnosnom prostoru, pokažite detaljno $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

Zadatak 15. Ako je X slučajna var. za koju je $\operatorname{Var} X < \infty$, dokažite $\operatorname{Var} X \leq \mathbb{E}(X - c)^2$ za sve $c \in \mathbb{R}$.

Zadatak 16. Neka su X, Y nezavisne sl. varijable koje primaju vrijednosti na $\mathbb{Z}_+$, pokažite detaljno

$$\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y.$$

Zadatak 17. Ako je X slučajna var. za koju je $\mathbb{E}|X| < \infty$. Pokažite da relacija $\nu(A) = \int_A |x| dP_X(x)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, definira mjeru koja je apsolutno neprekidna u odn. na P_X.

Zadatak 18. Neka vrijedi $X \sim U(0,2), Y \sim U(1,3)$. Odredite $d_{TV}(P_X, P_Y)$.

Zadatak 19. Neka vrijedi $X \sim U(0,4), Y \sim Bin(2, 1/2)$, a $Z = \min(X, 1)$. Odredite $d_{TV}(P_X, P_Y)$, te pokažite $d_{TV}(P_Y, P_Z) \leq 1/2$.

Zadatak 20. Neka vrijedi $X \sim Poi(\mu), Y \sim Poi(\lambda)$. Pokažite $d_{TV}(P_X, P_Y) \leq |\mu - \lambda|$.

Zadatak 21. Neka su X, Y dvije sl. varijable koje primaju vrijednosti na $\mathbb{Z}_+$, uvedimo $f(k) = \mathbb{P}(X = k)$ i $g(k) = \mathbb{P}(Y = k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, dokažite da za razdiobe P_X i P_Y vrijedi

$$d_{TV}(P_X, P_Y) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \wedge g(k)\,.$$

Zadatak 22. Ako su X, Y dvije neprekidne sl. varijable s gustoćama f i g, a) dokažite da za razdiobe P_X i P_Y vrijedi

$$d_{TV}(P_X, P_Y) = \int_{A_+} f(s) ds - \int_{A_+} g(s) ds\,,$$

gdje je $A_+ = \{x : f(x) > g(x)\}$. b) dokažite $d_{TV}(P_X, P_Y) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |f(s) - g(s)|ds = 1 - \int_{\mathbb{R}} f(s) \wedge g(s)ds$.

Zadatak 23. Ako sl. varijable X, X_n, $n \geq 1$, zadovoljavaju $\liminf_n \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \mathbb{P}(X \in G)$ za proizvoljan otvoreni skup G. Pokažite detaljno da $\lim_n \mathbb{P}(X_n \in B) = \mathbb{P}(X \in B)$ za svaki izmjeriv skup B t.d. $\mathbb{P}(X \in \partial B) = 0$.

Zadatak 24. Poznato je da je za sl. varijablu $Y \sim \Gamma(a, b)$ (prisjetimo se $\mathbb{E}Y = a/b$) i svaki $t \in \mathbb{R}$ karakteristična funkcija od Y oblika $\varphi_Y(t) = (1 - it/b)^{-a}$. Ako je $X_n \sim \Gamma(n, 1)$. Odredite (a_n) i (b_n) takve da

$$\varphi_{X_n - b_n}\left(\frac{t}{a_n}\right) \to e^{-t^2}/2.$$

(Uputa: koristite $\lim_{u\to 0} u^{-2}[1 - \exp(-iu)/(1 - iu)] = 1/2$).

Zadatak 25. Pretpostavite da su ε_n n.j.d. sl. varijable takve da $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = 1/2$. Neka je $S_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$. Dokažite (analitički) za za karakterističnu funkciju od S_n i svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \to e^{-t^2}/2.$$

(Uputa: koristite $\lim_{u\to 0}(1 - \cos u)/u^2 = 1/2$).

Zadatak 26. Neka je $\mathcal{A}$ familija izmjerivih skupova, a ν, ν_n, $n \geq 1$ vjerojatnosne mjere, t.d. $\nu_n(\cup_{i=1}^m A_i) \to \nu(\cup_{i=1}^m A_i)$ za sve $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$. Pretpostavite da je $G = \cup_{i=1}^\infty A_i$ za neki niz (A_i), pokažite detaljno da $\nu_n(G) \to \nu(G)$.

Zadatak 27. Ako su X, $X_n, n \geq 1$ sl. varijable na $\mathbb{Z}_+$, td. vrijedi $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$, pokažite detaljno da $d_{TV}(P_{X_n}, P_X) \to 0$.

Zadatak 28. Pretpostavite da su $X_n, n \geq 1$ uniformno integrabilne i t.d. $X_n \stackrel{\text{g.s.}}{\to} X$. Pokažite X je integrabilna te da vrijedi

$$\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X.$$

Pokažite da isti zaključak vrijedi i ako konvergenciju g.s. zamijenimo sa $X_n \stackrel{P}{\to} X$.

Zadatak 29. Može se pokazati ako su (Y_i) n.j.d. i t.d. $\mathbb{E}Y_1 = -\delta < 0$ tada za $M_n = \max\{0, Y_1, \ldots, Y_1 + \cdots, Y_n$ gotovo sigurno vrijedi $\lim_n M_n/n = 0$. Pretpostavljajući ovu tvrdnju dokažite jaki zakon velikih brojeva, t.j. ako $\mathbb{E}X = \mu \in (-\infty, \infty)$

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \stackrel{\text{g.s.}}{\to} \mu.$$

Zadatak 30. Pokažite detaljno da konvergencija razdioba u totalnoj varijaciji povlači konvergenciju u Kolmogorov-Smirnov udaljenosti te po distribuciji. (Uputa $d_{KS}(P_X, P_Y) = \sup_t |F_X(t) - F_Y(t)|$).

Zadatak 31. Kažemo da je slučajna varijabla X stohastički dominirana (ili manja) od slu. varijable Y ako $F_X(t) \geq F_Y(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$, oznaka $X \overset{st}{\leq} Y$

(a) Odredite u kojem su odnosu $F_X^{\leftarrow}(q)$ i $F_Y^{\leftarrow}(q)$ za $q \in (0,1)$.

(b) Pokažite da postoji sparivanje $(\hat{X}, \hat{Y})$ za X i Y tako da vrijedi $\hat{X} \leq \hat{Y}$. (Uputa: za neku $U \sim U(0,1)$ postavite $\hat{X} = F_X^{\leftarrow}(U)$).

Zadatak 32. Pretpostavite da su $X_i \sim Ber(1/100)$, $W = \sum_{i=1}^{10} X_i$, te $Z \sim Poi(1/10)$. Pretpostavimo dodatno

$$d_{TV}(P_W, P_Z) \leq \frac{1}{10}.$$

Nadjite gornju ogradu za vjerojatnost $\mathbb{P}(W \geq 1)$.

Zadatak 33. Za sl. vektore X, $X_n, n \geq 1$ u $\mathbb{R}^d$ pokažite da $X_n \xrightarrow{d} X$ ako i samo $\langle t, X_n \rangle \xrightarrow{d} \langle t, X \rangle$ za svaki $t \in \mathbb{R}^d$.

Zadatak 34. Dokažite da Lindebergov uvjet na trokutasti centriran niz $(X_{n,j})$, $j = 1, \dots n$ povlači $\sup_j \mathbb{E}X_{n,j}^2 \to 0$ za $n \to \infty$.

Zadatak 35. Ako je X nenegativna sl. varijabla s Laplaceovom transformacijom $L_X(t) = \mathbb{E}e^{-tX}$, $t \geq 0$, pokažite da vrijedi $\mathbb{P}(X \geq r) \leq 2(1 - L_X(1/r))$

Zadatak 36. Pretpostavite da su X_i nezavisne i t.d. za sve i vrijedi $|X_i| \leq 1$, $\mathbb{E}X_i = 0$ te dodatno

$$\frac{\sum_1^n \operatorname{Var} X_i}{n} \to c \in (0, \infty).$$

Pokažite da $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ i $Z \sim N(0, c)$ zadovoljavaju

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z\,.$$

(Uputa: napravite trokutasti niz $(X_{n,j})$, $j = 1, \dots n$ za koji vrijedi Lindebergov uvjet).

Zadatak 37. Pretpostavite da vrijedi $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$. Pretpostavimo da je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna i t.d. je g' neprekidna u θ i $g'(\theta) \neq 0$. Pokažite da vrijedi

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} N(0, (g'(\theta)^2\sigma^2)\,.$$