# Sadržaj

# Poglavlje 1

# Jednadžbe 1. reda s konstantnim koeficijentima

Krećemo s najjednostavnijom parcijalnom diferencijalnom jednadžbom, linearnom jednadžbom 1. reda s konstantnim koeficijentima (često se zbog fizikalne interpretacije koristi naziv *transportna jednadžba*):

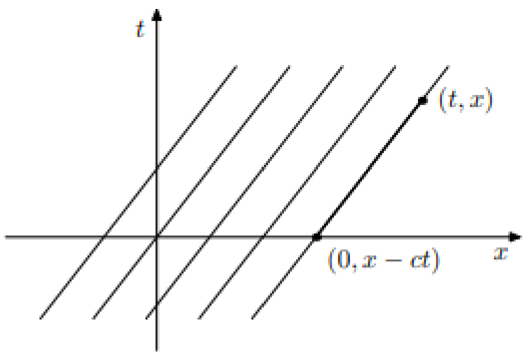
$$u_t + cu_x = 0, \quad \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

gdje je $c \in \mathbb{R}$ neka konstanta, a $u : \mathbb{R} \times [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ nepoznata funkcija.

Pretpostavimo sada da je funkcija $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ rješenje jednadžbe te pokušajmo doći do eksplicitnog izraza za $u$. Primijetimo kako jednadžbu možemo drugačije zapisati

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Drugim riječima, funkcija $u = u(x,t)$ je konstantna duž pravaca smjera $\begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix}$.




Dakle, ukoliko znamo vrijednost funkcije $u$ za barem jednu točku svakog takvog pravca, možemo odrediti vrijednost za proizvoljnu točku. Stoga ćemo promotriti sljedeću

**početnu zadaću**:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u = g, & \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

gdje je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unaprijed zadana funkcija. Svaka točka $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ leži na pravcu oblika $x - ct = x_0$, za neki $x_0 \in \mathbb{R}$. Uzveši u obzir prethodna razmatranja, imamo

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = g(x_0) = g(x - ct).$$

Dakle, jedini kandidat za rješenje je dan gornjom formulom. Ako je $g \in C^1$, onda je ovom formulom očito dano $C^1$ rješenje početne zadaće. U suprotnom klasično rješenje ne postoji (o drugim oblicima rješenja ćemo govoriti više na kolegiju PDJ2).

**Zadatak 1.1.1.** *Pokažite da za $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $f \in C(\mathbb{R}^2)$ postoji točno jedno rješenje početne zadaće te izvedite formulu za rješenje*

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = g. \end{cases}$$

*Rješenje.* Prije same egzistencije rješenja, pokazat ćemo da, ukoliko ono postoji, mora biti jedinstveno. Način na koji ćemo to napraviti je standardan za **linearne** jednadžbe. Pretpostavimo da su $u_1, u_2$ dva rješenja. Tada $u := u_1 - u_2$ zadovoljava

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = 0. \end{cases}$$

Prethodni rezultat nam tada daje $u = 0$, odnosno $u_1 = u_2$.
Izvedimo sada formulu za rješenje (kojom ćemo ujedno i pokazati egzistenciju). Ovdje bismo također mogli ponoviti pristup iz prethodnog problema, no pokazat ćemo jedan drugačiji način koji će biti motivacija i za neke kompliciranije primjere kasnije. Želimo uvesti zamjenu varijabli

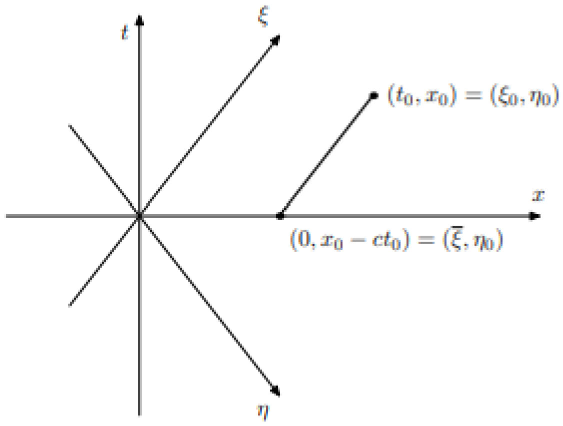
$$\begin{cases} \xi = \xi(x, t) \\ \eta = \eta(x, t) \end{cases}$$

takvu da diferencijalna jednadžba u novim koordinatama postane jednostavnija. S obzirom da je problem linearan, te zbog već viđene uloge pravaca smjera $(c, 1)$, pogodna je linearna zamjena varijabli

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct.$$

Također, definiramo funkcije u novim varijablama:

$$v(\xi, \eta) := u(x, t), \quad \tilde{f}(\xi, \eta) := f(x, t).$$




Uvjerimo se da smo stvarno na ovaj način došli do jednostavnijeg problema. Imamo

$$\begin{aligned} u_t &= cv_\xi - cv_\eta \\ u_x &= v_\xi + v_\eta, \end{aligned}$$

pa zbog $\tilde{f} = f = u_t + cu_x = 2cv_\xi$ vidimo da funkcija $v$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$v_\xi(\xi, \eta) = \frac{1}{2c}\tilde{f}(\xi, \eta).$$

Ovo je sada ODJ prvog reda (po $\xi$ varijabli) pa rješenje $v$ u točki $(\xi_0, \eta_0)$ dobivamo integriranjem od točke $(\overline{\xi}, \eta_0)$ do $(\xi_0, \eta_0)$ što daje

$$v(\xi_0, \eta_0) = v(\overline{\xi}, \eta_0) + \frac{1}{2c}\int_{\overline{\xi}}^{\xi_0} \tilde{f}(\xi, \eta_0) d\xi.$$

Preostaje nam još vratiti se u originalne koordinate. Imamo

- $v(\xi_0, \eta_0) = u(x_0, t_0)$,
- $v(\overline{\xi}, \eta_0) = u(x_0 - ct_0, 0)$,
- $\tilde{f}(\xi, \eta_0) = f\big(\frac{\xi+\eta_0}{2}, \frac{\xi-\eta_0}{2c}\big)$,

što daje

$$u(x_0, t_0) = u(x_0 - ct_0, 0) + \frac{1}{2c}\int_{\overline{\xi}}^{\xi_0} f\Big(\frac{\xi + \eta_0}{2}, \frac{\xi - \eta_0}{2c}\Big) d\xi.$$

Preostaje još vratiti se u stare varijable pod integralom: $\begin{bmatrix} t = \frac{\xi-\eta_0}{2c} & dt = \frac{1}{2c}d\xi \\ \xi = \overline{\xi} & t = \frac{\overline{\xi}-\eta_0}{2c} = 0 \\ \xi = \xi_0 & t = \frac{\xi_0-\eta_0}{2c} \end{bmatrix}$ što konačno daje

$$u(x_0, t_0) = g(x_0 - ct_0) + \int_0^{t_0} f(x_0 - ct_0 + ct, t) dt$$

Direktnom provjerom zaista se možemo uvjeriti da je time dano rješenje početnog problema. ■

Za vježbu, pokažite analogan rezultat u slučaju kada je prostorna varijabla $x$ u više dimenzija (**Uputa:** ponovno promotrite ponašanje rješenja duž odgovarajućih pravaca).

**Zadatak 1.1.2.** *Pokažite da za $c \in \mathbb{R}^n, f \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ i $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ postoji jedinstveno rješenje početne zadaće*

$$\begin{cases} u_t + c \cdot \nabla u = f, \\ u(\cdot, 0) = g. \end{cases}$$

Pokažimo još kako tehnikom prikazanom u prethodnom primjeru možemo riješiti i polulinearnu jednadžbu u kojoj su koeficijenti uz derivacije konstantni.

**Zadatak 1.1.3.** *Zadana je polulinearna početna zadaća*

$$\begin{cases} u_t + cu_x + u^2 = 0, & na\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = g, \end{cases}$$

*gdje je $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ te $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $g \neq 0$. Pokažite da postoji lokalno rješenje $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \langle -\delta, \delta \rangle)$. Može li se to rješenje proširiti do $C^\infty$ rješenja na čitavom $\mathbb{R}^2$?*

*Rješenje.* Kako je dio s derivacijama najvišeg reda (prvog) isti kao i u prethodnim primjerima, koristimo se istom zamjenom varijabli kako bi se taj dio sveo na parcijalne derivacije po samo jednoj od varijabli. Uz iste oznake kao i prije dobivamo

$$0 = u_t + cu_x + u^2 = 2cv_\xi + v^2,$$

odnosno

$$v_\xi = -\frac{1}{2c}v^2.$$

Ponovno je riječ o ODJ prvog reda u $\xi$ varijabli, za čije rješavanje koristimo metodu separacije varijabli:

$$\frac{dv}{d\xi} = -\frac{1}{2c}v^2$$
$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{2c}d\xi,$$

odakle integriranjem slijedi

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{2c}\xi + C,$$

odnosno

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{\frac{1}{2c}\xi + C(\eta)}.$$

Rješenje ćemo imati na nekoj okolini točke $(\overline{\xi}, \eta)$ ukoliko je bilo

$$0 \neq v(\overline{\xi}, \eta) = v(\eta, \eta) = u(x - ct, 0) = g(x - ct) = g(\eta).$$

U tom slučaju odredimo $C(\eta)$:

$$g(\eta) = v(\eta, \eta) = \frac{1}{\frac{1}{2c}\eta + C(\eta)},$$

iz čega slijedi

$$C(\eta) = \frac{1}{g(\eta)} - \frac{1}{2c}\eta,$$

odnosno

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{\frac{1}{2c}(\xi - \eta) + \frac{1}{g(\eta)}}.$$

Povratkom u originalne koordinate konačno dobivamo

$$u(x,t) = \frac{1}{t + \frac{1}{g(x-ct)}} = \frac{g(x-ct)}{1 + tg(x-ct)}.$$

Primijetimo kako u ovom obliku rješenje ima smisla i u onim točkama gdje je $g = 0$. Direktnom provjerom se može provjeriti da je ovako definirana funkcija zaista rješenje početnog problema. Preostaje nam još osigurati da je ono dobro definirano za male $t$-ove. Za to je dovoljno pokazati da postoji $\delta > 0$ takav da nazivnik nije nula za $|t| < \delta$. Kako je $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ona je posebno i ograničena pa postoji $M > 0$ takav da je $|g(x)| \leq M$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Sada imamo

$$|1 + tg(x - ct)| \geq 1 - |t||g(x-ct)| \geq 1 - M \cdot |t|,$$

pa stavljanjem $\delta := \frac{1-\varepsilon}{M}$ za $|t| < \delta$ imamo

$$|1 + tg(x-ct)| \geq \varepsilon > 0.$$

Pokažimo sada da se ovako dobiveno rješenje ne može proširiti do glatkog na cijelom $\mathbb{R}^2$. S obzirom da je $g \neq 0$, postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $g(x_0) \neq 0$. Tada za $t = -\frac{1}{g(x_0)}$ i $x$ takav da je $x - ct = x_0$ imamo

$$1 + tg(x-ct) = 0,$$

pa vidimo da se rješenje ne može proširiti do trenutka $t = -\frac{1}{g(x_0)}$. ■

# Poglavlje 2

# Kvazilinearne jednadžbe 1. reda

## 2.1 Metoda karakteristika

U prethodnom smo dijelu vidjeli kako zadani PDJ možemo svesti na jednostavniji problem koristeći se geometrijskim argumentima, odnosno poznavanjem ponašanja rješenja duž neke krivulje. Sada ćemo na sličan način pristupiti i široj klasi problema. Radi jednostavnije geometrijske interpretacije, fokusirat ćemo se na problem u kojem je tražena funkcija $u$ funkcija dvije varijable, no sam pristup i princip dokaza je analogan u više dimenzija.

Promatramo **kvazilinernu jednadžbu 1. reda** oblika

$$a(x, y, u) \cdot \nabla u(x, y) = b(x, y, u) \tag{2.1}$$

pri čemu su $a = a(x, y, z) = \begin{bmatrix} a_1(x, y, z) \\ a_2(x, y, z) \end{bmatrix}$ i $b = b(x, y, z)$ zadane $C^1$ funkcije, te $u = u(x, y)$ nepoznata funkcija. Domene zasad ne preciziramo, no one će naravno biti neki otvoreni skupovi.

Pretpostavimo da je funkcija $u$ $C^1$ rješenje (2.1), te označimo s $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ graf funkcije $u$. Kao ploha je taj graf implicitno zadan s $F(x, y, z) = 0$, gdje je $F(x, y, z) = u(x, y) - z$. Normala na graf u točki $(x, y, z)$ je tada dana s $\nabla F(x, y, z) = \begin{bmatrix} \nabla u(x, y) \\ -1 \end{bmatrix}$. Primijetimo sada kako jednadžbu možemo zapisati na sljedeći ekvivalentan način:

$$\begin{bmatrix} a(x, y, u) \\ b(x, y, u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla u \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$$

Iz prethodnoga zaključujemo kako je vektorsko polje $\begin{bmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \end{bmatrix}$ okomito na normalu u svakoj točki grafa. Dakle, to je polje tangencijalno na tu plohu u svakoj njenoj točki. Geometrijski gledano, možemo očekivati sljedeće: ako se nalazimo u točki koja je na grafu rješenja, te se iz te točke nastavimo kretati (koliko je to moguće) u smjeru koje nam određuje vektorsko polje $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ dobit ćemo krivulju koja u cijelosti leži na grafu. Dakle, ako znamo vrijednost rješenja u nekom dovoljno dobrom dijelu grafa, na ovaj način bismo trebali opisati graf funkcije.

Pretpostavimo sada da imamo zadane neke "početne" uvjete na funkciju $u$, tj da tražimo rješenje (2.1) koje zadovoljava $u\big|_S = u_0$, gdje je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ zadana parametrizirana krivulja, te neka je $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$ njena parametrizacija. Ako je $u$ rješenje (2.1), onda se krivulja $s \mapsto (\gamma(s), u(\gamma(s))$ nalazi na grafu rješenja, te želimo na maloprije opisani način pokušati izgraditi ostatak grafa barem na nekoj okolini te krivulje.

**Definicija 2.1.1.** *Za parametriziranu krivulju $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ kažemo da je* ***integralna krivulja*** *vektorskog polja $X$ na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ako vrijedi*

- *$\alpha(t) \in \Omega$ za sve $t \in J$,*
- *$X(\alpha(t)) = \alpha'(t)$.*

U našem ćemo slučaju tražiti integralne krivulje vektorskog polja $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ koje se u početnom trenutku nalaze u točki podgrafa $\{(\gamma(s), u_0(\gamma(s)) : s \in J\}$. Određivanje tih krivulja se očito svodi na rješavanje sljedećeg sustava ODJ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = a_2(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = b(x, y, z), \end{cases}$$

s početnim uvjetima

$$\begin{cases} x(0; s) = \gamma_1(s) \\ y(0; s) = \gamma_2(s) \\ z(0; s) = u_0(\gamma(s)) \end{cases}$$

Teorija ODJ nam daje jedinstveno rješenje gornjeg sustava

$$\begin{aligned} x &= x(t, s) \\ y &= y(t, s) \\ z &= z(t, s) \end{aligned}$$

na nekom intervalu $I$ koji sadrži 0. Za početak, uvjerimo se da navedene integralne krivulje zaista leže u cijelosti na grafu.

**Lema 2.1.2.** *Neka je točka $P = (x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ točka grafa rješenja u jednadžbe* (2.1) *$\Gamma$, te neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ integralna krivulja vektorskog polja $\begin{bmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \end{bmatrix}$ takva da je $\alpha(0) = P$. Tada vrijedi $\alpha(I) \subseteq \Gamma$.*

*Dokaz.* Podsjećamo kako je graf funkcije $u$ ploha implicitno zadana s $F(x, y, z) = u(x, y) - z = 0$, pa je dovoljno pokazati da je $F(\alpha(t)) = 0$ za sve $t \in I$. Kako je $u$ rješenje (2.1), imamo

$$\frac{d}{dt} F(\alpha(t)) = \nabla F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \begin{bmatrix} \nabla u(\alpha(t)) \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a(\alpha(t)) \\ b(\alpha(t)) \end{bmatrix} = 0.$$

Dakle, $F(\alpha(t))$ je konstantno, što uz početni uvjet $F(\alpha(0)) = F(P) = 0$ daje tvrdnju. $\square$

Ove se integralne krivulje zovu se još i **karakteristike** jednadžbe (2.1), dok se gornji sustav naziva još i **karakteristični sustav** jednadžbe (2.1).

Dakle, kroz svaku točku podgrafa koji je određen početnim uvjetima možemo provući integralnu krivulju koja će opisati rješenje jednadžbe. Problem može nastati ako za neke točke se ta krivulja podudara sa samim podgrafom (drugim riječima, ne mičemo se iz početnih uvjeta). Do toga će doći ako je polje $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ tangencijalno na krivulju $S$. Zbog toga uvodimo sljedeću definiciju.

**Definicija 2.1.3.** *Neka su $a, u_0$ i $S$ kao ranije, te neka je $n(s)$ normala na krivulju $S$ u točki $\gamma(s)$. Kažemo da je točka $\gamma(s) \in S$* ***karakteristična točka*** *vektorskog polja $a$ ako vrijedi*

$$a(\gamma(s), u_0(s)) \cdot n(s) = 0.$$

Pretpostavimo sada da $S$ ne sadrži nijednu karakterističnu točku vektorskog polja $a$. U posljednjem koraku radimo sljedeće: za točku $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ koja će biti "dovoljno blizu" $S$ (dakle, barem za $t$ blizu 0) želimo invertirati funkciju $(t, s) \mapsto (x, y)$ (drugim riječima, želimo odrediti gdje i na kojoj karakteristici projekciranoj na $xy$-ravninu se nalazi promatrana točka), te konačno očekujemo da će $z(t, s)$ biti tražena vrijednost rješenja (naprosto "očitamo" što bi trebala biti vrijednost na grafu). Označimo s $R(t, s) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s))$ rješenje karakterističnog sustava jednadžbi (koje je $C^1$ funkcija) te stavimo $H(t, s) = (x(t, s), y(t, s))$. Računamo za $s \in J$

$$\begin{aligned}
J_H(0, s) &= \begin{vmatrix} \partial_t x(0, s) & \partial_t y(0, s) \\ \partial_s x(0, s) & \partial_s y(0, s) \end{vmatrix} \\
&= \partial_t x(0, s) \cdot \partial_s y(0, s) - \partial_s x(0, s) \cdot \partial_t y(0, s) \\
&= a_1(\gamma(s)) \cdot g_2'(s) - a_2(\gamma(s)) \cdot g_1'(s) \\
&= a(\gamma(s)) \cdot n(s) \neq 0.
\end{aligned}$$

Prema teoremu o inverznom preslikavanju, postoje okolina $U$ točke $(0, s)$ i okolina $V$ točke $H(0, s) = \gamma(s)$ takve da je $H : U \to V$ difeomorfizam. Sada za $(x, y) \in V$ definiramo

$$u(x, y) := z(H^{-1}(x, y)).$$

Funkcija $u$ je svakako $C^1$, te zadovoljava uvjet $u\big|_S = u_0$. Zaista, neka je $(x, y) = \gamma(s) \in S$. Slijedi

$$u(x, y) = z(H^{-1}(x, y)) = z(0, s) = u_0(\gamma(s)) = u_0(x, y).$$

Konačno, pokažimo da $u$ zadovoljava (2.1):

$$\begin{aligned}
a(x,y,u(x,y))\cdot\nabla u(x,y) &= \frac{\partial x}{\partial t}\Big(\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\Big)+\frac{\partial y}{\partial t}\Big(\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\Big)\\
&= \frac{\partial z}{\partial t}\Big(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}\Big)+\frac{\partial z}{\partial s}\Big(\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\Big)\\
&= \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t}\\
&= \frac{\partial z}{\partial t}\cdot 1+0\\
&= b(x,y,u(x,y)),
\end{aligned}$$

gdje smo u predzadnjem retku koristili nezavisnost funkcija $s$ i $t$.
Ovime smo dobili rješenje lokalno oko točke $\gamma(s,0)$, dok rješenje na okolini $\Omega$ od $S$ dobivamo uzimanjem unije lokalnih. Pritom se može dogoditi da neka od karakteristika siječe krivulju $S$ u više od jedne točke; u tom slučaju smanjujemo $\Omega$ tako da svaka od karakteristika "ne izlazi iz $\Omega$.

Istaknimo za kraj ključne korake ove konstrukcije rješenja jednadžbe (2.1) uz zadani uvjet $u\big|_S = u_0$. Potrebno je prvo odrediti postoje li karakteristične točke na krivulji $S$. Ukoliko takvih nema, znamo da postoji rješenje na nekoj okolini; u suprotnom možemo imati rješenja na okolinama onih dijelova krivulje $S$ u kojima nema karakterističnih točaka, no tada nemamo garanciju $C^1$ rješenja. U tom slučaju ćemo tražiti najveću moguću domenu na kojoj imamo rješenje. Zatim odredimo karakteristike, uz uvjet da u početnom trenutku $t=0$ te karakteristike moraju prolaziti kroz neku unaprijed fiksiranu točku (ta će točka biti opisana parametrom $s$) na $S$. Zatim odredimo sve one točke koje su sadržane u nekoj od takvih karakteristika (što se svodi na problem invertiranja $(x,y)\mapsto(t,s)$). Naposljetku, naše je rješenje dano uvrštavanjem dobivenih izraza za $t$ i $s$ preko $x$ i $y$ u posljednju koordinatu karakteristika.

**Zadatak 2.1.4.** *Riješite Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} u_x+u_y=u,\\ u(x,y)=\cos x, \ \ \textit{na } y=0. \end{cases}$$

*Rješenje.* Uz oznake kao ranije prepoznajemo

$$a(x,y,z)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad b(x,y,z)=z.$$

Također stavimo

$$S=\{(s,0):s\in\mathbb{R}\},\ \text{te } n(s)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Pogledajmo imamo li karakterističnih točaka:

$$a(s,0,\cos s)\cdot n(s,0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=1,$$

pa zaključujemo da karakterističnih točaka nema. Postavljamo pripadni sustav ODJ kojim dobivamo tražene karakteristike:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(x, y, z) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = a_2(x, y, z) = 1, \\ \frac{dz}{dt} = b(x, y, z) = z, \end{cases}$$

uz početne uvjete (ovisne o parametru $s$)

$$\begin{cases} x(0; s) = s, \\ y(0; s) = 0, \\ z(0; s) = \cos s. \end{cases}$$

Rješavamo sustav:

$$\frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow x(t) = t + C_1,$$

što uz početni uvjet daje

$$x(t, s) = t + s.$$

Na isti način dobivamo i

$$y(t, s) = t.$$

Konačno,

$$\frac{dz}{dt} = z \Rightarrow z(t) = C_3 e^t,$$

što uz početni uvjet daje

$$z(t, s) = \cos s \cdot e^t.$$

Preostaje nam sada vidjeti za koje točke u $\mathbb{R}^2$ postoje projicirane karakteristike koje prolaze kroz njih. Uzmimo proizvoljnu točku $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tražimo $t, s$ takve da je $x = x(t, s), y = y(t, s)$, odnosno tražimo rješenje

$$\begin{cases} x = t + s, \\ y = t. \end{cases}$$

Ovdje lako vidimo da je rješenje $t = y$, $s = x - t = x - y$. Dakle, za svaku točku u $\mathbb{R}^2$ postoji (jedna) projicirana karakteristika koja kroz nju prolazi. Samim time, i naše rješenje će postojati na cijelom $\mathbb{R}^2$. Izvedimo još formulu za rješenje uvrštavanjem dobivenih izraza u izraz za $z(t; s)$:

$$u(x, y) = z(t, s) = \cos s \cdot e^t = \cos(x - y)e^y.$$

■

**Napomena:** Pretpostavimo sada da u prethodnom zadatku umjesto uvjeta na pravcu $y = 0$ imamo zadane uvjete na pravcu $y = x$. U tom je slučaju normala dana s $n(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, pa vidimo da je za svaki $s \in \mathbb{R}$

$$a(s, s, \cos s) \cdot n(s) = 1 - 1 = 0,$$

što znači da je svaka točka pravca karakteristična, te nemamo egzistenciju rješenja nigdje osim na samom pravcu $y = x$. Naime, projicirane karakteristike su pravci paralelni s pravcem $y = x$, te je jasno da niti jedan takav ne siječe pravac $y = x$ (naravno, osim njega samoga).

**Zadatak 2.1.5.** *Riješite zadatke 1.1.1 i 1.1.3 metodom karakteristika.*

**Zadatak 2.1.6.** *Riješite Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} x^2 u_x + y^2 u_y = u^2, \\ u = 1, \ \ na\ y = 2x. \end{cases}$$

*Rješenje.* Prepoznajemo:

$$a(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}, \quad b(x, y, z) = z^2.$$

Također stavimo

$$S = \{(s, 2s) : s \in \mathbb{R}\}, \text{ te } n(s) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pogledajmo imamo li karakterističnih točaka:

$$a(s, 2s, 1) \cdot n(s, 2s) = \begin{bmatrix} s^2 \\ 4s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -2s^2,$$

pa zaključujemo da je jedina karakteristična točka $(0, 0)$. Postavljamo pripadni sustav ODJ kojim dobivamo tražene karakteristike:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(x, y, z) = x^2, \\ \frac{dy}{dt} = a_2(x, y, z) = y^2, \\ \frac{dz}{dt} = b(x, y, z) = z^2, \end{cases}$$

uz početne uvjete (za $s \neq 0$):

$$\begin{cases} x(0, s) = s, \\ y(0; s) = 2s, \\ z(0; s) = 1. \end{cases}$$

Rješavamo sustav:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{C_1 - t},$$

što uz početni uvjet daje

$$x(t, s) = \frac{s}{1 - ts}.$$

Na isti način vidimo i

$$y(t, s) = \frac{2s}{1 - 2ts},$$

kao i

$$z(t,s) = \frac{1}{1-t}.$$

Odredimo sada za koje točke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ postoje projicirane karakteristike koje prolaze kroz njih. Tražimo rješenje

$$\begin{cases} x = \frac{s}{1-ts}, \\ y = \frac{2s}{1-2ts}. \end{cases}$$

U slučaju $x = 0$ vidimo da mora biti $s = 0$, pa onda i $y = 0$, što nas vraća na karakterističnu točku $(0,0)$ te nam daje trivijalnu karakteristiku (točku). Stoga jedina točka na $y$-osi koja leži na nekoj od karakteristika je je ishodište, i to na onoj trivijalnoj. Analogan zaključak dobivamo promatranjem $y = 0$. Za $x \neq 0$ iz prve jednadžbe dobivamo

$$t = \frac{x-s}{xs},$$

što uvrštavanjem u drugu jednadžbu i sređivanjem daje i

$$s = \frac{xy}{2(y-x)},$$

za $x \neq y$. U slučaju $x = y$, ponovno se vratim u gornje izraze za iste, te dobijemo da mora biti $s = t = 0$, što nas vraća na već spomenuti slučaj ishodišta. Uvrstimo dobiveno natrag u izraz za $t$ te dobivamo

$$t = \frac{y-2x}{xy}.$$

Konačno, vraćamo se u izraz za $z(t;s)$:

$$u(x,y) = z(t,s) = \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-\frac{y-2x}{xy}} = \frac{xy}{xy+2x-y}.$$

Direktnom provjerom se lako možemo uvjeriti da dobivena funkcija zaista jest rješenje zadaće, ali ne na cijelom $\mathbb{R}^2$, već na onom dijelu na kojem ju možemo definirati. Zapisano u ovom obliku, ono ima smisla i za točke na $x$-osi i na $y$-osi, osim ishodišta, koje su prije predstavljale problem. Osim ishodišta, funkcija nije definirana za točke za koje je $xy + 2x - y = 0$.

**Napomena:** Primijetimo kako je dobiveno rješenje jednako 0 na koordinatnim osima, dok bi u ishodištu ono trebalo biti 1 prema uvjetu zadaće. Međutim, ovo nije u kontradikciji s našim rezultatima otprije; metoda garantira rješenje u okolini točaka koje nisu karakteristične, a kako je ishodište jedina točka presjeka krivulja $xy + 2x - y$ i $y = 2x$, vidimo da je za sve preostale točke uvjet ispunjen i rješenje pronađeno. Također, zbog gore navedenog razloga, ovo se rješenje očito ne može proširiti do neprekidnog (a onda naravno ni do $C^1$) na većem skupu. ∎

**Zadatak 2.1.7.** *Riješite Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} u_y = xuu_x, \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

*Rješenje.* Stavljamo:

$$a(x,y,z) = \begin{bmatrix} xz \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b(x,y,z) = 0.$$

Također dodajemo

$$S = \{(s,0) : s \in \mathbb{R}\}, \text{ te } n(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pogledajmo imamo li karakterističnih točaka:

$$a(s,0,s) \cdot n(s,0) = \begin{bmatrix} s^2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1,$$

pa zaključujemo da karakterističnih točaka nema. Postavljamo pripadni sustav ODJ kojim dobivamo tražene karakteristike:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xz, \\ \frac{dy}{dt} = -1, \\ \frac{dz}{dt} = 0, \end{cases}$$

uz početne uvjete (ovisne o parametru $s$)

$$\begin{cases} x(0;s) = s, \\ y(0;s) = 0, \\ z(0;s) = s. \end{cases}$$

Rješavamo sustav. Prvo primijetimo da je

$$z(t,s) = s.$$

Sljedeće imamo

$$\frac{dx}{dt} = xz = sx \Rightarrow x(t,s) = se^{st}.$$

Konačno,

$$y(t,s) = -t.$$

Neka je $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljna točka. Tražimo $s,t$ takve da vrijedi

$$\begin{cases} x = se^{st}, \\ y = -t. \end{cases}$$

Uvrštavanjem $y = -t$ u prvu jednadžbu vidimo da treba vrijediti

$$x = se^{-sy}.$$

Traženi $s$ ne postoji za sve parove $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; za $y > 0$ takav $s$ postoji ukoliko je $x \leq \frac{1}{ey}$, za $y < 0$ ukoliko je $x \geq -\frac{1}{ey}$, dok za $y = 0$ postoji uvijek. U tim slučajevima rješenje zapisujemo u implicitnom obliku

$$x = se^{st} = z(t,s)e^{z(t,s)t} = u(x,y)e^{-u(x,y)y}.$$

■

**Zadatak 2.1.8.** *Riješite Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} xu_y - yu_x = u, \\ u(\cdot, 0) = u_0, \end{cases}$$

*gdje je* $u_0 \in C(\mathbb{R})$ *zadana.*

*Rješenje.* Prepoznajemo:

$$a(x, y, z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \quad b(x, y, z) = z.$$

Također imamo

$$S = \{(s, 0) : s \in \mathbb{R}\}, \text{ te } n(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pogledajmo imamo li karakterističnih točaka:

$$a(s, 0, u_0(s)) \cdot n(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s,$$

pa zaključujemo da je jedina karakteristična točka $(0, 0)$. Postavljamo pripadni sustav ODJ kojim dobivamo tražene karakteristike:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x, \\ \frac{dz}{dt} = z, \end{cases}$$

uz početne uvjete (za $s \neq 0$):

$$\begin{cases} x(0; s) = s, \\ y(0; s) = 0, \\ z(0; s) = u_0(s). \end{cases}$$

Deriviranjem prve jednadžbe po $t$ te korištenjem druge dolazimo do

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} = -x,$$

odakle dobivamo

$$x(t) = A \sin t + B \cos t,$$

te deriviranjem

$$y(t) = -A \cos t + B \sin t.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta imamo

$$x(t, s) = s \cos t,$$

$$y(t, s) = s \sin t.$$

Na kraju, lako vidimo da je
$$z(t,s) = u_0(s)e^t.$$
Neka je sada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljna točka. Primijetimo prvo kako su karakteristike zapravo dijelovi kružnice (ili cijela) oko $(0,0)$ radijusa $|s|$. Za svaku točku $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ postoji jedinstvena takva kružnica koja prolazi kroz nju, međutim, postoje dvije vrijednosti parametara koja možemo odabrati; uzimanjem $s$ ili $-s$, gdje vrijedi $|s| = \sqrt{x^2+y^2}$. Da bi osigurali jednoznačnost odabira, podijelit ćemo naše karakteristike na dva dijela, te ćemo gledati samo polukružnice

$$t \mapsto (s\cos t, s\sin t), \quad t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Za $s > 0$ ove se polukružnice nalaze u poluravnini $x > 0$, dok se za $s < 0$ one nalaze u poluravnini $x < 0$. Kao i maloprije, vidimo da je $s = \operatorname{sgn} x\sqrt{x^2+y^2}$, dok je $t = \arctan \frac{y}{x}$. Konačno, uvrstimo te vrijednosti u izraz za $z(t,s)$ te dobivamo

$$u(x,y) = z(t,s) = u_0(s)e^t = u_0(\operatorname{sgn} x\sqrt{x^2+y^2})e^{\arctan \frac{y}{x}}.$$

■

Napomenimo za kraj kako izgleda metoda karakteristika u općenitijem, $d$-dimenzionalnom slučaju. Prilagodba dokaza iz dvodimenzionalnog slučaja je ostavljena za vježbu. Promatramo kvazilinearnu jednadžbu

$$a(x,u(x)) \cdot \nabla u(x) = b(x,u(x)),$$

gdje su $a, b$ $C^1$ funkcije na odgovarajućoj domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$. Pretpostavimo da su zadani početni uvjeti na nekoj parametriziranoj hiperplohi $S \subseteq \mathbb{R}^d$; preciznije, neka je $U$ otvoren podskup od $\mathbb{R}^{d-1}$ te $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_d) : U \to \mathbb{R}^d$ $C^1$ parametrizacija hiperplohe $S$. Pretpostavimo da su zadani početni uvjeti $u|_S = u_0$, gdje je $u_0$ unaprijed zadana funkcija. Uvjet karakterističnosti ćemo iskazati u nešto drugačijem obliku, međutim, cilj je isti; točka $\gamma(s) \in S$ će biti karakteristična za $a$ ako se $a$ nalazi u tangencijalnom prostoru na $S$ točke $\gamma(s)$.

**Definicija 2.1.9.** *Neka su $a, u_0$ i $S$ kao ranije. Kažemo da je točka $\gamma(s) = \gamma(s_1,\ldots,s_{d-1}) \in S$ **karakteristična točka** vektorskog polja $a$ ako vrijedi*

$$\det\big(a(\gamma(s),\, u_0(\gamma(s))),\, \partial_{s_1}\gamma(s),\, \partial_{s_2}\gamma(s),\, \ldots,\, \partial_{s_{d-1}}\gamma(s)\big) = 0.$$

**Teorem 2.1.10.** *Pretpostavimo da je $S$ hiperploha klase $C^1$ u $\mathbb{R}^d$ te $a, b, u_0$ $c^1$ funkcije. Pretpostavimo također da $S$ ne sadrži karakteristične točke vektorskog polja $a$. Tada postoji jedinstveno $C^1$ rješenje kvazilinearne jednadžbe na nekoj okolini od $S$ takvo da je $u|_S = u_0$.*

Postupak za dobivanje okoline od $S$ i rješenja kvazilinearne jednadžbe na toj okolini je sljedeći. Nakon što smo se uvjerili da karakterističnih točaka nema, postavljamo pripadni karakteristični sustav

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1(x_1, \dots, x_d, z) \\ \quad\vdots \\ \frac{dx_d}{dt} = a_d(x_1, \dots, x_d, z) \\ \frac{dz}{dt} = b(x_1, \dots, x_d, z) \end{cases}$$

s početnim uvjetima

$$\begin{cases} x_1(0; s) = \gamma_1(s) \\ \quad\vdots \\ x_d(0; s) = \gamma_d(s) \\ z(0; s) = u_0(\gamma(s)) \end{cases}$$

Ovo je sustav $d + 1$ jednadžbi s $d + 1$ početnih uvjeta; teorija ODJ ponovno daje jedinstveno rješenje ovog sustava na nekom intervalu oko 0. Idući korak je invertirati preslikavanje

$$H : (t, s_1, \dots, s_{d-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_d)$$

za one $(x_1, \dots, x_d)$ za koje je to moguće. Konačno rješenje jednadžbe je tada dano s

$$u(x) = z(H^{-1}(t, s_1, \dots, s_{d-1})).$$

**Zadatak 2.1.11.** *Neka je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ te $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^{d-1})$ zadana. Odredite rješenje Cauchyjeve zadaće*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^d x_k \partial_k u = \alpha u, \\ u(x_1, \dots, x_{d-1}, 1) = u_0(x_1, \dots, x_{d-1}). \end{cases}$$

## 2.2 Lagrangeova metoda

Za kraj dijela o kvazilinearnim jednadžbama 1. reda reći ćemo nešto o metodi određivanja općeg rješenja jednadžbe

$$a(x, y, u(x, y)) \cdot \nabla u(x, y) = b(x, y, u(x, y)),$$

gdje su $a$ i $b$ kao ranije, uz pretpostavku da u domeni od $a$ i $b$ ne postoji točka $(x, y, u)$ za koju vrijedi $a(x, y, u) = b(x, y, u) = 0$. S obzirom da nemamo nikakvih dodatnih zahtjeva na funkciju $u$, moramo pronaći neki način da opišemo cijeli skup rješenja gornje jednadžbe. Već smo vidjeli kako plohe izgrađene pomoću karakteristika opisuju rješenja kvazilinearne jednažbe, stoga se ponovno vraćamo na pripadni sustav.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(x, y, u), \\ \frac{dy}{dt} = a_2(x, y, u), \\ \frac{du}{dt} = b(x, y, u). \end{cases}$$

Prema teoremu o inverznoj funkciji, ukoliko je u nekoj točki $a_1(x, y, u) \neq 0$, na nekom otvorenom skupu oko te točke zapravo imamo da je $t = t(x)$, odnosno $y = y(x)$, te vrijedi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Sličan zaključak možemo donijeti i u preostale dvije kombinacije varijabli $x, y, z$, što nas navodi na sljedeći sustav:

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{du}{b}. \tag{2.2}$$

Pretpostavimo sada da smo pronašli dva rješenja gornjeg sustava $\phi(x, y, u) = c_1$ i $\psi(x, y, u) = c_2$. Dodatno, neka su ta dva rješenja **funkcionalno nezavisna** na nekom skupu $\Omega$, tj. Jacobijeva matrica

$$\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y, u)} = \begin{bmatrix} \nabla\phi(x, y, u) \\ \nabla\psi(x, y, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial u} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \end{bmatrix}.$$

je ranga 2 na $\Omega$. Tada je opće rješenje kvazilinearne jednadžbe implicitno dano relacijom

$$F(\phi(x, y, u), \psi(x, y, u)) = 0,$$

gdje je $F$ proizvoljna $C^1$ funkcija. Da bi se uvjerili u to, pretpostavimo za početak da je $\partial_u F = \partial_1 F \cdot \phi_u + \partial_2 F \cdot \psi_u \neq 0$ (u suprotnom izraz $F(\phi, \psi)$ ne ovisi o $u$, pa nema smisla govoriti o rješenju u takvom obliku). Prema teoremu o implicitnoj funkciji slijedi da postoji funkcija $f$ takva da je $u = f(x, y)$ te vrijedi $F(\phi(x, y, f(x, y)), \psi(x, y, f(x, y))) = 0$. Deriviranjem gornjeg izraza po $x$ i $y$ dobivamo redom

$$\partial_1 F(\phi_x + \phi_u f_x) + \partial_2 F(\psi_x + \psi_u f_x) = 0,$$

$$\partial_1 F(\phi_y + \phi_u f_y) + \partial_2 F(\psi_y + \psi_u f_y) = 0.$$

Kako je

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \neq 0,$$

matrica gornjeg sustava je singularna, tj. njena determinanta je nula. Konkretnije, imamo

$$\left|\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(y, u)}\right| f_x + \left|\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, x)}\right| f_y = \left|\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)}\right|. \tag{2.3}$$

Uzmimo sada $t \to (x(t), y(t), u(t))$ proizvoljnu karakteristiku početnog karakterističnog sustava. Uvrštavanjem u izraze za $\phi, \psi$, te deriviranjem po $t$ dobivamo

$$a_1\phi_x + a_2\phi_y + b\phi_u = 0,$$

$$a_1\psi_x + a_2\psi_y + b\psi_u = 0.$$

Iz ovoga čitamo kako je vektorsko polje $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{bmatrix}$ okomito i na $\nabla\phi$ i na $\nabla\psi$. Kako su oni linearno nezavisni, slijedi da je to polje normalno na ravninu razapetu s $\{\nabla\phi, \nabla\psi\}$. Dakle, postoji $\lambda \neq 0$ takav da je

$$(a_1, a_2, b) = \lambda\Big(\Big|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(y,u)}\Big|, \Big|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,x)}\Big|, \Big|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\Big|\Big).$$

Uvrštavanjem u (2.3) dobivamo upravo

$$a_1 f_x + a_2 f_y = b.$$

Opće rješenje se kao posljedica teorema o implicitno zadanoj funkciji može napisati i na još jedan od dva ekvivalentna načina:

- $\phi(x, y, u) = g_1(\psi(x, y, u))$,
- $\psi(x, y, u) = g_2(\phi(x, y, u))$,

gdje su $g_1, g_2$ proizvoljne $C^1$ funkcije. Ovaj oblik nam može biti od koristi ukoliko je potrebno pronaći jedno konkretno rješenje u skupu općeg.

**Napomena:** Uvjet na rang Jacobijeve matrice ekvivalentan je uvjetu da je barem jedna od minora

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right|, \quad \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(y,u)}\right|, \quad \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,x)}\right|$$

različita od 0.

**Zadatak 2.2.1.** *Odredite opće rješenje jednadžbe*

$$xuu_x + yuu_y = -(x^2 + y^2).$$

*Rješenje.* Za početak, zbog toga što se na tom skupu poništavaju i $a$ i $b$, rješenje tražimo na skupu gdje je $x \neq 0$ ili $y \neq 0$. Postavljamo pripadni sustav

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{-(x^2 + y^2)}.$$

Iz prve jednadžbe dobivamo:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

odakle integriranjem slijedi

$$\ln|x| = \ln|y| + C_1,$$

odnosno

$$x = C_1 y.$$

Dakle, prvo rješenje je dano s

$$\phi(x,y,u) := \frac{x}{y}(= C_1).$$

Promatramo sada jednakost prvog i trećeg izraza u sustavu. Imamo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{xu} &= \frac{du}{-(x^2+y^2)} \\ \Rightarrow \frac{dx}{xu} &= \frac{du}{-(1+\frac{1}{C_1^2})x^2} \\ \Rightarrow -(1+\frac{1}{C_1^2})xdx &= udu, \end{aligned}$$

odakle integriranjem slijedi

$$-(1+\frac{1}{C_1^2})x^2 = u^2 + C_2.$$

Konačno, vraćanjem izraza za $C_1$ dobivenog ranije dobivamo drugo rješenje

$$\psi(x,y,u) := u^2 + x^2 + y^2(= C_2).$$

Provjerimo uvjet funkcionalne nezavisnosti rješenja $\phi$ i $\psi$. Računamo minore:

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2\Big(1+\frac{x^2}{y^2}\Big),$$

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(y,u)}\right| = \begin{vmatrix} -\frac{x}{y^2} & 0 \\ 2y & 2u \end{vmatrix} = -2\frac{xu}{y^2},$$

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,u)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 2x & 2u \end{vmatrix} = 2\frac{u}{y}.$$

Dakle, opće rješenje je dano relacijom

$$F\Big(\frac{x}{y}, x^2+y^2+u^2\Big) = 0,$$

ili ekvivalentnom relacijom

$$u^2 = g\Big(\frac{x}{y}\Big) - x^2 - y^2,$$

na skupu na kojem je barem jedna od determinanti različita od 0. S obzirom da su svi izrazi dobro definirani za $y \neq 0$, te da je već $\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right| \neq 0$, vidimo da je rješenje dano gornjom relacijom na skupu $y \neq 0$, odnosno na $\mathbb{R}^3$ bez $xu$-ravnine. ■

Sustav (2.2) ponekad može biti kompliciran za riješiti direktno kao u prethodnom zadatku. Koristeći sljedeća dvije tehnike možemo si često pojednostavniti rješavanje:

1) Ukoliko imamo jednakost omjera $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, tada za sve $\lambda, \mu \neq 0$ vrijedi $\frac{A}{B} = \frac{\lambda A + \mu C}{\lambda B + \lambda D}$.

2) Iteriranjem izraza u 1) možemo zaključiti i sljedeće: ako imamo jednakost tri omjera, "linearna kombinacija brojnika"/"linearna kombinacija nazivnika" daje isti omjer. Posebno, u slučaju našeg sustava možemo gledati jednakost omjera

$$\frac{\lambda dx + \mu dy + \nu du}{\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu b} = \frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{du}{b}.$$

Ukoliko možemo naći $\lambda, \mu, \nu$ takve da vrijedi $\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu b = 0$, tada mora biti i

$$\lambda dx + \mu dy + \nu du = 0.$$

pa je jedno rješenje (2.2) dano s $\phi(x, y, u) = C$, gdje vrijedi $\nabla \phi = (\lambda, \mu, \nu)$.

**Zadatak 2.2.2.** *Odredite opće rješenje jednadžbe*

$$(y - x)u_x + (y + x)u_y = \frac{x^2 + y^2}{u}.$$

*Rješenje.* Rješenje tražimo izvan ishodišta. Postavljamo pripadni sustav:

$$\frac{dx}{y - x} = \frac{dy}{y + x} = \frac{du}{\frac{x^2+y^2}{u}}.$$

Promatramo prvo prvu jednadžbu u sustavu, te koristimo prvu tehniku navedenu prije zadatka:

$$\frac{dx}{y - x} = \frac{dy}{y + x} = \frac{dx + dy}{(y - x) + (y + x)},$$

odakle dobivamo, promatranjem posljednje jednakosti

$$\frac{dy}{y + x} = \frac{d(x + y)}{2y}.$$

Posljednja jednakost je ekvivalentna s

$$(x + y)d(x + y) = 2ydy,$$

odakle integriranjem slijedi

$$(x + y)^2 = 2y^2 + C_1.$$

Dakle, prvo rješenje sustava je dano s

$$\phi(x, y, u) := x^2 + 2xy - y^2 (= C_1).$$

Za drugo ćemo rješenje pokušati s drugom navedenom tehnikom. Prvo pronađimo $\lambda, \mu, \nu$ takve da vrijedi $\lambda(y - x) + \mu(y + x) + \nu\left(\frac{x^2+y^2}{u}\right) = 0$. Jedan od izbora je sljedeći

$$\lambda = x, \qquad \mu = -y, \qquad \nu = u.$$

Sada preostaje pronaći funkciju $\psi$ takvu da je $\nabla\psi = (\lambda, \mu, \nu)$. Iz prve jednadžbe imamo

$$\partial_x \psi(x, y, u) = x,$$

iz čega slijedi

$$\psi(x, y, u) = \frac{1}{2}x^2 + F(y, u).$$

Parcijalnom derivacijom po $y$ i korištenjem drugog uvjeta imamo

$$-y = \partial_y \psi(x, y, u) = \partial_y F(y, u),$$

odakle zaključujemo da je

$$F(y, u) = -\frac{1}{2}y^2 + G(u),$$

odnosno

$$\psi(x, y, u) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + G(u).$$

Konačno, parcijalno deriviramo po $u$ te koristimo posljednji uvjet da bi dobili

$$u = \partial_u \psi(x, y, u) = G'(u),$$

iz čega slijedi

$$G(u) = \frac{1}{2}u^2 + C,$$

pa je drugo rješenje sustava dano s

$$\psi(x, y, u) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + u^2)(= C_2).$$

Provjerimo funkcionalnu nezavisnost ova dva rješenja. Računamo ponovno minore pripadne Jacobijeve matrice

$$\left|\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)}\right| = \begin{vmatrix} 2x + 2y & 2x - 2y \\ x & -y \end{vmatrix} = -2(x^2 + y^2).$$

$$\left|\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(y, u)}\right| = \begin{vmatrix} 2x - 2y & 0 \\ -y & u \end{vmatrix} = 2(x - y)u.$$

$$\left|\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, u)}\right| = \begin{vmatrix} 2x + 2y & 0 \\ x & u \end{vmatrix} = 2(x + y)u.$$

Dakle, imamo opće rješenje dano relacijom

$$F(x^2 + 2xy - y^2, x^2 - y^2 + u^2) = 0,$$

kad god je barem jedna od minora različita od 0, što imamo izvan ishodišta. Ekvivalentno, rješenje možemo zapisati i relacijom

$$u^2 = y^2 - x^2 + g(x^2 + 2xy - y^2),$$

za neku $g \in C^1$. ■

**Zadatak 2.2.3.** *Odredite opće rješenje jednadžbe*

$$uu_x + yu_y = x.$$

*Rješenje.* Rješenje tražimo izvan ishodišta. Zapisujemo pripadni sustav ODJ:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{x}.$$

Ponovno ćemo potražiti $\lambda, \mu, \nu$ kao ranije. Jedna opcija su vrijednosti

$$\lambda = x, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = -u.$$

Tražimo funkciju $\phi$ takvu da je $\nabla\phi = (\lambda, \mu, \nu)$. Iz prvog uvjeta imamo

$$\partial_x \phi(x, y, u) = x,$$

iz čega slijedi

$$\phi(x, y, u) = \frac{1}{2}x^2 + F(y, u).$$

Sada deriviramo po $y$ te koristimo drugi uvjet pa imamo

$$0 = \partial_y \phi(x, y, u) = \partial_y F(y, u),$$

iz čega vidimo da je

$$F(y, u) = G(u),$$

odnosno

$$\psi(x, y, u) = \frac{1}{2}x^2 + G(u).$$

Konačno, deriviramo po $u$ i koristimo posljednji uvjet da dobijemo

$$-u = \partial_u \phi(x, y, u) = G'(u),$$

odakle slijedi

$$G(u) = -\frac{1}{2}u^2 + C.$$

Dakle, jedno rješenje sustava je dano s

$$\phi(x, y, u) = \frac{1}{2}(x^2 - u^2)(= C_1).$$

Naravno, nije za očekivati da za bilo koji odabir $\lambda, \mu, \nu$ koji zadovovljavaju željeni uvjet možemo pronaći funkciju čije komponente gradijenta odgovaraju istima. Primjerice, uzmimo

$$\lambda = y, \qquad \mu = -u, \qquad \nu = 0.$$

Iz prvog uvjeta dobivamo

$$\phi(x, y, u) = xy + F(y, u),$$

no deriviranjem ovog izraza po $y$ i korištenjem drugog uvjeta dobivamo

$$-u = x + \partial_y F(y, u),$$

što nije moguće jer $F$ ne smije ovisiti o $x$. Slično, ni odabir

$$(0, x, -y)$$

nas neće dovesti do rješenja. Uzet ćemo stoga sljedeće vrijednosti:

$$\lambda = \frac{1}{y}, \qquad \mu = -\frac{x+u}{y^2}, \qquad \nu = \frac{1}{y}.$$

Na isti način kao i u prethodnim zadacima dolazimo do drugog rješenja

$$\psi(x, y, u) = \frac{x}{y} + \frac{u}{y} (= C_2).$$

Provjerimo sada funkcionalnu nezavisnost ova dva rješenja. Računamo ponovno minore pripadne Jacobijeve matrice

$$\left|\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)}\right| = \begin{vmatrix} x & 0 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x+u}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{x(x+u)}{y^2}.$$

$$\left|\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(y, u)}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -u \\ -\frac{x+u}{y^2} & \frac{1}{y} \end{vmatrix} = -\frac{u(x+u)}{y^2}.$$

$$\left|\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, u)}\right| = \begin{vmatrix} x & -u \\ \frac{1}{y} & \frac{1}{y} \end{vmatrix} = \frac{x+u}{y}.$$

Dakle, imamo opće rješenje dano relacijom

$$F\Big(x^2 - u^2, \frac{x}{y} + \frac{u}{y}\Big) = 0,$$

na skupu na kojem je barem jedna od minora različita od 0. ■

**Zadatak 2.2.4.** *Odredite opće rješenje jednadžbe*

$$x(y-u)u_x + y(u-x)u_y = u(x-y).$$

# Poglavlje 3

# Laplaceova jednadžba

## 3.1 Harmoničke funkcije

U ovom ćemo se poglavlju posvetiti dvjema vrlo bitnim parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, **Laplaceovom jednadžbom**

$$-\Delta u = 0,$$

odnosno **Poissonovom jednadžbom**

$$-\Delta u = f,$$

pri čemu s $\Delta$ označavamo **Laplaceov operator** definiran s

$$\Delta = \sum_{i=1}^{d} \partial_i^2.$$

U oba slučaja tražimo nepoznatu funkciju $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, pri čemu je zadan otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. U slučaju Poissonove jednadžbe zadana je i funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

**Definicija 3.1.1.** *Funkciju $u \in C^2(\Omega)$ koja rješava Laplaceovu jednadžbu zovemo* ***harmonička funkcija****.*

**Zadatak 3.1.2.** *a) Neka je $U \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup te $f : \Omega \to \mathbb{C}$. $f = u + iv$ holomorfna funkcija, pri čemu su $u, v : \Omega_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$. Tada su $u$ i $v$ harmoničke funkcije.*

*b) Vrijedi i svojevrsni obrat. Ako je dodatno $\Omega$ 1-povezan, te $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonička funkcija, tada postoji holomorfna funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ takva da je $u = \mathrm{Re} f$.*

*Rješenje.* a) Iz Cauchy-Riemannovih uvjeta imamo $u_x = v_y$ i $u_y = -v_x$, pa vidimo da je

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy}.$$

Kako je realni dio holomorfne funkcije $C^\infty$ funkcija, primjenom Schwartzovog teorema dobivamo da je gornji izraz jednak 0. Sasvim analogno se pokaže tvrdnja i za $v$.

b) Za $(x, y) \in \Omega$ stavimo

$$f(x+iy) = u_x(x,y) - iu_y(x,y).$$

Kako je $u$ harmonička funkcija (posebno $C^2$), jednostavno vidimo da je $f \in C^1(\Omega)$ te da zadovoljava $CR$ uvjete. Dakle, $f$ je holomorfna funkcija. Fiksirajmo sada $z_0 = (x_0 + iy_0) \in \Omega$, te stavimo za $z \in \Omega$

$$F(z) := u(z_0) + \int_\gamma f(w)dw,$$

pri čemu je $\gamma$ proizvoljan put od $z_0$ do $z$ u $\Omega$. Funkcija $F$ je primitivna funkcija funkcije $f$ (pa je posebno i ona holomorfna). Pokažimo sada da je $\mathrm{Re}F = u$. Označimo s $U = \mathrm{Re}F$. Za sve $z = (x + iy) \in \Omega$ imamo

$$U_x(x,y) - iU_y(x,y) = F'(z) = f(z) = u_x(x,y) - iu_y(x,y),$$

odnosno $DU = Du$ na $\Omega$. Kako je $U(x_0, y_0) = u(x_0.y_0)$, slijedi

$$u = \mathrm{Re}F.$$

■

**Napomena 3.1.3.** *Usporedite rezultate o harmoničkim funkcijama s rezultatima za holomorfne funkcije iz kolegija Kompleksna analiza.*

U slučaju $\Omega = \mathbb{R}^d$ smo vidjeli kako se koristeći neke prirodne pretpostavke i uvjete na funkciju $u$ može doći do tzv. **elementarnog rješenja** Laplaceove jednadžbe na $\mathbb{R}^d$. Prvi korak na tom putu je bila pretpostavka da je poželjno rješenje Laplaceove jednadžbe tražiti među radijalnim funkcijama. To je pak bila posljedica činjenice da je Laplaceova jednadžba invarijantna na rotacije. U nastavku ćemo pokazati i nešto općenitiju tvrdnju.

**Zadatak 3.1.4.** *Neka je $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$, te neka je $O = (a_{ij}) \in M_d(\mathbb{R})$ ortogonalna matrica. Tada je $\Delta(u \circ O) = (\Delta u) \circ O$.*

*Rješenje.* Stavimo $v = u \circ O$. Kako je matrica $O$ ortogonalna (odnosno $O^T O = OO^T = I$), imamo

$$\sum_{i=1}^d a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk}, \qquad \text{za sve } j, k = 1, \dots, d.$$

Računamo:

$$\partial_i v(x) = \sum_{j=1}^d (\partial_j u)(Ox) \cdot a_{ji},$$

te

$$\partial_i^2 v(x) = \sum_{j,k=1}^d (\partial_{jk} u)(Ox) a_{ji} a_{ki}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\Delta v(x) = \sum_{i=1}^{d} \partial_i^2 v(x) &= \sum_{i,j,k=1}^{d} (\partial_{jk} u)(Ox) a_{ji} a_{ki} \\
&= \sum_{j,k=1}^{d} (\partial_{jk} u)(Ox) \Big( \sum_{i=1}^{d} a_{ji} a_{ki} \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{d} (\partial_j^2 u)(Ox) \\
&= \Delta u(Ox).
\end{aligned}$$

■

**Definicija 3.1.5.** ***Elementarno rješenje Laplaceove jednadžbe*** *je funkcija*

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, & d = 2, \\ \frac{1}{d(d-2)\omega_d} \frac{1}{|x|^{d-2}}, & d \geq 3, \end{cases}$$

*definirana za* $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Iako funkcija $\Phi$ ima singularitet u ishodištu, ona ipak ima jedno poželjno svojstvo koje ćemo sada pokazati: ona pripada prostoru **lokalno integrabilnih funkcija**

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) := \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \; : \; \int_K |f| < \infty, \text{ za svaki kompakt } K \subseteq \mathbb{R}^d \}.$$

S obzirom da je $\Phi$ neprekidna izvan svake kugle oko 0, dovoljno je provjeriti integrabilnost na nekoj kugli $K[0, R]$ radijusa $R$.

**Zadatak 3.1.6.** *Neka je* $0 < R \leq 1$. *Pokažite da je*

$$\int_{K[0,R]} |\Phi(x)| dx < \infty.$$

*Rješenje.* Pokazat ćemo prvo slučaj $d = 2$. S obzirom da je riječ o radijalnoj funkciji, poželjno je prijeći na polarne koordinate (vidjeti iduće poglavlje, korolar 3.2.2.). Računamo:

$$\begin{aligned}
\int_{K[0,R]} \Phi(x) dx &= 2\omega_2 \int_0^R \Phi(r) r dr \\
&= - \int_0^R r \ln r dr \quad \text{(parc. int.)} \\
&= - \frac{r^2 \ln r}{2} \Big|_0^R + \int_0^R \frac{r}{2} dr.
\end{aligned}$$

Preostaje pokazati da je $\lim_{r\to 0^+} r^2 \ln r < \infty$. Ovdje koristimo L'Hopitalovo pravilo kako bismo zaključili

$$\lim_{r\to 0^+} r^2 \ln r = \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln r}{\frac{1}{r^2}} = -\lim_{r\to 0^+} \frac{\frac{1}{r}}{\frac{2}{r^3}} = 0.$$

Dakle, gornji integral je konačan, te iznosi $\frac{R^2}{4} - \frac{R^2 \ln R}{2}$.

U slučaju $d \geq 3$ postupamo analogno. Ponovno prelaskom na polarne koordinate dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{K[0,R]} \Phi(x)dx &= d\omega_d \int_0^R \frac{1}{d(d-2)\omega_d} \frac{1}{r^{d-2}} r^{d-1} dr \\ &= \frac{1}{d-2} \int_0^R r dr \\ &= \frac{R^2}{2(d-2)}.\end{aligned}$$

■

**Napomena 3.1.7.** *Iako je funkcija $\Phi$ lokalno integrabilna, ona nije integrabilna zbog svog ponašanja u beskonačnosti.*

**Zadatak 3.1.8.** *(alternativni dokaz jakog principa maksimuma)*
*Neka je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonička funkcija na ograničenom otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Tada je*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

*Rješenje.* Za $\varepsilon > 0$ definiramo $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon|x|^2$. Kako je funkcija $u$ harmonička, imamo

$$\Delta u_\varepsilon = 2d\varepsilon.$$

Pretpostavimo sada da se maksimum ne postiže na rubu, već u unutrašnjosti (tj. u $\Omega$) u točki $x_0$. Tada za matricu drugog diferencijala u točki $x_0$ vrijedi

$$D^2 u_\varepsilon(x_0) \leq 0.$$

Kako je to simetrična matrica, postoje ortogonalna matrica $O$ i dijagonalna matrica $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \leq 0$ svojstvene vrijednosti matrice $D^2 u_\varepsilon(x_0)$ takve da vrijede

$$O^T D^2 u_\varepsilon(x_0) O = D.$$

Imamo

$$0 < 2d\varepsilon = \Delta u_\varepsilon = \mathrm{tr}(D^2 u_\varepsilon(x_0)) = \mathrm{tr}(O^T D^2 u_\varepsilon(x_0) O) = \sum_{i=1}^d \lambda_i \leq 0.$$

Dakle, funkcije $u_\varepsilon$ postižu svoj maksimum na rubu. Puštanjem $\varepsilon \to 0$ slijedi tvrdnja. ■

**Zadatak 3.1.9.** *Kažemo da je* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ***subharmonička*** *ako vrijedi*

$$-\Delta u \leq 0, \qquad \text{na } \Omega.$$

*a) Dokažite da za subharmoničku funkciju u vrijedi*

$$u(x) \leq \fint_{B(x,r)} u(y)\,dy, \qquad \text{za svaku kuglu } B(x,r) \subseteq \Omega.$$

*b) Dokažite da subharmoničke funkcije zadovoljavaju jaki princip maksimuma, tj.*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

**Zadatak 3.1.10.** *Neka je* $\Omega = K(0,1)$*, te* $f, g$ *neprekidne funkcije. Dokažite da postoji konstanta* $C$ *takva da vrijedi*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq C\Big(\max_{\overline{\Omega}} |f| + \max_{\partial\Omega} |g|\Big)$$

*za svaku funkciju u koja rješava*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{na } K(0,1), \\ \quad u = g & \text{na } S(0,1) \end{cases}$$

*Rješenje.* Označimo s $M := \max_{\overline{\Omega}} |f|$. Promotrimo funkciju

$$v(x) = u(x) + \frac{|x|^2}{2d} M.$$

Ako je $u$ rješenje gornje zadaće, tada u kugli imamo

$$-\Delta v = f - M \leq 0.$$

Prema prethodnom zadatku, $v$ tada postiže svoj minimum na rubu (sferi), pa za sve $x \in K[0,1]$ slijedi

$$u(x) \leq v(x) \leq \max_{\partial\Omega} g + \frac{1}{2d} M \leq \max_{\partial\Omega} |g| + \max_{\overline{\Omega}} |f|.$$

S druge strane, za $v(x) = -u(x) + \frac{|x|^2}{2d} M$ u kugli vrijedi

$$-\Delta v = -(f + M) \leq 0,$$

pa slično dobivamo za svaki $x \in K[0,1]$ da vrijedi i

$$-u(x) \leq v(x) \leq \max_{\partial\Omega}(-g) + \frac{1}{2d} M \leq \max_{\partial\Omega} |g| + \max_{\overline{\Omega}} |f|,$$

odakle slijedi tvrdnja zadatka uz $C = 1$.

■

## 3.2 Dodatak: integriranje u polarnim koordinatama

Najvažniji primjer nelinearnih koordinatnih sustava su polarne koordinate u $\mathbb{R}^2$

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

i sferične koordinate u $\mathbb{R}^3$,

$$x = r\sin\varphi\cos\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta.$$

Posljedica teorema o zamjeni varijabli kod integriranja je da možemo, pomalo neprecizno, pisati

$$dxdy = rdrd\varphi, \qquad dxdydz = r^2\sin\varphi\, drd\varphi d\vartheta.$$

Slični koordinatni sustavi se mogu definirati i za više dimenzije, međutim račun postaje znatno kompliciraniji. Kako će nama funkcije s kojima radimo uglavnom biti radijalne, dovoljno nam je znati da je Lebesgueova mjera esencijalno produkt mjere $r^{d-1}dr$ na $\langle 0,\infty\rangle$ te nekakve sferične mjere na $S^{d-1}$ (što je $d\varphi$ u slučaju $d=2$, odnosno $\sin\varphi\, d\varphi d\vartheta$ za $d=3$). Ovdje se nećemo baviti konstrukcijom takve mjere, navest ćemo samo rezultate bitne za naš račun.

Za $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ **polarne koordinate od** $x$ su dane s

$$r = |x| \in \langle 0,\infty\rangle, \qquad x' = \frac{x}{|x|} \in S^{d-1}.$$

Preslikavanje $\Psi(x) = (r, x')$ je neprekidna bijekcija s $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ na $\langle 0,\infty\rangle \times S^{d-1}$ čiji je također neprekidan inverz dan s $\Psi^{-1}(r,x') = rx'$. Označimo s $m_*$ Borelovu mjeru na $\langle 0,\infty\rangle \times S^{d-1}$ induciranu s $\Psi$ u odnosu na Lebesgueovu, tj. $m_*(E) = m(\Psi^{-1}(E))$ (kao generirajuću familiju skupova možemo zamišljati kružne isječke). Dodatno, neka je $\rho = \rho_d$ mjera na $\langle 0,\infty\rangle$ definirana s $\rho(E) = \int_E r^{d-1}dr$.

**Teorem 3.2.1.** *Postoji jedinstvena Borelova mjera $\sigma = \sigma_{d-1}$ na $S^{d-1}$ takva da je $m_* = \rho\times\sigma$. Ako je $f$ izmjeriva funkcija na $\mathbb{R}^d$ koja je ili s.s. nenegativna ili integrabilna. Tada je*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} f(rx')r^{d-1}d\sigma(x')dr.$$

Posljedica prethodnog teorema je idući rezultat koji ćemo koristiti pri integriranju radijalnih funkcija.

**Korolar 3.2.2.** *Neka je $f$ izmjeriva funkcija na $\mathbb{R}^d$ koja je ili s.s. nenegativna ili integrabilna. Pretpostavimo dodatno da postoji $g : \langle 0,\infty\rangle \to \mathbb{R}$ takva da je $f(x) = g(|x|)$. Tada vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = d\omega_d \int_0^\infty g(r)r^{d-1}dr.$$

## 3.3 Greenova funkcija

U ovom ćemo se dijelu posvetiti problemu rješavanja Poissonove jednadžbe na otvorenom skupu $\Omega \nsubseteq \mathbb{R}^d$ s $C^1$ rubom (u našim slučajevima će on biti "ravan" ili "okrugao"), odnosno **rubne zadaće**

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{u } \Omega, \\ u = g, & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

pri čemu su $f : \Omega \to \mathbb{R}$ i $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ zadane funkcije. Ovu ćemo rubnu zadaću rješavati korištenjem Greenove funkcije područja.

**Definicija 3.3.1.** ***Greenova funkcija*** *područja $\Omega$ je funkcija*

$$G(x, y) := \Phi(y - x) - \phi^x(y), \quad (x, y \in \Omega, x \neq y),$$

*pri čemu je $\phi^x = \phi^x(y)$* ***funkcija korektor*** *dana kao rješenje rubne zadaće*

$$\begin{cases} \Delta\phi^x = 0, & u\ \Omega, \\ \phi^x = \Phi(\cdot - x), & na\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Ukoliko možemo za dani skup $\Omega$ konstruirati pripadnu Greenovu funkciju, rješenje rubne zadaće tada tražimo u obliku

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial n}(x, y) d\sigma(y) + \int_{\Omega} f(y) G(x, y) dy, \quad x \in \Omega,$$

pri čemu je $n$ vanjska normala na $\partial\Omega$, a $\frac{\partial G}{\partial n}(x, y) = \nabla G(x, y) \cdot n(y)$ normalna derivacija.

U praksi se često ispostavlja da je Greenovu funkciju teško konstruirati ako $\Omega$ nema jednostavnu geometrijsku strukturu. Navodimo dva područja čija je Greenova funkcija konstruirana na predavanjima.

**Primjer 3.3.2.** *(Poluprostor $\mathbb{R}^d_+$)*
*Neka je $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$. Označimo s $x'$ refleksiju $x \in \mathbb{R}^d_+$ s obzirom na ravninu $x_d = 0$. Pripadni korektor je tada dan s*

$$\phi^x(y) := \Phi(y - x') = \Phi(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_{d-1} - x_{d-1}, y_d + x_d),$$

*te je Greenova funkcija za poluravninu*

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - x').$$

**Primjer 3.3.3.** *(Jedinična kugla)*
*Neka je $\Omega = K[0, 1]$. Za $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ definiramo* ***dualnu točku s obzirom na*** *$S(0, 1)$*

$$\tilde{x} := \frac{x}{|x|^2}.$$

*Pripadni korektor je tada dan s*

$$\phi^x(y) := \Phi(|x|(y - \tilde{x})),$$

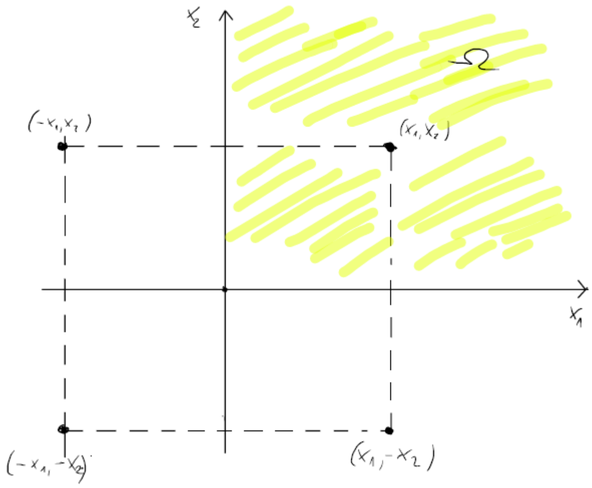
*te je Greenova funkcija za kuglu*

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \tilde{x})).$$

U oba prethodna primjera ideja je bila reflektiranjem s obzirom na rub prebaciti singularitet na područje izvan skupa. Pokušat ćemo sada na sličan način, kombinacijom refleksija, konstruirati Greenovu funkciju za još neke skupove.

**Zadatak 3.3.4.** *(Prvi kvadrant u $\mathbb{R}^2$)*
*Konstruirajte Greenovu funkciju za skup $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0\}$.*

*Rješenje.*




Za točku $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ prvo napravimo standardne refleksije obzirom na $\partial\Omega$, odnosno koordinantne osi, te dobijemo točke $x' = (-x_1, x_2)$ i $x'' = (x_1, -x_2)$. Tada ćemo izrazom

$$\Phi(y - x') + \Phi(y - x'')$$

"poništiti" $\Phi(y - x)$ na koordinatnim osima, međutim ostaje problem relfeksije točke $x'$ obzirom na $x_1$-os, odnosno $x''$ obzirom na $x_2$-os, gdje je zapravo riječ o istoj točki: $x''' = (-x_1, -x_2)$. Dakle, od gornjeg izraza moramo još oduzeti i $\Phi(y - x''')$ da bi dobili traženi korektor. Konačan izraz za Greenovu funkciju je tada

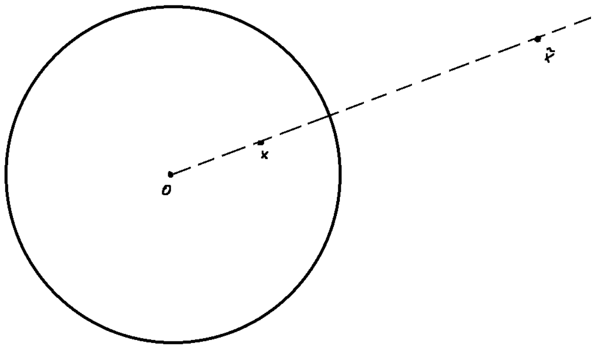
$$\begin{aligned}
G((x_1, x_2), (y_1, y_2)) =& \Phi(y - x) - \Phi(y - x') - \Phi(y - x'') + \Phi(y - x''') \\
=& -\frac{1}{4\pi} \ln\left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right] \\
&+ \frac{1}{4\pi} \ln\left[(x_1 + y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right] \\
&+ \frac{1}{4\pi} \ln\left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2\right] \\
&- \frac{1}{4\pi} \ln\left[(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2\right].
\end{aligned}$$

■

**Napomena 3.3.5.** *Cilj će nam, kao i u prethodnom primjeru, dobiti zatvoren sustav refleksija. Pritom, one točke koje su dobivene neparnim brojem refleksija dolaze s predznakom + u korektoru (odnosno − u konačnom izrazu za Greenovu funkciju), dok one s parnim brojem refleksija dolaze s predznakom − (odnosno + u Greenovoj funkciji).*

**Zadatak 3.3.6.** *Konstruirajte Greenovu funkciju za kuglu $K[0, R]$.*

*Rješenje.*




Kao i u slučaju $R = 1$, radimo inverziju obzirom na sferu $S(0, R)$. Za točku $x \in K[0, R] \setminus \{0\}$ definiramo

$$\tilde{x} := R^2 \frac{x}{|x|^2}.$$

Definiramo korektor za $x \neq 0$

$$\phi^x(y) = \Phi\Big(\frac{|x|}{R}(y - \tilde{x})\Big),$$

odnosno

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi\Big(\frac{|x|}{R}(y - \tilde{x})\Big).$$

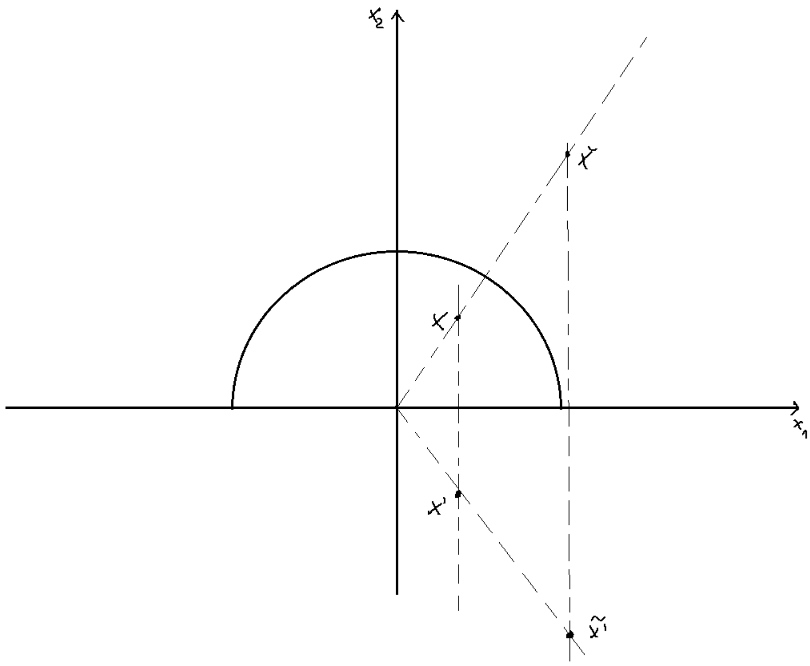
Primijetimo kako funkcija $G(x, y)$ ima singularitet u $x = 0$, međutim taj singularitet je uklonjiv. Zaista, za $y \neq 0$ imamo

$$\lim_{x\to 0} \Phi\Big(\frac{|x|}{R}(y - \tilde{x})\Big) = \lim_{x\to 0} \Phi\Big(\frac{|x|y}{R} - \frac{Rx}{|x|}\Big).$$

Izraz $\frac{|x|y}{R}$ teži ka 0, dok se izraz $\frac{Rx}{|x|}$ uvijek nalazi na $S(0, R)$. Zbog radijalnosti funkcije $\Phi$ je tada gornji limes jednak $\Phi(R)$. ■

**Zadatak 3.3.7.** *Konstruirajte Greenovu funkciju za polukuglu $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 > 0\}$.*

*Rješenje.*



Prvo radimo refleksiju točke $x = (x_1, x_2)$ s obzirom na $x_1$-os, pa zatim i inverziju s obzirom na sferu $S(0,1)$ te dobivamo redom točke $x' = (x_1, -x_2)$ i $\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$. Sljedeće moramo napraviti refleksiju točke $\tilde{x}$ s obzirom na $x_1$-os te inverziju s obzirom na sferu točke $x'$. U oba slučaja dobijemo istu točku, $\tilde{x}' = \frac{x'}{|x|^2}$. Dakle, Greenova funkcija za polukuglu je dana s

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-x') - \Phi(|x|(y-\tilde{x})) + \Phi(|x|(y-\tilde{x}')).$$

■

**Zadatak 3.3.8.** *Izvedite formulu za rješenje rubne zadaće na prvom kvadrantu $\Omega$:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{na } \Omega, \\ u(\cdot, 0) = f, \\ u(0, \cdot) = 0, \end{cases}$$

*gdje je* $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

*Rješenje.* Greenovu funkciju za prvi kvadrant smo već odredili te je ona dana s

$$\begin{aligned} G((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = &-\frac{1}{4\pi}\ln\left[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right] \\ &+\frac{1}{4\pi}\ln\left[(x_1+y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right] \\ &+\frac{1}{4\pi}\ln\left[(x_1-y_1)^2 + (x_2+y_2)^2\right] \\ &-\frac{1}{4\pi}\ln\left[(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2\right]. \end{aligned}$$

Rub skupa $\Omega$ nisu ništa drugo nego pozitivni dijelovi koordinatnih osi. Konačno, jedinična vanjska normala na $x$-os je dana s $(0-,1)$, dok nam za $y$-os neće biti ni potrebna zbog rubnih uvjeta. Posebno je

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial G((x_1,x_2),(y_1,0))}{\partial n_{(y_1,0)}} &= \frac{\partial G((x_1,x_2),(y_1,0))}{\partial y_2} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{x_2}{(x_1-y_1)^2+x_2^2} - \frac{1}{\pi}\frac{x_2}{(x_1+y_1)^2+x_2^2}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem svih podataka u formulu za rješenje dobivamo

$$\begin{aligned}
u(x_1,x_2) &= -\int_0^1 \frac{\partial G((x_1,x_2),(y_1,0))}{\partial n_{(y_1,0)}} y_1 dy_1 \\
&= \frac{x_2}{\pi}\int_0^1 \frac{y_1}{(x_1-y_1)^2+x_2^2}dy_1 - \frac{x_2}{\pi}\int_0^1 \frac{y_1}{(x_1+y_1)^2+x_2^2}dy_1
\end{aligned}$$

Računamo prvi integral u posljednjem izrazu.:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{y_1}{(x_1-y_1)^2+x_2^2}dy_1 &= \int_0^1 \frac{y_1-x_1}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}dy_1 + x_1\int_0^1 \frac{1}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}dy_1 \\
&= \frac{1}{2}\ln\left[(y_1-x_1)^2+x_2^2\right]\Big|_0^1 + \frac{x_1}{x_2}\arctan\left(\frac{y_1-x_1}{x_2}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\ln\left[(1-x_1)^2+x_2^2\right] - \frac{1}{2}\ln\left(x_1^2+x_2^2\right) \\
&\quad - \frac{x_1}{x_2}\arctan\left(\frac{x_1-1}{x_2}\right) + \frac{x_1}{x_2}\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right)
\end{aligned}$$

Analogno dobivamo i izraz za drugi integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{y_1}{(x_1+y_1)^2+x_2^2}dy_1 &= \frac{1}{2}\ln\left[(1+x_1)^2+x_2^2\right] - \frac{1}{2}\ln\left(x_1^2+x_2^2\right) \\
&\quad - \frac{x_1}{x_2}\arctan\left(\frac{x_1+1}{x_2}\right) + \frac{x_1}{x_2}\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right)
\end{aligned}$$

Konačno, imamo

$$u(x_1,x_2) = \frac{x_2}{2\pi}\ln\frac{(x_1-1)^2+x_2^2}{(x_1+1)^2+x_2^2} - \frac{x_1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{x_1-1}{x_2}\right) - \arctan\left(\frac{x_1+1}{x_2}\right)\right).$$

$\blacksquare$

**Zadatak 3.3.9.** *Neka je $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, te $f \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$. Pretpostavimo da za svaki $x \in \mathbb{R}^2$ postoje $\lambda(x) > 0$ i matrica rotacije (ortogonalna matrica s determinantom 1) $O(x)$ takvi da je $Df(x) = \lambda(x)O(x)$. Tada je $\Delta(u \circ f) = \lambda^2 \cdot (\Delta u) \circ f$.*

**Zadatak 3.3.10.** *Izvedite formulu za rješenje rubne zadaće*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{na } \Omega \\ u = g, & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

*gdje je* $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 - x_1 > 0\}$ *i* $g(x_1, x_2) = \chi_{K(0,1)}(x_1, x_2)$.

*Rješenje.* Označimo s $O$ matricu rotacije ravnine za kut $\frac{\pi}{4}$, te uvedimo funkciju $v(x) = u(Ox)$. Prema zadatku 3.1.4., $v$ također zadovoljava Laplaceovu jednadžbu, dok početni uvjet, zbog invarijantnosti funkcije $g$ na rotacije, ostaje isti. Dakle, transformirana zadaća je:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ v(x_1, 0) = \chi_{[-1,1]}(x_1), & \text{na } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

Vanjska normala na rub je dana s $n(y_1, 0) = (0, -1)$, pa nam je jedino potrebno izračunati $\frac{\partial G}{\partial y_2}$. Rješenje gornjeg problema je onda dano formulom

$$v(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial y_2}(x_1, x_2, y_1, 0)\chi_{[-1,1]}(y_1)dy_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\partial G}{\partial y_2}(x_1, x_2, y_1, 0)dy_1$$

Greenova funkcija za gornju poluravninu je dana s

$$G(x_1, x_2, y_1, y_2) = -\frac{1}{4\pi}\Big( \ln[(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2] - \ln[(y_1 - x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2] \Big).$$

Deriviranjem po $y_2$ te uvrštavanjem $y_2 = 0$ dobivamo

$$\frac{\partial G}{\partial y_2}(x_1, x_2, y_1, 0) = \frac{1}{\pi} \frac{x_2}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2}.$$

Uvrštavanjem u formulu za rješenje slijedi

$$v(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{dy_1}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} = \frac{1}{\pi}\left( \arctan\left(\frac{1 - x_1}{x_2}\right) + \arctan\left(\frac{1 + x_1}{x_2}\right)\right)$$

Preostaje još iskoristiti $u(x_1, x_2) = v(O^T(x_1, x_2)) = v\big(\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - x_2, x_1 + x_2)\big)$.

∎

# Poglavlje 4

# Jednadžba provođenja

U ovom poglavlju promatramo **jednadžbu provođenja**

$$u_t - \Delta u = 0,$$

odnosno **nehomogenu jednadžbu provođenja**

$$u_t - \Delta u = f,$$

na skupu $\Omega \times \langle 0, \infty \rangle$, pri čemu je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren. Ovdje ćemo se uglavnom baviti slučajem $\Omega = \mathbb{R}^d$, odnosno traženjem funkcije $u : \mathbb{R}^d \times [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ koja rješava početnu zadaću

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{u } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ u = g, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}. \end{cases},$$

pri čemu su $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ unaprijed zadane funkcije.

Rješenje te početne zadaće je reprezentirano sljedećom formulom:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y,t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y, t-s) f(y,s) dy ds,$$

gdje je $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ **elementarno rješenje jednadžbe provođenja** definirano s

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

**Napomena 4.1.1.** *Za svaki $t > 0$ vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x,t) dx = 1.$$

**Zadatak 4.1.2.** *Pokažite da za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ vrijedi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

**Zadatak 4.1.3.** *Odredite rješenje početne zadaće*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = e^t, & na\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x_1, x_2, 0) = \cos x_1 \sin x_2. \end{cases}.$$

*Rješenje.* Koristimo formulu za rješenje:

$$u(x_1, x_2, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y, t) \cos y_1 \sin y_2 \, dy_1 dy_2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y, t-s) e^s \, dy_1 dy_2 ds.$$

Računamo prvi integral u izrazu:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y, t) \cos y_1 \sin y_2 \, dy_1 dy_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{4t}} \cos y_1 \, dy_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_2-y_2)^2}{4t}} \sin y_2 \, dy_2 \\ &= I_1 \cdot I_2. \end{aligned}$$

Izračunajmo sada $I_1$ zasebno:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{4t}} \cos y_1 \, dy_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z_1^2}{4t}} \cos(z_1 + x_1) \, dz_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z_1^2}{4t}} (\cos z_1 \cos x_1 - \sin z_1 \sin x_1) \, dz_1 \\ &= \cos x_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z_1^2}{4t}} \cos z_1 \, dz_1 + \sin x_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z_1^2}{4t}} \sin z_1 \, dz_1 \\ &= \sqrt{4\pi t} \cos x_1 e^{-t}. \end{aligned}$$

Na isti način dođemo i do

$$I_2 = \sqrt{4\pi t} \sin x_2 e^{-t},$$

pa je prvi integral jednak

$$e^{-2t} \cos x_1 \sin x_2.$$

Sada računamo drugi integral u početnom izrazu:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y, t-s) e^s \, dy_1 dy_2 ds = \int_0^t e^s \Big( \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y, t-s) dy \Big) ds = \int_0^t e^s ds = e^t - 1.$$

Dakle, konačno rješenje je

$$u(x_1, x_2, t) = e^{-2t} \cos x_1 \sin x_2 + e^t - 1.$$

■

**Zadatak 4.1.4.** *Izvedite eksplicitnu formulu za rješenje početne zadaće.*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f, & u\ \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ u = g, & na\ \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

*Rješenje.* Uvedimo pomoćnu funkciju

$$v(x,t) = u(x,t)e^{ct}.$$

Vidimo da tada $v$ zadovoljava jednadžbu

$$v_t - \Delta v = e^{ct}(u + cu - \Delta u) = e^{ct} f,$$

uz početne uvjete

$$v(x,0) = u(x,0).$$

Koristeći formulu za rješenje jednadžbe provođenja zaključujemo da je

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y,t)g(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y,t-s)e^{cs} f(y,s)dyds.$$

Konačno, imamo

$$u(x,t) = e^{-ct}v(x,t) = e^{-ct}\int_0^t \Phi(x,t-s)g(s)ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y,t-s)e^{c(s-t)} f(y,s)ds.$$

■

**Napomena 4.1.5.** *Izvedimo formulu za rješenje početne zadaće*

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

*gdje je $k > 0$. Stavimo*

$$v(x,t) = u(\sqrt{k}x, t).$$

*Tada $v$ zadovoljava jednadžbu*

$$v_t - \Delta v = u_t - k\Delta u = 0,$$

*uz početne uvjete*

$$v(x,0) = u(\sqrt{k}x, 0) = g(\sqrt{k}x).$$

*Koristeći formulu za rješenje ovog problema dobivamo*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(\frac{1}{\sqrt{k}}x, t) \\ &= (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\frac{x}{\sqrt{k}} - y|^2}{4t}} g(\sqrt{k}y)dy \\ &= (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{|x-\sqrt{k}y|^2}{4kt}} g(\sqrt{k}y)dy \\ &= (4\pi kt)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{|x-y|^2}{4kt}} g(y)dy \end{aligned}$$

*Funkciju*

$$\Phi_k(x,t) = (4\pi kt)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4kt}},$$

*ćemo također zvati elementarno rješenje jednadžbe provođenja. Isto kao i ranije, za sve* $t > 0$ *vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi_k(x,t)dx = 1.$$

**Zadatak 4.1.6.** *Izvedite eksplicitnu formulu za rješenje početne zadaće.*

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} + bu_x + cu = 0, & u\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u = g, & na\ \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

*gdje su* $k > 0$, $b, c$ *konstante. Pokažite da u slučaju da je* $c > 0$ *i* $g$ *omeđena funkcija vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty} |u(x,t)| = 0.$$

*Rješenje.* Kao i u prethodnom zadatku, uvest ćemo pomoćnu funkciju oblika

$$v(x,t) = u(x,t)e^{\alpha x + \beta t},$$

pri čemu ćemo konstante $\alpha$ i $\beta$ odrediti tako da nova funkcija zadovoljava jednadžbu provođenja. Za početak, dobivamo

$$v_t = e^{\alpha x+\beta t}(u_t + \beta u), \quad v_x = e^{\alpha x+\beta t}(u_x + \alpha u), \quad v_{xx} = e^{\alpha x+\beta t}(u_{xx} + 2\alpha u_x + \alpha^2 u),$$

pa vidimo da $v$ zadovoljava

$$v_t - kv_{xx} = e^{\alpha x+\beta t}(u_t - ku_{xx} - 2k\alpha u_x + (\beta - k\alpha^2)u).$$

Konstante $\alpha$ i $\beta$ sada odabiremo tako da vrijedi

$$2k\alpha = -b, \qquad \beta - k\alpha^2 = c,$$

odnosno

$$\alpha = -\frac{b}{2k}, \qquad \beta = \frac{b^2}{4k} + c.$$

Kako sada $v$ rješava jednadžbu provođenja uz početni uvjet

$$v(x,0) = e^{-\frac{b}{2k}x} g(x),$$

možemo koristiti formulu za rješenje pa imamo

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_k(x-y,t)e^{-\frac{b}{2k}y} g(y)dy,$$

odnosno, vraćanjem natrag na početnu funkciju $u$

$$u(x,t) = e^{\frac{b}{2k}x - (\frac{b^2}{4k}+c)t} \int_{\mathbb{R}} \Phi_k(x-y,t)e^{-\frac{b}{2k}y} g(y)dy.$$

Pokažimo još da je u slučaju $c > 0$ i $||g||_\infty < \infty$ za svaki $x$

$$\lim_{t\to\infty} |u(x,t)| = 0.$$

Ocjenjujemo redom:

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq e^{\frac{b}{2k}x-(\frac{b^2}{4k}+c)t}\int_{\mathbb{R}} \Phi_k(x-y,t)e^{-\frac{b}{2k}}|g(y)|dy \\
&\leq e^{\frac{b}{2k}x-(\frac{b^2}{4k}+c)t}||g||_\infty(4\pi kt)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}e^{-\frac{b}{2k}y}dy \\
&= ||g||_\infty e^{\frac{b}{2k}x-(\frac{b^2}{4k}+c)t}(4\pi kt)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-(x-bt))^2}{4kt}}\cdot e^{-\frac{b}{2k}x+\frac{b^2}{4k}t}dy \\
&\leq ||g||_\infty e^{-ct}(4\pi kt)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-(x-bt))^2}{4kt}}dy \\
&= Ce^{-ct}.
\end{aligned}$$

Kako je $c > 0$, gornji izraz puštanjem $t \to \infty$ teži ka 0. ■

Promotrimo sada iduću **početno-rubnu** zadaću

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{na } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = g, & x > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

gdje je $g$ neka unaprijed zadana funkcija takva da je $g(0) = 0$ (kompatibilnost početnih i rubnih uvjeta). Rješavanju ovog problema ćemo pristupiti na idući način; pokušat ćemo ga proširiti do odgovarajuće početne zadaće (dakle, na cijelom prostoru $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$) na kojem znamo formulu za rješenje, te "očitati" vrijednosti za nenegativne $x$. Prije nego nastavimo, pokažimo sljedeću tvrdnju.

**Zadatak 4.1.7.** *Pretpostavimo da je u rješenje početne zadaće*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = g(x), \end{cases}$$

*najviše eksponencijalnog rasta gdje je $g$ neparna funkcija. Tada je i $x \mapsto u(x,t)$ neparna funkcija za sve $t > 0$.*

*Rješenje.* Stavimo $v(x,t) = u(-x,t)$. Zbog neparnosti funkcije $g$, funkcija $v$ je tada rješenje sljedeće početne zadaće

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, \\ v(x,0) = -g(x), \end{cases} .$$

Slijedi da je $w := u + v$ rješenje

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, \\ w(x,0) = 0, \end{cases}$$

pa je $w \equiv 0$, odnosno

$$u(x,t) = -v(x,t) = -u(-x,t).$$

■

Vratimo se sada na našu početno-rubnu zadaću. S obzirom da za neparnu funkciju $f$ vrijedi $f(0) = 0$, te uzevši u obzir prethodni zadatak, prirodno je naš problem proširiti na cijeli prostor proširenjem po neparnosti. Tada je uvjet $u(0,t) = 0$ automatski zadovoljen za sve $t > 0$, te nam preostaje samo riješiti odgovarajuću početnu zadaću. Preciznije, neka je $\tilde{u}$ proširenje funkcije $u$, a $\tilde{g}$ funkcije $g$ po neparnosti, tj.

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & x > 0 \\ -u(-x,t), & x < 0 \end{cases}, \qquad \tilde{g}(x,t) = \begin{cases} g(x,t), & x > 0 \\ -g(-x,t), & x < 0. \end{cases}$$

Tada $\tilde{v}$ rješava početnu zadaću

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta\tilde{u} = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{g}, & \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Koristeći formulu za rješenje jednadžbe provođenja na cijelom prostoru dobivamo

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t)\tilde{g}(y)dy \\ &= -\int_{-\infty}^{0} \Phi(x-y,t)g(-y)dy + \int_0^\infty \Phi(x-y,t)g(y)dy \\ &= \int_0^\infty \Big(\Phi(x-y,t) + \Phi(x+y,t)\Big)g(y)dy \end{aligned}$$

**Zadatak 4.1.8.** *Neka je $g \in C^1(\mathbb{R})$ takva da je $g(0) = 0$. Zadana je početno-rubna zadaća*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & u\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0, & na\ \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ u = g, & na\ \{x = 0\} \times [0, \infty\rangle. \end{cases}$$

*Izvedite iduću formulu za rješenje te zadaće:*

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} g(s)ds.$$

*Rješenje.* Pretpostavimo da je $u$ rješenje početno-rubne zadaće. Stavimo

$$v(x,t) = u(x,t) - g(t)$$

te proširimo funkciju $v$ po neparnosti po prostornoj varijabli

$$\tilde{v}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) - g(t), & x \geq 0, \\ -u(-x,t) + g(t), & x < 0. \end{cases}$$

Tada funkcija $\tilde{v}$ rješava sljedeću početnu zadaću

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - \tilde{v}_{xx} = \begin{cases} -g'(t), & x > 0, \\ g'(t), & x < 0. \end{cases} \\ \tilde{v}(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Koristeći formulu za rješenje početne zadaće, zaključujemo kako je

$$\tilde{v}(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^0 \Phi(x-y,t-s)g'(s)dyds - \int_0^t \int_0^\infty \Phi(x-y,t-s)g'(s)dyds,$$

što zapisujemo kao

$$\int_0^t \int_{-\infty}^\infty \Phi(x-y,t-s)g'(s)dyds - 2\int_0^t \int_0^\infty \Phi(x-y,t-s)g'(s)dyds.$$

Prvi integral je jednak $g(t)$, dok za računanje drugog integrala uvodimo

$$h(s) = \int_0^\infty \Phi(x-y,t-s)dy.$$

Tada je drugi integral jednak

$$-2\int_0^t g'(s)h(s)ds.$$

Uvođenjem zamjene varijabli $z = \frac{y-x}{\sqrt{4(t-s)}}$ dobivamo

$$h(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{4(t-s)}}}^\infty e^{-z^2}dz,$$

odnosno

$$h'(s) = \frac{x}{4\sqrt{\pi}(t-s)^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}.$$

Parcijalnom integracijom sada dobivamo

$$-2\int_0^t g'(s)h(s)ds = -2g(s)h(s)\Big|_0^t + 2\int_0^t g(s)h'(s)ds = -2g(t) + \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi}(t-s)^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} g(s)ds.$$

Dakle, funkcija $\tilde{v}$ je dana s

$$\tilde{v}(x,t) = -g(t) + \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi}(t-s)^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} g(s)ds.$$

S obzirom da nas zanima formula za $u$ u slučaju $x \geq 0$, vraćamo se natrag u izraz $u(x,t) = v(x,t) + g(t)$ te dobivamo traženu formulu. ■

Promotrimo sada iduću početno-rubnu zadaću.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{na } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = g, & x > 0 \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

Kao i u prethodnim primjerima, ideja je proširiti problem na cijeli prostor odgovarajućom refleksijom te primijeniti rezultat rješenja na novonastali problem. Za razliku od prethodnog slučaja, ovdje je zadan uvjet na prostornu derivaciju u točkama na $t$-osi. Potrebna nam je odgovarajuća refleksija koja će automatski zadovoljiti taj uvjet. Prvo primijetimo kako je derivacija parne funkcije neparna; zaista, iz $u(x) = u(-x)$ deriviranjem slijedi $u'(x) = -u'(-x)$). Stoga nam je prirodno proširenje u ovom slučaju ono po parnosti. Stoga stavimo

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & x > 0 \\ u(-x,t), & x < 0 \end{cases}, \qquad \tilde{g}(x,t) = \begin{cases} g(x,t), & x > 0 \\ g(-x,t), & x < 0. \end{cases}$$

Tada $\tilde{u}$ rješava početnu zadaću

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{g}, & \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Koristeći formulu za rješenje dobivamo

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t)\tilde{g}(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \Phi(x-y,t)g(-y)dy + \int_0^\infty \Phi(x-y,t)g(y)dy \\ &= \int_0^\infty \Big(\Phi(x-y,t) - \Phi(x+y,t)\Big)g(y)dy \end{aligned}$$

**Zadatak 4.1.9.** *(alternativni dokaz principa maksimuma)*
*Pretpostavimo da je $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ rješenje jednadžbe provođenja. Tada vrijedi*

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

***Uputa:*** *Promotrite familiju funkcija $u_\varepsilon = u - \varepsilon t$.*

# Poglavlje 5

# Valna jednadžba

U posljednjem poglavlju bavimo se **valnom jednadžbom**,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{u } \mathbb{R}^d \times \langle 0, \infty \rangle, \\ u(\cdot, 0) = g, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \\ u_t(\cdot, 0) = h, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

gdje su $g, h$ unaprijed zadane funkcije, a $u$ traženo rješenje.

Formula za reprezentaciju rješenja postoji, međutim, ona ovisi o dimenziji prostora. Navest ćemo u nastavku samo pripadne formule za dimenzije $d = 1, 2, 3$.

$\boxed{d = 1}$ **D'Alembertova formula:**

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy$$

$\boxed{d = 2}$ **Poissonova formula:**

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{K(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t\nabla g(y) \cdot (y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy$$

$\boxed{d = 3}$ **Kirchhoffova formula:**

$$u(x,t) = \fint_{S(x,t)} th(y) + g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) \, dS(y)$$

Nehomogenu jednadžbu rješavamo pomoću **Duhamelovog principa**; za zadaću

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \text{u } \mathbb{R}^d \times \langle 0, \infty \rangle, \\ u(\cdot, 0) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \\ u_t(\cdot, 0) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

rješenje je dano s

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;s)ds,$$

pri čemu je $v(\cdot,\cdot;s)$ rješenje problema translatiranog za $s$ u vremenu:

$$\begin{cases} v_{tt}(\cdot,\cdot;s) - \Delta v(\cdot,\cdot;s) = 0, & \text{u } \mathbb{R}^d \times \langle s, \infty\rangle, \\ v(\cdot,s;s) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = s\}, \\ u_t(\cdot,s;s) = f, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = s\}. \end{cases}$$

Ukoliko imamo početnu zadaću

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \text{u } \mathbb{R}^d \times \langle 0, \infty\rangle, \\ u(\cdot,0) = g, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \\ u_t(\cdot,0) = h, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

tada ju rješavamo rastavljanjem na dva dijela:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \text{u } \mathbb{R}^d \times \langle 0, \infty\rangle, \\ u(\cdot,0) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, , \\ u_t(\cdot,0) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{u } \mathbb{R}^d \times \langle 0, \infty\rangle, \\ u(\cdot,0) = g, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \\ u_t(\cdot,0) = h, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Zatim pronađemo rješenje svake od ovih dviju zadaća, te konačno rješenje dobivamo njihovim zbrajanjem.

**Zadatak 5.1.1.** *Riješite Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 2, & u\ \mathbb{R}^2 \times \langle 0, \infty\rangle, \\ u(x_1,x_2,0) = x_1, & na\ \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}, \\ u_t(x_1,x_2,0) = x_2, & na\ \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

*Rješenje.* Rješavamo prvo pripadni homogeni dio:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{u } \mathbb{R}^2 \times \langle 0, \infty\rangle, \\ u(x_1,x_2,0) = x_1, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}, \\ u_t(x_1,x_2,0) = x_2, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Prema Poissononvoj formuli rješenje ove zadaće je dano s

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{K(x,t)} \frac{ty_1 + t^2 y_2 + t(y_1 - x_1)}{(t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy.$$

Prelazimo na polarne koordinate

$$y_1 = x_1 + r\cos\varphi, \quad y_2 = x_2 + r\sin\varphi, \quad |J| = r,$$

pa integral postaje

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi t^2}\int_0^t \int_0^{2\pi} r\frac{tr\cos\varphi + tx_1 + t^2 r\sin\varphi + t^2 x_2 + tr\cos\varphi}{(t^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}d\varphi dr \\
&= \frac{1}{2\pi t^2}\int_0^t \frac{tr}{(t^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{2\pi}(2r\cos\varphi + tr\sin\varphi + x_1 + tx_2)d\varphi dr \\
&= \frac{1}{2\pi t}\int_0^t \frac{r}{(t^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}2\pi(x_1+tx_2)dr \\
&= \frac{x_1+tx_2}{t}\int_0^t \frac{r}{(t^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}dr \\
&= x_1 + tx_2
\end{aligned}$$

Preostaje još riješiti i drugi dio zadaće. Za rješavanje tog problema potrebno nam je riješiti sljedeću zadaću:

$$\begin{cases}
v_{tt} - \Delta v = 0, & \text{u } \mathbb{R}^2 \times \langle 0, \infty\rangle, \\
v(x_1,x_2,0) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t=0\}, \\
v_t(x_1,x_2,0) = 2, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t=0\}.
\end{cases}$$

■

Ponovno koristimo Poissonovu formulu za rješenje; ono je dano s

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \frac{1}{2\pi t^2}\int_{K(x,t)} \frac{2t^2}{(t^2-|y-x|^2)^{\frac{1}{2}}}dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{K(0,t)} \frac{dz}{(t^2-|z|^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi} \frac{r}{(t^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}d\varphi dr \\
&= 2t
\end{aligned}$$

Dakle, rješenje translatiranog problema je onda

$$v(x,t;s) = v(x,t-s) = 2(t-s),$$

pa je rješenje nehomogenog dijela jednadžbe dano s

$$\int_0^t v(x,t;s)ds = \int_0^t 2(t-s) = t^2.$$

Konačno, rješenje početne zadaće je

$$u(x,t) = x_1 + tx_2 + t^2.$$

**Zadatak 5.1.2.** *Neka je u rješenje zadaće*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & na\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u = g, & na\ \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ u_t = h, & na\ \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

*pri čemu su $g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Definiramo kinetičku energiju s*

$$k(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t^2(x,t)dx$$

*te potencijalnu energiju s*

$$p(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)dx.$$

*Dokažite:*

*a) $k(t) + p(t)$ je konstantno,*

*b) postoji $t_0 > 0$ takav da je $k(t) = p(t)$ za $t > t_0$.*

*Rješenje.* a) Prema D'Alembertovoj formuli, rješenje $u$ je dano s

$$u(x,t) = \frac{g(x+t) + g(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy.$$

Primijetimo prvo kako za fiksni $t > 0$ funkcija $x \mapsto u(x,t)$ ima kompaktan nosač. To slijedi direktno iz gornje formule; za dovoljno velike $x$ je $[x-t, x+t] \cap$ (supp $g \cup$ supp $h$)) $= \emptyset$. Zbog ovoga i funkcije $x \mapsto u_t(x,t)$ i $x \mapsto u_x(x,t)$ također imaju kompaktan nosač. Posebno, opravdano je deriviranje pod integralom i parcijalna integracija nema rubni član pa imamo:

$$(k+p)'(t) = \int_{\mathbb{R}} u_t u_{tt} dx + \int_{\mathbb{R}} u_x u_{xt} dx \overset{\text{P.I.}}{=} \int_{\mathbb{R}} u_t(u_{tt} - u_{xx})dx = 0.$$

b) Koristimo ponovno D'Alembertovu formulu. Deriviranjem po $x$, odnosno po $t$, dobijemo sljedeće izraze:

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2}[g'(x+t) + g'(x-t)] + \frac{1}{2}[h(x+t) - h(x-t)],$$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}[g'(x+t) - g'(x-t)] + \frac{1}{2}[h(x+t) + h(x-t)].$$

Računamo:

$$p(t) - k(t) = \int_{\mathbb{R}} (u_x^2 - u_t^2)dx = \int_{\mathbb{R}} (u_x - u_t)(u_x + u_t)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} [g'(x-t) - h(x-t)][g'(x+t) + h(x+t)]dx.$$

Ponovno, zbog kompaktnosti nosača od $g$ i $h$, za dovoljno veliki $t$ je za svaki $x$ jedna od točaka $x - t$ i $x + t$ izvan nosača i od $g$ i od $h$, pa je za takve $t$ uvijek jedan od faktora jednak 0; preciznije, dovoljno je uzeti $a > 0$ takav da je (supp $g \cup$ supp $h$)) $\subseteq [-a, a]$, te staviti $t_0 = 3a$. Za $t > t_0$ tada vrijedi $k(t) = p(t)$.

■