

## 6. LOKALNI EKSTREMI

6.1. Odredite parcijalne derivacije drugog reda sljedećih funkcija:

(a)  $f(x, y) = \ln(x - y)$ ,

(b)  $f(x, y, z) = e^z + \frac{1}{x} + xe^{-y}$ .

6.2. Odredite aproksimaciju broja  $(0.99e^{0.02})^8$  pomoću Taylorove formule prvog reda funkcije  $f(x, y) = (xe^y)^8$  u  $P_0 = (1, 0)$ .

6.3. Odredite Taylorovu formulu drugog reda u  $P_0 = (0, 0)$  sljedećih funkcija:

(a)  $f(x, y) = (x + y)^2$ ,

(b)  $f(x, y) = e^{x+y}$ .

6.4. Odredite lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

(a)  $f(x, y) = 2x + 2y - x^2 + y^2 + 5$ ,

(b)  $f(x, y) = x^3 - 3x + y$ ,

(c)  $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 10y + 1$ ,

(d)  $f(x, y) = 3x^2 + xy - y^2 + 5x - 5y + 4$ ,

(e)  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x + 5y$ ,

- (f)  $f(x, y) = y + x \sin y,$
- (g)  $f(x, y) = xy^{-1} - yx^{-1},$
- (h)  $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 + 1,$
- (i)  $f(x, y) = \sin x \sin y, 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi,$
- (j)  $f(x, y) = (x - y)(xy - 1),$
- (k)  $f(x, y) = (x - 3) \ln xy,$
- (l)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}.$
- (m)  $f(x, y) = \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) \cos x, -2\pi < x < 2\pi.$

6.5. Odredite lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z.$$

6.6. Koja je točka eliptičnog konusa  $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$  najbliža točki  $(1, 2, 0)$ ?

6.7. Odredite točku na ravnini  $3x - 4y + 2z + 32 = 0$  najbližu  $P(-1, 2, 4)$ .

6.8. Odredite maksimalan volumen kvadra upisanog u sferu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

6.9. Odredite stranice kvadra volumena 8 koji ima najmanje oplošje.

- 6.1. (a)  $\partial_x^2 f(x, y) = -\frac{1}{(x-y)^2}$ ,  $\partial_y^2 f(x, y) = -\frac{1}{(x-y)^2}$ ,  $\partial_x \partial_y f(x, y) = \partial_y \partial_x f(x, y) = \frac{1}{(x-y)^2}$ ,
- (b)  $\partial_x^2 f(x, y, z) = \frac{2}{x^3}$ ,  $\partial_y^2 f(x, y, z) = xe^{-y}$ ,  $\partial_z^2 f(x, y, z) = e^z$ ,  $\partial_x \partial_y f(x, y, z) = \partial_y \partial_x f(x, y, z) = -e^{-y}$ ,  $\partial_x \partial_z f(x, y, z) = \partial_z \partial_x f(x, y, z) = 0$ ,  $\partial_y \partial_z f(x, y, z) = \partial_z \partial_y f(x, y, z) = 0$ .

6.2. 1.08.

- 6.3. (a)  $f(h) = h_1^2 + 2h_1 h_2 + h_2^2 + R_3(h)$ .
- (b)  $f(h) = 1 + h_1 + h_2 + \frac{1}{2}h_1^2 + h_1 h_2 + \frac{1}{2}h_2^2 + R_3(h)$ .
- 6.4. (a) Nema, sedlasta točka u  $(1, -1)$ ,
- (b) Nema, nema stacionarnih točaka,
- (c) Lokalni minimum je  $-8$  u  $(1, -2)$ ,
- (d) Nema,  $(\frac{-5}{13}, \frac{-35}{13})$  je sedlasta točka,
- (e) Lokalni minimum je  $\frac{-13}{4}$  u  $(\frac{1}{2}, -1)$ ,

- (f) Nema,  $(-1, 2n\pi), (1, (2n + 1)\pi), n \in \mathbb{Z}$  su sedlaste točke,
- (g) Nema, nema stacionarnih točaka,
- (h) Nema,  $(0, 0)$  sedlasta točka,
- (i) Lokalni minimum je  $-1$  u  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  i  $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , lokalni maksimum je  $1$  u  $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  i  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , sedlasta  $(\pi, \pi)$ ,
- (j) Nema,  $(-1, -1)$  i  $(1, 1)$  su sedlaste točke,
- (k) Nema,  $(3, \frac{1}{3})$  je sedlasta točka,
- (l) Lokalni minimum je  $0$  u  $(0, 0)$ , sedlaste točke su  $(0, \pm 1)$ .
- (m) Nema, sedlaste točke su  $(-\pi, 0), (0, 0)$  i  $(\pi, 0)$ .

6.5. Lokalni minimum je  $-\frac{4}{3}$  u  $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ .

6.6. Najbliža točka je  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{41}}{6})$ , udaljenost je  $\frac{1}{6}\sqrt{114}$ .

6.7. Najbliža točka je  $(-4, 6, 2)$ , udaljenost je  $\sqrt{29}$ .

6.8. Maksimalan volumen je  $8$ .

6.9. Stranice kvadra s najmanjim oplošjem su  $x = y = z = 2$ .