

Teorija vjerojatnosti 2

Zadaci za vježbu II

PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu

Ijetni semestar – 2025/26

Donskerov teorem

Zadatak 1. a) Pokažite da je $\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$ norma na prostoru $C[0, 1]$. b) Objasnite zašto je $C[0, 1]$ u odn. na ovu metriku separabilan skup. c) Precizno objasnite kako definiramo odgovarajuću topologiju i Borelovu σ -algebru.

Zadatak 2. Definirajte napetost familija vjerojatnosnih mjera $\{\mu_j\}_{j \in I}$ na općenitom metričkom prostoru (\mathbb{S}, d) s pripadnom Borelovom σ -algebrom \mathcal{S} .

Zadatak 3. Definirajte modul neprekidnosti za funkciju $x \in C[0, 1]$.

Zadatak 4. a) Pokažite da su projekcije $\pi_{t_1, \dots, t_k}(x) = (x_{t_1}, \dots, x_{t_k})$, za $k \in \mathbb{N}$ i $0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq 1$ te $x \in C[0, 1]$ neprekidne funkcije, b) te da familija $\mathcal{A} = \{\pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), k \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq 1\}$ čini π -sustav te da c) generira Borelovu σ -algebru na $C[0, 1]$.

Zadatak 5. Iskažite Donskerov teorem sa svim pretpostavkama.

Zadatak 6. Neka su $X_n, n \geq 1$ n.j.d. sl. varijable s očekivanjem 0 i konačnom varijancom $\sigma^2 > 0$, a $S_n = X_1 + \dots + X_n, n \geq 1$. Za $M_n^S = \max_{k \leq n} |S_k|$, koristeći Donskerov teorem odredite aproksimativni izraz za $\mathbb{P}(M_n^S / \sqrt{n} > u)$ za proizvoljno $u > 0$ preko funkcije distribucije standardne normalne razdiobe Φ .

Zadatak 7. Pokažite (protuprimjerom) da funkcija $h : C[0, 1] \rightarrow [0, 1] \cup \{\infty\}$ zadana sa $h(x) = \sup\{t \in [0, 1] : x(t) = 0\}$ nije neprekidna.

Zadatak 8. Pokažite (protuprimjerom) da funkcija $g : C[0, 1] \rightarrow [0, 1] \cup \{\infty\}$ zadana sa $g(x) = \text{Leb}\{t \in [0, 1] : x(t) > 1\}$ nije neprekidna.

Zadatak 9. Precizno definirajte Brownov most.

Funkcije izvodnice momenata i velike devijacije

Zadatak 10. a) Definirajte funkciju izvodnicu momenata M_X realne sl. varijable X , b) ako je $Y = a + bX$ izvedite izraz za M_Y iz M_X .

Zadatak 11. Neka su $X_n, n \geq 1$ n.j.d. sl. varijable s funkcijom izvodnicom momenata M_X , a N sl. varijabla u \mathbb{Z}_+ s funkcijom izvodnicom $g_N(z) = \mathbb{E}z^N$. Za $S_N = X_1 + \dots + X_N$, odredite funkciju izvodnicu momenata preko M_X i g_N . b) Neka je $\mathbb{P}(N = k) = 2/3^{k+1}, k \in \mathbb{Z}_+$, ako X_i imaju gama distribuciju s očekivanjem 2 i varijancom 2, odredite funkciju izvodnicu momenata za S_N .

Zadatak 12. Odredite funkciju izvodnicu momenata za sljedeće razdiobe: a) Gama(a, b), $a, b > 0$, b) Binomnu $B(n, p), p \in [0, 1]$, c) Poissonovu $Poi(\lambda), \lambda > 0$, d) Laplaceovu s gustoćom $f_X(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$, e) uniformnu na intervalu(a, b), $0 \leq a < b$.

Zadatak 13. Ako su X, Y n.j.d. s funkcijom izvodnicom momenata $M(t) = e^{3t+t^2}$, odredite funkciju izvodnicu momenata i varijancu za $Z = 2Y - 3X + 4$.

Zadatak 14. Ako je X sl. varijabla s funkcijom izvodnicom momenata $M_X(t) = 2/(2-t)^2$, za $t < 2$, odredite standardnu devijaciju od X .

Zadatak 15. a) Ako je X sl. varijabla s funkcijom izvodnicom momenata t.d. $M(T) < \infty$ za sve $t \in \mathbb{R}$, za $\psi(t) = \log M_X(t)$ definirajte Legendreovu transformaciju ψ^* funkcije ψ .

Zadatak 16. Neka su $X_n, n \geq 1$ n.j.d. sl. varijable s funkcijom izvodnicom momenata M_X i konačnim s očekivanjem μ , a $S_n = X_1 + \dots + X_n, n \geq 1$. Iskažite precizno Cramérov teorem o velikim devijacijama sl. suma S_n .

Zadatak 17. Ako su $X_n, n \geq 1$ n.j.d. sl. varijable iz $N(\mu, \sigma^2)$ razdiobe, a) odredite za $x > \mu$, pripadnu Legendreovu transformaciju $\psi^*(x)$, b) izvedite aproksimacijsku formulu za $\mathbb{P}(S_n > nx)$ koristeći Cramérov teorem, c) riješite dio a) i b) uz pretpostavku da su $X_n \sim Poi(\mu), \mu > 0$.

Poissonove aproksimacije Chen-Steinovom metodom

Zadatak 18. Za vjerojatnosne mjere $\nu_i, i = 1, 2$ na \mathbb{Z}_+ definirajte $d_{TV}(\nu_1, \nu_2)$ i navedite formulu za ovu udaljenost preko nizova $(\nu_i(k))_k, i = 1, 2$.

Zadatak 19. Pokažite da je za $\lambda > 0$ i $Y \sim Poi(\lambda)$ jedina razdioba na \mathbb{Z}_+ sa svojstvom $\mathbb{E}Yg(Y) = \lambda\mathbb{E}g(Y+1)$ za svaku nenegativnu izmjerivu funkciju g .

Zadatak 20. Pokažite da za $\lambda > 0$ i $Y \sim Poi(\lambda)$ funkcija $g_j : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana sa $g_j(0) = 0$ i

$$g_j(k+1) = \frac{\mathbb{1}_{j \leq k} - \mathbb{P}(Y \leq k)}{\lambda} \cdot \frac{\mathbb{P}(Y = j)}{\mathbb{P}(Y = k)}$$

zadovoljava

$$\mathbb{1}_{k=j} - \mathbb{P}(Y = j) = \lambda g_j(k+1) - k g_j(k).$$

Zadatak 21. Neka su $X_i \sim Ber(p_i)$ za $i = 1, \dots, n$, a $W = X_1 + \dots + X_n$ iskažite precizno teorem o Poissonovoj aproksimaciji za udaljenost $d_{TV}(P_W, P_Y)$, gdje $Y \sim Poi(\lambda)$, $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$.

Zadatak 22. Neka su $X_i \sim Ber(p_i)$ za $i = 1, \dots, n$ nezavisne, a $W = X_1 + \dots + X_n$ iskažite ogradu za udaljenost $d_{TV}(P_W, P_Y)$, gdje $Y \sim Poi(\lambda)$, $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$.

Zadatak 23. Objasnite Erdős-Renyijev model sl. grafa i odredite očekivani broj izoliranih vrhova u ovisnosti o parametrima n i p .

Zadatak 24. Pretpostavimo da je (p_n) niz u $(0, 1)$ t.d. $np_n \rightarrow \lambda > 0$, koristeći Poissonovu aproksimaciju odredite za $W_n \sim B(n, p_n)$ i $Y \sim Poi(\lambda)$ gornju ogradu za $d_{TV}(P_{W_n}, P_Y)$ (uputa za $Y' \sim Poi(\lambda')$ vrijedi $d_{TV}(P_{Y'_n}, P_Y) \leq |\lambda - \lambda'|$).

Zadatak 25. Pretpostavite da su $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ n.j.d. $Ber(p)$ sl. varijable s parametrom $p \in (0, 1)$. Za $r \in \mathbb{N}$, uvedimo $X_i = \mathbb{1}_{\xi_i = \dots = \xi_{i+r-1} = 1}$, $i \in \mathbb{N}$ te $W = X_1 + \dots + X_n$. Za $\lambda = \mathbb{E}W$ i $Y \sim Poi(\lambda)$, odredite gornju ogradu za $d_{TV}(P_W, P_Y)$.