7. GLOBALNI EKSTREMI

7.1. Odredite globalne ekstreme sljedećih funkcija:

(a) $f(x,y) = 2 - 3x + 2y$ na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x}{4} + \frac{y}{6} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$,
(b) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 2,\ |y| \leq 2\}$,
(c) $f(x,y) = y(x-3)$ na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 9\}$,
(d) $f(x,y) = 3 + x - y + xy$ na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq x^2,\ y \leq 4\}$,
(e) $f(x,y) = \frac{-2x}{x^2+y^2+1}$ na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 2,\ -x \leq y \leq x\}$,
(f) $f(x,y) = (x-3)^2 + y^2$ na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 4,\ x^2 \leq y \leq 4x\}$,
(g) $f(x,y) = x^3 - 3xy - y^3$ na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -2 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq 1\}$,
(h) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + x - 2y$ na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1\}$,
(i) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq 3,\ 1 \leq y \leq 4\}$,
(j) $f(x,y) = xy - (1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$ na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$,
(k) $f(x,y) = \sin x + \cos y$ na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$.

7.2. Odredite pozitivne x, y, z tako da je $x + y + z \leq 30$ i xyz^2 maksimalan.

7.3. Odredite maksimalan volumen kvadra u prvom oktantu kojemu je jedan vrh ishodište, a dijagonalno suprotni leži na ravnini $\frac{x}{9} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$.

7.4. Odredite pravac $y = ax + b$ koji minimizira sumu kvadrata udaljenosti $d_i = |y_i - (ax_i + b)|$ za $i = 1, 2, 3$ od točaka $T_1(-1, 2)$, $T_2(0, -1)$ i $T_3(1, 1)$.

7.5. Ako postoje, odredite globalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$ na $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0\}$.

7.6. Ako postoje, odredite globalne ekstreme funkcije $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ na $\mathbb{R}^2$.

Rješenja

7.1. (a) Globalni minimum je -10 u $(4, 0)$, globalni maksimum je 14 u $(0, 6)$,

(b) Globalni minimum je 0 u $(0, 0)$, globalni maksimum je 24 u $(-2, -2)$ i $(2, 2)$,

(c) Globalni minimum je $-\frac{27\sqrt{3}}{4}$ u $(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$, globalni maksimum je $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ u $(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$,

(d) Globalni minimum je -11 u $(-2, 4)$, globalni maksimum je 9 u $(2, 4)$,

(e) Globalni minimum je -1 u $(1, 0)$, globalni maksimum je 0 u $(0, 0)$,

(f) Globalni minimum je 5 u $(1, 1)$, globalni maksimum je 257 u $(4, 16)$,

(g) Globalni minimum je $-8 - 4\sqrt{2}$ u $(-2, -\sqrt{2})$, globalni maksimum je 1 u $(-1, 1)$,

(h) Globalni minimum je $-\frac{1}{2}$ u $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, globalni maksimum je $4 + 2\sqrt{2}$ u $(\sqrt{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$,

(i) Globalni minimum je $\frac{1}{5}$ u $(3, 4)$, globalni maksimum je $\frac{1}{\sqrt{2}}$ u $(1, 1)$,

(j) Globalni minimum je -1 u $(0, 0)$, globalni maksimum je $\frac{1}{2}$ u $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ i $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$,

(k) Globalni minimum je -2 U $(\frac{3\pi}{2}, \pi)$, globalni maksimum je 2 u $(\frac{\pi}{2}, 0)$ i $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$.

7.2. $x = y = \frac{15}{2},\ z = 15.$

7.3. 4.

7.4. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}.$

7.5. Nema globalni minimum, globalni maksimum je $\frac{1}{432}$ u $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

7.6. Globalni minimum je 0 u $(0, 0)$, globalni maksimum je $\frac{2}{e}$ u $(0, \pm 1)$.