

8. UVJETNI EKSTREMI

8.1. Odredite:

- (a) maksimum od $f(x, y) = xy$ uz uvjet $x^2 + 4y^2 = 8$,
- (b) minimum od $f(x, y) = xy^2$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 1$,
- (c) maksimum od $f(x, y) = x + y$ uz uvjet $x^4 + y^4 = 1$,
- (d) minimum od $f(x, y, z) = xyz$ uz uvjet $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
- (e) minimum od $f(x, y, z) = x + 2y + 4z$ uz uvjet $x^2 + y^2 + z^2 = 7$,
- (f) minimum od $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$ uz uvjet $x + y + z = 1$,
- (g) maksimum od $f(x, y, z) = x - y + z$ uz uvjet $x^2 + y^2 + z^2 = 2$,
- (h) minimum od $f(x, y) = 3x + 2y$ uz uvjet $2x^2 + 3y^2 = 3$,
- (i) maksimum od $f(x, y) = x + y^2$ uz uvjet $2x^2 + y^2 = 1$,
- (j) maksimum od $f(x, y) = -x^2 + y - 2z^2$ uz uvjet $x^4 + y^4 - z^2 = 0$.

8.2. Odredite točke na $z^2 - xy = 1$ koje su najbliže ishodištu.

8.3. Neka su x, y, z kutevi trokuta. Odredite maksimum $\sin x \sin y \sin z$.

8.4. Odredite maksimalan volumen kvadra u prvom oktantu kojemu je jedan vrh ishodište, a dijagonalno suprotni leži na paraboloidu $z = 4 - x^2 - y^2$.

8.5. Odredite maksimalan volumen kvadra kojem je oplošje 24.

- 8.6. Odredite maksimum funkcije $f(x, y, z) = (xyz)^{\frac{1}{3}}$ uz uvjete $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 6$.
- 8.7. Odredite maksimum i minimum funkcije $f(x, y, z) = xy^2z$ na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- 8.8. Odredite maksimum funkcije $f(x, y, z) = xyz$ uz uvjete $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xy + yz + xz = 2$.
- 8.9. Odredite maksimum i minimum funkcije $f(x, y, z) = x + y + z$ uz uvjete $x^2 + y^2 = 2$ i $x + z = 1$.
- 8.10. Odredite maksimum i minimum funkcije $f(x, y, z) = x + y + z$ uz uvjete $x^2 - y^2 = 1$ i $2x + z = 1$.

- 8.1. (a) 2 u $(2, 1)$ i $(-2, -1)$,
 (b) $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ u $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$,
 (c) $2^{\frac{3}{4}}$ u $(2^{-\frac{1}{4}}, 2^{-\frac{1}{4}})$,
 (d) $\frac{-\sqrt{3}}{9}$ u
 $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$,
 (e) $-7\sqrt{3}$ u $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{-4}{\sqrt{3}})$,
 (f) $\frac{1}{27}$ u $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$,
 (g) $\sqrt{6}$ u $(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$,
 (h) $-\frac{\sqrt{70}}{2}$ u $(-\frac{9}{\sqrt{70}}, -\frac{4}{\sqrt{70}})$,
 (i) $\frac{9}{8}$ u $(\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{7}{8}})$ i $(\frac{1}{4}, -\sqrt{\frac{7}{8}})$,
 (j) $\frac{3}{8}$ u $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ i $(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.
- 8.2. $(0, 0, 1)$ i $(0, 0, -1)$.
- 8.3. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ za $x = y = z = \frac{\pi}{3}$.
- 8.4. 2 u $(1, 1, 2)$.

8.5. 8 u $(2, 2, 2)$.

8.6. 2.

8.7. Maksimum je $\frac{1}{8}$ u $(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$, minimum je $-\frac{1}{8}$ u $(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$.

8.8. $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ u $(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$.

8.9. Maksimum je u $(0, \sqrt{2}, 1)$, minimum je u $(0, -\sqrt{2}, 1)$.

8.10. Nema maksimum ni minimum.