Poglavlje 2

Vektorski prostori

Definicija 2.1. Ako su na skupu $V \neq \emptyset$ definirane operacije $+ : V \times V \to V$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ sa svojstvima

(1) $\forall a, b \in V \ a + b \in V$,

(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in V$,

(3) $\exists 0 \in V$ t.d. $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in V$,

(4) $\forall a \in V \ \exists(-a) \in V$ t.d. $a + (-a) = -a + a = 0$,

(5) $a + b = b + a$, $\forall a, b \in V$,

(6) $\forall \alpha \in F$, $\forall a \in V$, $\alpha a \in V$,

(7) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$,

(8) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$,

(9) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall a, b \in V$,

(10) $1 \cdot a = a$, $\forall a \in V$,

kažemo da je $(V, +, \cdot)$ realni ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$), odnosno kompleksni ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$) **vektorski prostor**.

Napomena 2.2. U svakom vektorskom prostoru još vrijedi

a) $\alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ili $x = 0$

b) $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x)$

c) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$

d) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$

Primjer 2.3 (Standardni primjeri).

a) $V^2(O)$ i $V^3(O)$ su vektorski prostori nad $\mathbb{R}$ s obzirom na zbrajanje radijvektora i množenje radijvektora skalarom kako smo prethodno definirali.

b) Sami skupovi $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ uz uobičajeno zbrajanje brojeva i množenje skalarom po koordinatama.

c) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

d) $M_{mn}(\mathbb{F})$

e) $\mathcal{P}_n$ prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog od n

f) $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ prostor svih polinoma

Zadatak 2.1. Dokažite da je $V = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ realni vektorski prostor uz operacije

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2), \qquad \alpha(x, y) = (x^\alpha, y^\alpha).$$

Rješenje Moramo pokazati da vrijede svojstva (1)–(10) iz Definicije 2.1.

(1) Vrijedi jer je $xy > 0$ za $x > 0$ i $y > 0$.

(2)

$$\begin{aligned}((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) &= (x_1x_2, y_1y_2) + (x_3, y_3) = ((x_1x_2)x_3, (y_1y_2)y_3)\\ &= (x_1(x_2x_3), y_1(y_2y_3)) = (x_1, y_1) + (x_2x_3, y_2y_3)\\ &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))\end{aligned}$$

(3) Neutralni element za zbrajanje je $(1, 1)$.

(4) Aditivni inverz elementa (x, y) je $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.

(5) Komutativnost očito vrijedi.

(6) Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ i $x > 0$ je $x^\alpha > 0$.

(7) Za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $(x, y) \in V$ imamo

$$\alpha\left(\beta(x, y)\right) = \alpha\left(\left(x^\beta, y^\beta\right)\right) = \left(\left(x^\beta\right)^\alpha, \left(y^\beta\right)^\alpha\right) = \left(x^{\alpha\beta}, y^{\alpha\beta}\right) = (\alpha\beta)(x, y).$$

(8) Za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $(x, y) \in V$ imamo

$$(\alpha + \beta)(x, y) = \left(x^{\alpha+\beta}, y^{\alpha+\beta}\right) = \left(x^\alpha x^\beta, y^\alpha y^\beta\right) = (x^\alpha, y^\alpha) + \left(x^\beta, y^\beta\right) = \alpha(x, y) + \beta(x, y).$$

(9) Za $\alpha \in \mathbb{R}$ i $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$ imamo

$$\begin{aligned}\alpha\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) &= \alpha(x_1x_2, y_1y_2) = \left((x_1x_2)^\alpha, (y_1y_2)^\alpha\right) = (x_1^\alpha x_2^\alpha, y_1^\alpha y_2^\alpha)\\ &= (x_1^\alpha, y_1^\alpha) + (x_2^\alpha, y_2^\alpha) = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2).\end{aligned}$$

(10) Za svaki $(x, y) \in V$ vrijedi

$$1 \cdot (x, y) = \left(x^1, y^1\right) = (x, y).$$

Zadatak 2.2. Provjerite da je $M_{mn}(\mathbb{F})$ vektorski prostor.

Zadatak 2.3. Provjerite da je $\mathbb{C}^n$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ uz standardno definirane operacije. Oznaka: $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$.

Zadatak 2.4. U $\mathbb{R}^2$ ostavimo standardno zbrajanje i uvedemo novo množenje skalarom formulom $\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$. Je li to vektorski prostor?

Rješenje Ne. Prvi od aksioma koji ovdje nije zadovoljen je distributivnost u odnosu na skalarni faktor. Moralo bi biti $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$, $\forall \alpha, \beta, v$, odnosno

$$((\alpha+\beta)x, y) = (\alpha x, y) + (\beta x, y) = (\alpha x + \beta x, 2y), \quad \forall \alpha, \beta, x, y.$$

Čim je $y \neq 0$ gornja jednakost ne vrijedi.

Zadatak 2.5. Neka je $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ skup svih realnih funkcija realne varijable. V je realan vektorski prostor ako definiramo operacije "po točkama":

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \tag{2.1}$$
$$(\alpha f)(t) = \alpha \cdot f(t). \tag{2.2}$$

Provjerite!

Zadatak 2.6. Dokažite da svaki vektorski prostor $V \neq \{0\}$ sadrži beskonačno mnogo vektora (ovo nije točno nad konačnim poljima).

Rješenje Uzmimo $x \neq 0$. Sada $\alpha \neq \beta$ povlači da je $\alpha x \neq \beta x$. Zaista,

$$\alpha x = \beta x \;\Rightarrow\; \alpha x - \beta x = 0 \;\Rightarrow\; (\alpha - \beta)x = 0 \;\Rightarrow\; \alpha - \beta = 0$$

što je kontradikcija. □

DZ 2.1. Neka je V skup svih (beskonačnih) nizova realnih brojeva. Definirajmo

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) + (b_1, b_2, b_3, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots), \tag{2.3}$$
$$\alpha(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \ldots), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

(a) Provjerite je li V realan vektorski prostor.

(b) Neka je $A \subset V$ skup svih aritmetičkih nizova. Je li A realan vektorski prostor uz iste operacije?

(c) Neka je $G \subset V$ skup svih geometrijskih nizova. Je li G realan vektorski prostor uz iste operacije?

Rješenje

(a)

(b) DA

(c) NE, npr. $(1, 2, 4, 8, \ldots) + (1, 1, 1, 1, \ldots) = (2, 3, 5, 9, \ldots) \notin G$.

□

DZ 2.2. Provjerite da je $M_{mn}(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ realan vektorski prostor.

2.1 Linearna nezavisnost

Definicija 2.4. Skup $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ u vektorskom prostoru V je **linearno nezavisan** ako vrijedi

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

U protivnom se kaže da je skup **linearno zavisan**.

ČINJENICE 2.5. (a) Skup S je zavisan ako postoje $\alpha_i \in \mathbb{F}$, ne svi jednaki 0, takvi da je $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$.

(b) Svaki skup koji sadrži 0 je zavisan.

(c) $\{x\}$ je nezavisan ako i samo ako je $x \neq 0$.

(d) Podskup nezavisnog skupa je nezavisan. Nadskup zavisnog je zavisan. (Ovo služi kao temelj definicije nezavisnosti za beskonačne skupove: kaže se da je beskonačan skup nezavisan ako je svaki njegov konačan podskup nezavisan.)

(e) Nezavisnost/zavisnost ne ovisi o poretku vektora.

(f) Niti jedan vektor osim 0 sam po sebi ne uzrokuje nezavisnost ili zavisnost skupa čiji je član. Primjer: $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, $\{\vec{i}, 2\vec{i}\}$.

(g) Dva nekolinearna vektora $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ bilo u $V^2(O)$, bilo u $V^3(O)$, čine nezavisan skup. Isto za tri nekomplanarna vektora u $V^3(O)$.

(h) Skup $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je zavisan ako i samo ako postoji bar jedan element iz S koji je linearna kombinacija preostalih. Ako je S zavisan i $x_1 \neq 0$ (i pritom S smatramo uređenim), onda postoji bar jedan element iz S koji je linearna kombinacija svojih prethodnika u S.

ZADATAK 2.7. Provjerite da je skup $\{e_1, \ldots, e_n\}$ nezavisan i u $\mathbb{R}^n$, i u $\mathbb{C}^n$.

RJEŠENJE

(a) po definiciji.

(b) uočimo da zaključak dobivamo "napamet" iz (h).

ZADATAK 2.8. Ispitajte nezavisnost skupa $\{a_1, a_2, a_3\}$ u $\mathbb{R}^3$ ako je $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$, $a_3 = (1, -2, 1)$.

RJEŠENJE

ZADATAK 2.9. Provjerite da je skup $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ nezavisan u $\mathcal{P}_n$.

RJEŠENJE Direktno iz (h).

ZADATAK 2.10. Neka su $a, b \neq 0$ proizvoljni vektori iz vektorskog prostora V. Tada je $\{a, b\}$ zavisan ako i samo ako je $b = \alpha a$, za neki $\alpha \in \mathbb{F}$.

RJEŠENJE To je upravo (h).

ZADATAK 2.11. Jesu li vektori $(1, 0, 0)$, $(i, 0, 0)$ nezavisni u $\mathbb{C}^3$? A u $\mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$?

ZADATAK 2.12. Odredite nužan i dovoljan uvjet na kompleksne brojeve x i y tako da je skup $\{(1, x), (2, y)\}$ zavisan u $\mathbb{C}^2$.

RJEŠENJE $y = 2x$

ZADATAK 2.13. Odredite nužan i dovoljan uvjet na kompleksne brojeve x, y, z tako da je skup $\{(1, x, x^2), (1, y, y^2), (1, z, z^2)\}$ zavisan u $\mathbb{C}^3$.

DZ 2.3. Provjerite jesu li sljedeći skupovi linearno nezavisni:

(a) $\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ u M_{mn}.

(b) $\{(1, 9, 7), (2, 1, 1), (-1, 8, 6)\}$ u $\mathbb{R}^3$.

(c) $\{(1,2,1,1),(1,0,1,1)\}$ u $\mathbb{C}^4$.

(d) $\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$ u $\mathbb{R}^4$.

(e) $\{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\}$ u $\mathcal{P}_3$.

(f) $\{f_1, f_2, f_3\}$ u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_1(x) = x^2 - 2x + 2$, $f_2(x) = x^2 + 2x - 7$, $f_3(x) = 3x - 9$.

(g) $\{e^x, e^{x+1}\}$ u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(h) $\{\sin^2 x, \frac{1}{2}, \cos^2 x\}$ u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(i) $\{e^x, x^3, \sin x\}$ u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

DZ 2.4. Odredite nužan i dovoljan uvjet na vektor $v \in \mathbb{R}^4$ tako da skup $\{e_1, e_2, e_3, v\}$ bude linearno nezavisan.
RJEŠENJE $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_4 \neq 0$. □

DZ 2.5. Neka je $\{x, y\}$ linearno nezavisan skup u vektorskom prostoru V. Neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}$. Odredite nužan i dovoljan uvjet da skup $\{\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y\}$ bude nezavisan.
RJEŠENJE Analizirajmo zavisnost. Prva mogućnost je $\alpha x + \beta y = 0$ odakle slijedi da je $\alpha = \beta = 0$. Druga mogućnost je $\gamma x + \delta y = \lambda(\alpha x + \beta y)$. Slijedi da je $\gamma = \lambda\alpha$, $\delta = \lambda\beta$. Obje mogućnosti mogu se iskazati uvjetom $\alpha\delta - \gamma\beta = 0$. To je dakle nužan uvjet zavisnosti. Vidi se da je i dovoljan. □

DZ 2.6. Neka je skup $\{x, y, z\}$ linearno nezavisan u V. Kakav je $\{x + y, y + z, z + x\}$?
RJEŠENJE

$$\alpha(x+y) + \beta(y+z) + \gamma(z+x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha+\gamma)x + (\alpha+\beta)y + (\beta+\gamma)z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje sustava je $\alpha = \beta = \gamma = 0$ pa je dani skup linearno nezavisan. □

2.2 Sustav izvodnica

DEFINICIJA 2.6. Skup $S \subset V$ je **sustav izvodnica** za V ako vrijedi $[S] = V$. Kako je

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i : \alpha_i \in \mathbb{F}, x_i \in S, k \in \mathbb{N} \right\},$$

ovo znači da se svaki vektor iz V može zapisati kao linearna kombinacija vektora iz S.
ČINJENICE 2.7. (a) Nadskup sustava izvodnica je opet sustav izvodnica (**skup generatora**).

(b) Trivijalno je $[V] = V$; umijeće je naći čim manji skup izvodnica.

(c) Primjer: dva nekolinearna vektora u $V^2(O)$, tri nekomplanarna vektora u $V^3(O)$.

(d) Primjer: $\{e_1, \dots, e_n\}$ za $\mathbb{R}^n$ (isto za $\mathbb{C}^n$).

(e) Ako je S sustav izvodnica za V i ako se neki vektor iz S može prikazati kao linearna kombinacija ostalih članova iz S, onda je i $S \setminus \{x\}$ sustav izvodnica za V.

(f) Biti sustav izvodnica za V nije ni u kakvoj uzročno posljedičnoj vezi s linearnom nezavisnošću/zavisnošću.

Primjer: tri vektora u $V^2(O)$, dva nekolinearna vektora u $V^3(O)$.

(g) Po definiciji kažemo da je V **konačnodimenzionalan** ako postoji bar jedan konačan sustav izvodnica za V. Naši standardni primjer su takvi, uočimo da $\mathcal{P}$ nije (nije niti $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, niti $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$). Još uočimo da je i $\{0\}$ konačnodimenzionalan na trivijalan način.

2.3 Baza

DEFINICIJA 2.8. (Konačan) linearno nezavisan sustav izvodnica naziva se **baza**.

ČINJENICE 2.9.

(h) Svaki konačnodimenzionalan prostor osim $\{0\}$ ima (konačnu) bazu.

(i) Baza nije jedinstvena; primjer: *svaka* dva nekolinearna vektora u $V^2(O)$ čine bazu.

(j) Sve baze za V su jednakobrojne. Taj broj nazivamo **dimenzija prostora** V, oznaka: $\dim V$.

(k) Ako je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ bilo koja baza za V, onda svaki vektor $v \in V$ ima (zašto?) jedinstven (zašto?) prikaz u obliku $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$.

(l) Svaki konačan sustav izvodnica za V može se reducirati do baze.

(m) Svaki linearno nezavisan skup u V može se nadopuniti do baze (Primjer: dva nekolinearna vektora u $V^3(O)$).

(n) Neka je $n = \dim V$.

Linearno nezavisni skupovi u V imaju $\leq n$ elemenata. Linearno nezavisan skup od n elemenata je nužno baza.

Sustavi izvodnica za V imaju $\geq n$ elemenata. Sustav izvodnica od n elemenata je nužno baza.

ZADATAK 2.14. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je baza za $\mathbb{R}^n$, također i za $\mathbb{C}^n$.

ZADATAK 2.15. $\{1, t, \ldots, t^n\}$ je baza za $\mathcal{P}_n$.

ZADATAK 2.16. $\{(1,1), (2,1)\}$ je baza za $\mathbb{R}^2$. Provjerite.

ZADATAK 2.17. $\{(1,1,8), (1,1,2), (1,0,1)\}$ je baza za $\mathbb{R}^3$. Provjerite.

ZADATAK 2.18. $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,-1,0)\}$ je baza za $\mathbb{R}^3$. Prikažite u njoj proizvoljni $v \in \mathbb{R}^3$.

RJEŠENJE

$$v = (x_1, x_2, x_3) = x_3(1,1,1) + \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)(1,1,0) + \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)(1,-1,0).$$

ZADATAK 2.19. Zašto je kanonska baza kanonska?

ZADATAK 2.20. $\{(1,0), (0,1)\}$ nije baza za $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$. $\{(1,0), (0,1), (i,0), (0,i)\}$ je baza za $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$. Dakle, $\dim \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}} = 4$.

DZ 2.7. Provjerite da je $\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ baza za M_{mn}. Zašto je kanonska?

DZ 2.8. Je li skup $\{(1,1,0),(1,0,0)\}$ nezavisan/sustav izvodnica/baza za $\mathbb{R}^3$? Isto pitanje za skup $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0),(1,-1,1)\}$.

DZ 2.9. Provjerite da je $\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ baza za $\mathbb{R}^4$ i prikažite u njoj proizvoljan vektor $v \in \mathbb{R}^4$.

DZ 2.10. Nađite jednu bazu i dimenziju za $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$.

DZ 2.11. Nađite bazu i dimenziju za A, prostor aritmetičkih nizova.

Rješenje

$$(a, a+d, a+2d, \ldots) = a(1,1,1,\ldots) + d(0,1,2,\ldots).$$

□

DZ 2.12. Neka je $\{a,b\}$ baza za V (dakle, $\dim V = 2$). Uz koji uvjet na $c \in V$ će i skup $\{a,c\}$ biti baza za V?

Rješenje $\{a,c\}$ je baza ako i samo ako taj skup nije linearno zavisan, a to vrijedi ako i samo ako je $c \neq \lambda a$. Iz $c = \alpha a + \beta b$ slijedi da je $\{a,c\}$ baza ako i samo ako je $\beta \neq 0$.
Ili
$c = \alpha a + \beta b$, za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Ako je $\beta = 0$, onda je $\{a, \beta a\}$ zavisan skup. Dakle, $\beta \neq 0$ je nužan uvjet. Je li i dovoljan?

$$A(\alpha a + \beta b) + Ba = 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha A + B)a + \beta A b = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha A + B = 0, \beta A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B = 0.$$

Dakle, to je i dovoljan uvjet. □

DZ 2.13. Isto pitanje kao prethodno za bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ i skup $\{b_1, \ldots, b_{n-1}, c\}$.

Rješenje Nužan i dovoljan uvjet je da je $\gamma_n \neq 0$, gdje je $c = \sum_{i=1}^n \gamma_i b_i$. □

DZ 2.14. Neka je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ baza za V i definirajmo $b_{n+1} = -b_1 - b_2 - \ldots - b_n$. Dokažite da se svaki vektor $v \in V$ može, i to na jedinstven način, prikazati u obliku $v = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i b_i$, pri čemu je $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$.

Rješenje Neka je $v \in V$ proizvoljan, $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$. Uočimo da je $\forall \beta \in \mathbb{F}$

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i + \beta b_{n+1} - \beta b_{n+1} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta) b_i + \beta b_{n+1}$$

pa se v može prikazati pomoću vektora $b_1, \ldots, b_{n+1}$, ali bez dodatnog uvjeta, na beskonačno mnogo načina.
Sada želimo riješiti jednadžbu $\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta) + \beta = 0$ po β. Očito je jedino rješenje $\beta = -\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

□

Zadatak 2.21. Skup $\{(1,1,0)\}$ nadopuniti do baze prostora $\mathbb{R}^3$.

Rješenje Gledamo $\{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ (dodali smo kanonsku bazu početnom skupu). Jedna nadopuna je $\{a, e_1, e_3\}$. Uočimo nejedinstvenost: drugo moguće rješenje je $\{a, e_2, e_3\}$. □

DZ 2.15. Nadopunite $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ do baze od M_2.

DZ 2.16. Nadopunite $\{(1,1,1,1),(1,-1,-1,-1)\}$ do baze za $\mathbb{R}^4$.

2.4 Potprostor

DEFINICIJA 2.10. $M \subseteq V$ je **potprostor** od V, oznaka $M \leq V$, ako je M i sam vektorski prostor s naslijeđenim operacijama.

ČINJENICE 2.11. (a) Trivijalni potprostori su $\{0\}$ i V. Uvijek je za $M \leq V$, $\dim M \leq \dim V$.

(b) $M \leq V$, $\dim M = \dim V \Leftrightarrow M = V$.

(c) Za $M \subseteq V$ vrijedi $M \leq V$ ako i samo ako je $\alpha x + \beta y \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall x, y \in M$, ako i samo ako $x + y \in M$, $\forall x, y \in M$ i $\alpha x \in M$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$.

Uvijek je $0 \in M$.

(d) $M_1, M_2 \leq V \Rightarrow M_1 \cap M_2 \leq V$.

ZADATAK 2.22. Pokažite da je $M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^3$, nađite mu bazu i dimenziju.

RJEŠENJE

$$x \in M \quad \Rightarrow \quad x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_3, x_3) = (x_1, x_1, 0) + (0, x_3, x_3) = x_1(1, 1, 0) + x_3(0, 1, 1).$$

Vektori $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$ očito pripadaju M, razapinju ga i nezavisni su. Dakle, $\dim M = 2$.

ZADATAK 2.23. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 - 2x_4 = 0\}$.

RJEŠENJE

$$x \in M \quad \Rightarrow \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1, x_1, x_3, \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right) = x_1(1, 1, 0, 1) + x_3(0, 0, 1, 0).$$

ZADATAK 2.24. Neka je U skup svih gornjetrokutastih matrica u $M_n(\mathbb{R})$ (ili $M_n(\mathbb{C})$).

$$A = (a_{ij}) \in U \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = 0, \quad \forall i < j.$$

Pokažite da je $U \leq M_n$ i nađite mu jednu bazu i dimenziju.

RJEŠENJE $\dim U = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

ZADATAK 2.25. Za matricu $A \in M_n$, $A = (a_{ij})$ definiramo **transponiranu matricu** $A^t = (b_{ij})$ formulom $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$.

U M_2 definiramo $S = \{A \in M_2 : A^t = A\}$, $L = \{A \in M_2 : A^t = -A\}$. Provjerite da su to potprostori od M_2 i nađite im po jednu bazu i dimenziju.

RJEŠENJE Najprije općenito pokazati da vrijedi $(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $A, B \in M_n$. Sada je jasno da je $S, L \leq M_2$.

$$A \in S \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dim S = 3.$$

$$A \in L \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dim L = 1.$$

ZADATAK 2.26. Je li $M = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 - 2\overline{z_2} = 0\}$ potprostor od $\mathbb{C}^2$?

RJEŠENJE Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in M$. Sada je $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2) \in M$ ako i samo ako je

$$\alpha x_1 + \beta y_1 - 2\overline{\alpha x_2 + \beta y_2} = \alpha x_1 - 2\overline{\alpha x_2} + \beta y_1 - 2\overline{\beta}\overline{y_2} = 0,$$

a to općenito ne vrijedi. Konkretno, nije problem u zbrajanju, već u množenju skalarom. Na primjer, $x = (2 + 2i, 1 - i) \in M$, ali $i \cdot x = (-2 + 2i, 1 + i) \notin M$.
Sada primjetimo da gornji račun pokazuje da sve štima ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dakle, $M \leq \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$. Još vrijedi

$$v = (z_1, z_2) \in M \quad \Leftrightarrow \quad v = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2),\ 2(x_2 - iy_2) = x_1 + iy_1,$$

tj. $2x_2 = x_1$, $-2y_2 = y_1$, a to vrijedi ako i samo ako je

$$v = \left(x_1 + iy_1, \frac{1}{2}x_1 - i\frac{1}{2}y_1\right) = x_1\left(1, \frac{1}{2}\right) + y_1\left(i, -\frac{i}{2}\right).$$

□

ZADATAK 2.27. U $\mathbb{R}^4$ su dani vektori $a_1 = (1, 1, 2, 2)$, $b_1 = (1, 0, 0, 1)$, $a_2 = (2, 1, 2, 3)$, $b_2 = (0, 1, 2, 1)$. Neka je $M_1 = [\{a_1, b_1\}]$, $M_2 = [\{a_2, b_2\}]$. Dokažite da je $M_1 = M_2$.

RJEŠENJE Jasno je da zapravo imamo baze za M_1, M_2. Zato je $\dim M_1 = \dim M_2 = 2$ pa je dovoljno vidjeti da je $M_1 \subseteq M_2$ (ili $M_2 \subseteq M_1$). Dovoljno je, dalje, vidjeti $a_2, b_2 \in M_1$ jer M_1 kao vektorski prostor tada mora sadržavati i sve njihove linearne kombinacije. Sada se računa $a_2 = a_1 + b_1$, $b_2 = a_1 - b_1$. □

ZADATAK 2.28. Presjek bilo koje množine potprostora od V je opet potprostor od V.

ZADATAK 2.29. Za $S \subseteq V$ vrijedi $[S] = \bigcap_{S \subseteq M \leq V} M$. Specijalno, uvijek je $[S] \leq V$.

DZ 2.17. Koji od navedenih skupova su potprostori od $\mathbb{R}^n$? Za one koji jesu nađite po jednu bazu i dimenziju.

$$\begin{aligned}
A &= \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}, \forall i\} \\
B &= \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = 2x_2\} \\
C &= \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\} \\
D &= \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0\right\} \\
E &= \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\} \\
F &= \{(x_1, \ldots, x_n) : x_{2i} = 0, \forall i\} \\
G &= \{(x_1, \ldots, x_n) : x_2 = x_4 = \ldots = x_{2i} = \ldots\}
\end{aligned}$$

DZ 2.18. Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$. Koje uvjete moraju zadovoljavati ovi brojevi da bi skup $M = \{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \beta\}$ bio potprostor?

DZ 2.19. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - 2x_2 - x_4 = 0\} \leq \mathbb{R}^4$. Baza i dimenzija?

DZ 2.20. Neka je L skup svih donjetrokutastih matrica u M_n- Dokažite da je to potprostor od M_n, nađite mu jednu bazu i dimenziju.

DZ 2.21. Neka je D skup dijagonalnih matrica u M_n. Isto kao gore.

DZ 2.22. Dokažite da su $X = \{A \in M_n : A^t = A\}$ i $Y = \{A \in M_n : A^t = -A\}$ potprostori od M_n, nađite im po jednu bazu i dimenziju.

DZ 2.23. $M = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(5) = 0\} \leq \mathcal{P}_3$. Baza i dimenzija?

DZ 2.24. Neka u V vrijedi $x + y + z = 0$. Dokažite da je $[\{x, y\}] = [\{y, z\}]$.

DZ 2.25. $M = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \ldots = x_{n-1} - x_n = x_n - x_1\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dokažite da je $M \leq \mathbb{R}^n$, nađite mu neku bazu i nadopunite je do baze za $\mathbb{R}^n$.

DZ 2.26. Neka je $M \leq V$, $M \neq \{0\}, V$. Pokažite da postoji baza za V čiji niti jedan član ne leži u M. Uputa: pokušajte zamisliti/konstruirati bazu za $V^3(O)$ čiji niti jedan član ne leži u xy–ravnini.

Rješenje Neka je $\{a_1, \ldots, a_k\}$ jedna baza za M, pri čemu je $1 \leq k < n = \dim V$. Nadopunimo je do baze $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ za V i gledamo skup $\{a_1 + a_n, \ldots a_k + a_n, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$. Lako se vidi da je nezavisan i kako sadrži točno n elemenata, on je baza za V.
Uočimo da nijedan od vektora $a_{k+1}, \ldots, a_n$ ne leži u M (jer bi tada skup $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ bio zavisan). Također, nijedan od vektora $a_1 + a_n, \ldots, a_k + a_n$ ne leži u M.
Pouka zadatka je da ne možemo *a priori* računati na to da će baza za V u sebi sadržavati bazu za M. No, to možemo postići ako krenemo od baze za M pa je nadopunimo do baze za V.

2.5 Suma i presjek potprostora

Definicija 2.12. Za $L, M \leq V$ definira se **suma potprostora** L i M kao $L + M = [L \cup M]$. Kažemo da je suma **direktna** ako je $L \cap M = \{0\}$ i tada pišemo $L \dotplus M$.

Činjenice 2.13.

(a) $L + M = \{a + b : a \in L, b \in M\}$. Rastav $x = a + b$ svih vektora $x \in L + M$ je jedinstven ako i samo ako je suma direktna.

(b) $\dim L + M = \dim L + \dim M - \dim L \cap M$.

(c) Ako je $L \dotplus M = V$, kaže se da je M direktan komplement za L (i obratno).

Zadatak 2.30. Gornjetrokutaste U i donjetrokutaste L matrice u M_2. Pokazati da je $U + L = M_2$, demonstrirati nejedinstvenost dekompozicije.

DZ 2.27. Isto u M_n.

Zadatak 2.31. Simetrične X i antisimetrične Y matrice u M_2. Pokazati da je $X \dotplus Y = M_2$. Posljedica: svaka kvadratna matrica se na jedinstven način može prikazati kao zbroj jedne simetrične i jedne antisimetrične matrice.

DZ 2.28. Isto u M_n.

Zadatak 2.32. Za $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_3 - x_4 = 0, x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$ provjeriti da je potprostor i naći mu neki direktan komplement.

Rješenje Vrijedi da je $x \in M$ ako i samo ako je

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 + x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4) = x_3(1, 1, 1, 0) + x_4(1, -2, 0, 1).$$

Dakle je $\{(1, 1, 1, 0), (1, -2, 0, 1)\}$ jedna baza za M, sad je treba dopuniti do baze za $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \underbrace{(1, 1, 1, 0)}_{=:a}, \underbrace{(1, -2, 0, 1)}_{=:b}, e_1, e_2, \cancel{e_3}, \cancel{e_4} \right\}.$$

Očito su $\{a, b, e_1\}$ i $\{a, b, e_1, e_2\}$ nezavisni i zato možemo uzeti $L = [\{e_1, e_2\}]$ kao direktni komplement. $\square$

Općenito komplement dobijemo kao linearnu ljusku onih vektora koji bazu od M nadopunjuju do baze cijelog prostora. Jasno je da je rješenje nejedinstveno – vidi se iz postupka. Na primjeru $V^2(O)$ vidimo nejedinstvenost i zorno.

Napomena 2.14. Ako imamo $L \dotplus M = V$ i ako imamo baze $\{a_1, \ldots, a_m\}$ i $\{b_1, \ldots, b_l\}$ za M i L, onda je $\{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_l\}$ baza za V. Demonstrirati!
Uočimo da stvar bitno ovisi o direktnosti sume.

Uzmimo sad bazu $\{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_l\}$ kao gore, neka je $1 \leq m < \dim V$. Definiramo $c_1 = b_1 + a_1$, $\ldots$, $c_l = b_l + a_1$ i odmah vidimo da je skup $\{a_1, \ldots, a_m, c_1, \ldots, c_l\}$ nezavisan, dakle i baza za V. Prostor $K = [\{c_1, \ldots, c_l\}]$ je također jedan direktan komplement za M. Jasno je da je $K \neq L$ jer ako bi npr. imali $c_1 \in L$, vrijedilo bi $c_1 = b_1 + a_1 = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j b_j$ i slijedilo bi da je $a_1 \in L$ pa je $a_1 \in M \cap L = \{0\}$ što je nemoguće.
Zbog nejedinstvenosti direktnog komplementa nije korektna oznaka $V \dot{-} M$.

Kako nalazimo bazu presjeka (i sume) potprostora?
Neka su dani potprostori M i L od V, neka su dane baze $\{a_1, \ldots, a_m\}$ i $\{b_1, \ldots, b_l\}$ za M i L, dakle $\dim M = m$, $\dim L = l$. Skup $\{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_l\}$ je očito sistem izvodnica za $M + L$.

- Ako je linearno nezavisan, onda je i baza za $M + L$ pa je $\dim M + L = m + l = \dim M + \dim L$ pa slijedi da je $\dim M \cap L = 0$, tj. $M \cap L = \{0\}$.

- Ako je zavisan (uočimo $a_1 \neq 0$), nađimo vektor koji je linearna kombinacija prethodnika; to nije nijedan od a–ova, dakle to je neki b_i. Izbacimo ga van i ono što je ostalo još uvijek je sistem izvodnica za $L + M$. Postupak nastavimo.

  Recimo da smo proveli takvih k koraka dok na kraju nismo dobili nezavisan skup, time i bazu za $L + M$. Očito je $k \leq l$. Ako je $k = l$, svi b–ovi su izbačeni i slijedi da je $M + L = M$, tj. $L \leq M$.

  Ostaje razmotriti slučaj $k < l$. Nije smanjenje općenitosti ako pretpostavimo da su izbačeni $b_1, \ldots, b_k$. Dakle, $\{a_1, \ldots, a_m, b_{k+1}, \ldots, b_l\}$ je baza za $M + L$. Sad svaki od $b_1, \ldots, b_k$ kao element od $L \subseteq M + L$ dopušta rastav u toj bazi u obliku

$$b_r = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,r} a_i + \sum_{j=k+1}^{l} \beta_{j,r} b_j =: e_r + f_r, \quad r = 1, \ldots, k.$$

  Pogledajmo vektore $e_1, \ldots, e_k$. Očito su u $M \cap L$, tvrdimo da zapravo čine bazu za $M \cap L$. To vrijedi jer je $\dim M \cap L = \dim M + \dim L - \dim M + L = m + l - (m + l - k) = k$ pa vidimo da samo treba dokazati njihovu nezavisnost.

$$\sum_{r=1}^{k} \gamma_r e_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{r=1}^{k} \gamma_r (b_r - f_r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \ldots + \gamma_k b_k + \bullet \cdot b_{k+1} + \bullet \cdot b_{k+2} + \ldots + \bullet \cdot b_l = 0.$$

  Slijedi da su svi koeficijenti 0, posebno $\gamma_1 = \ldots = \gamma_k = 0$.

Zadatak 2.33 (ilustracija algoritma). Neka su M i L zadani svojim bazama $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$ i $b_1 = (1, 0, 0)$, $b_2 = (0, 0, 1)$. Odrediti baze za $M + L$ i $M \cap L$.

RJEŠENJE Skup $\{(1,0,1),(1,2,1),(1,0,0),(0,0,1)\}$ je zavisan jer sadrži 4 vektora. Jasno je da je b_1 nezavisan s a_1, a_2 pa je $\{a_1,a_2,b_1\}$ baza za $M+L$. Sad preostaje b_2 prikazati u toj bazi i uzeti mu M–komponentu.

$$(0,0,1)=\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(1,2,1)+\beta(1,0,0)$$

Dobije se $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0$, $\beta=-1$ pa je $1\cdot(1,0,1)+0\cdot(1,2,1)=(1,0,1)$ baza za $M\cap L$.

DZ 2.29. Za $M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1+x_2+x_3+x_4=0,x_2-x_3+x_4=0\}$ naći bazu i neki direktan komplement.

DZ 2.30. Zadani su $M,L\leq\mathbb{R}^4$ svojim bazama $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,1,-1,-1)$, $a_3=(1,-1,1,-1)$, te $b_1=(1,-1,-1,1)$, $b_2=(2,-2,0,0)$, $b_3=(3,-1,1,1)$. Nađite baze za $M+L$ i $M\cap L$.

DZ 2.31. Neka je $M=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\sum_{i=1}^n x_i=0\}$, $L=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:x_i=x_j,\forall i,j\}$. Dokažite da je L direktan komplement za M i nađite još jedan, različit od L direktan komplement za M.

RJEŠENJE Vrijedi da je $x\in M$ ako i samo ako je

$$\begin{aligned}x&=(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)=(x_1,\ldots,x_{n-1},-x_1-\ldots-x_{n-1})\\&=x_1(1,0,\ldots,0,-1)+x_2(0,1,0,\ldots,0,-1)+\ldots+x_{n-1}(0,0,\ldots,1,-1).\end{aligned}$$

Baza za M je $\{(1,0,\ldots,0,-1),(0,1,0,\ldots,0,-1),\ldots,(0,0,\ldots,1,-1)\}$, $\dim M=n-1$.
Vrijedi da je $x\in L$ ako i samo ako je

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1,x_1,\ldots,x_1)=x_1(1,1,\ldots,1)$$

pa je $\{(1,1,\ldots,1)\}$ baza za L, a $\dim L=1$.
Vrijedi da je L direktan komplement od M ako i samo ako je $L\dot{+}M=\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je $L+M=\mathbb{R}^n$, $L\cap M=\{0\}$.
Gledamo $L\cap M$. Vrijedi da je $x\in L\cap M$ ako i samo ako je $x_1=x_2=\ldots=x_n$ i $\sum x_i=0$. Dakle, $nx_1=0$ pa je $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Dobili smo da je $L\cap M=\{0\}$, a kako je $\dim(L+M)=\dim L+\dim M=n-1+1=n$, onda je $L+M=\mathbb{R}^n$.
Primijetimo da nije bilo potrebno dokazivati obje stvari ($L+M=\mathbb{R}^n$, $L\cap M=\{0\}$). Zahvaljujući tome što znamo dimenzije, jedno povlači drugo. Puno je lakše dokazati da je $L\cap M=\{0\}$.

DZ 2.32. Neka su $M,L,K\leq V$. Pokažite da je $(M\cap L)+(M\cap K)\subseteq M\cap(L+K)$. Vrijedi li jednakost?

RJEŠENJE Ako je $x\in(M\cap L)+(M\cap K)$, onda ima oblik $x=a+b$, gdje su $a\in M\cap L$, $b\in M\cap K$. Očito je $a+b\in M$ (jer su oba iz M, a M je potprostor), također je $a+b\in L+K$ (jer je $a\in L$, $b\in K$). Dakle je $a+b\in M\cap(L+K)$.
Jednakost općenito ne vrijedi. Uzmimo u $\mathbb{R}^2$ $M=[(1,1)]$, $L=[(1,0)]$, $K=[(0,1)]$. Sad je $M\cap L=M\cap K=\{0\}$, dok je $M\cap(L+K)=M\cap\mathbb{R}^2=M$.

DZ 2.33. Neka je $\dim V=n$, neka su $M,L\leq V$, $1\leq\dim M=\dim L<n$. Dokažite da M i L imaju zajednički direktan komplement.

RJEŠENJE Postupimo kao kod dokaza teorema o dimenziji sume.
Neka je $\{a_1,\ldots,a_k\}$ baza za $M\cap L$. Nadopunimo je do baze za M i L: $B_M=\{a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_r\}$, $B_L=\{a_1,\ldots,a_k,c_1,\ldots,c_r\}$. Vrijedi da je $k+r=\dim M=\dim L$.
Sad iz dokaza spomenutog teorema znamo da je $\{a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_r,c_1,\ldots,c_r\}$ baza za $M+L$. I ovu bazu nadopunimo do baze cijelog prostora V: $B=\{a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_r,c_1,\ldots,c_r,v_1,\ldots,v_s\}$.
Uočimo da je $\dim M=\dim L=k+r$, $\dim V=k+r+r+s$ pa traženi komplement ima dimenziju $r+s$.

Tvrdimo da $N = [\{b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots, b_r + c_r, v_1, \ldots, v_s\}]$ ima svojstvo da je $M \dot{+} N = V$, $L \dot{+} N = V$. Jasno je da je $M \cap N = \{0\} = L \cap N$. Naime, ako je $x \in M \cap N$, onda je

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i b_i = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i (b_i + c_i) + \sum_{i=1}^{s} \delta_i v_i.$$

Zbog nezavisnosti elemenata baze B slijedi $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 0$, $\delta_i = 0$, $\forall i$. Dakle, $x = 0$. Analogno se dobije $L \cap N = \{0\}$.
Slično se zaključi da je $\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r, b_1 + c_1, \ldots, b_r + c_r, v_1, \ldots, v_s\}$ baza za V (nezavisnost dobijemo kao gore, a kardinalitet je pravi). Dakle, dobili smo direktan komplement za M. Argument za L je isti. $\square$