Sadržaj

Poglavlje 1

Uvodne oznake

Za sam početak, navedimo nekoliko osnovnih notacija:

- Varijable ćemo označavati s $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, ili s $(x,t) = (x_1, \ldots, x_d, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$.
- Nepoznatu funkciju ćemo označavati s u, te će njena domena generalno biti otvoreni skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, odnosno $\Omega \times [0,T]$ za neki $T > 0$.
- Za parcijalne derivacije ćemo često osim standardne oznake $\frac{\partial}{\partial x_j}$ kraće pisati ∂_j, kao i u_{x_j}.
- Za multiindeks $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ definiramo $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, te $\alpha! = (\alpha_1!) \cdots (\alpha_d!)$. Neka je dodatno $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{N}_0^d$. Pišemo $\alpha \leq \beta$ ako je $\alpha_i \leq \beta_i$, za sve $i = 1, \ldots, d$. Također, možemo definirati i binomni koeficijent $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_d}{\beta_d}$.
- Koristeći prethodne oznake, zapisujemo polinome u varijabli $x = (x_1, \ldots, x_d)$, kao i mješovite derivacije na sljedeći način:
  1. $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$,
  2. $\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}} u(x)$. Ovdje se nekad umjesto ∂^α koristi i oznaka D^α. Zbog Schwartzovog teorema, poredak deriviranja nije bitan za dovoljno puta diferencijabilne funkcije, stoga je oznaka ∂^α smislena.

Idućih rezultati su višedimenzionalne verzije otprije poznatih rezultata za funkcije jedne varijable, a za primijetiti je kako su formule gotovo veoma slične jednodimenzionalnim.

Propozicija 1.1.1. *1. (binomna formula) Neka su $x, y \in \mathbb{R}^d$. Tada vrijedi*

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha - \beta},$$

2. *(Newton-Leibnizova formula) Neka su $f, g \in C^k(\mathbb{R}^d)$, te $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ takav da je $|\alpha| \leq k$. Tada je*
$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g,$$

3. *(Taylorov teorem) Neka je $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$. Tada za sve $x, y \in \mathbb{R}^d$ vrijedi*
$$f(x+y) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} x^\alpha + R_k(x,y),$$
pri čemu je ostatak R_k dan s
$$R_k(x,y) = \sum_{|\alpha|=k} k \frac{y^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\alpha u(x+ty) dt.$$
Također, barem formalno gledano, razvoj funkcije u Taylorov red oko točke c je dan s
$$f(x) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \frac{\partial^\alpha f(c)}{\alpha!} (x-c)^\alpha.$$

Za $k \in \mathbb{N}_0$ ćemo s $D^k u$ označavati sve parcijalne derivacije funkcije u reda k. Posebno, ukoliko je $k = 1$, $D^1 u(x)$ možemo zapisati i kao $\nabla u(x) \in \mathbb{R}^d$: iako je gradijent funkcije zapravo vektor-stupac, ovdje ćemo naizmjenično ga smatrati i vektorom stupcem i vektorom retkom; iz konteksta će biti jasno o kojoj se verziji radi. Također, za $k = 2$, $D^2 u(x)$ možemo zapisati i kao Hessijan, simetričnu $d \times d$ matricu drugih derivacija funkcije u.

Definicija 1.1.2. *Izraz oblika*
$$F(x, u(x), Du(x), \ldots, D^{k-1}u(x), D^k u(x)) = 0, \qquad x \in \Omega \tag{1.1}$$
nazivamo ***parcijalnom diferencijalnom jednadžbom** k**-tog reda**, pri čemu je*
$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^{d^k} \to \mathbb{R},$$
zadana, a
$$u : \Omega \to \mathbb{R}$$
nepoznata funkcija.

Rješavanje PDJ-a (1.1) podrazumijeva pronalaženje svih funkcija u koje zadovoljavaju danu jednadžbu u nekom smislu. U ovom dijelu ćemo govoriti samo o rješenjima u **klasičnom smislu**, odnosno o funkcijama $u \in C^k$ koje zadovoljavaju jednadžbu za svaki $x \in \Omega$ direktnim uvrštavanjem.

Poglavlje 2

Jednadžbe 1. reda s konstantnim koeficijentima

Krećemo s najjednostavnijom parcijalnom diferencijalnom jednadžbom, linearnom jednadžbom 1. reda s konstantnim koeficijentima (često se zbog fizikalne interpretacije koristi naziv *transportna jednadžba*):

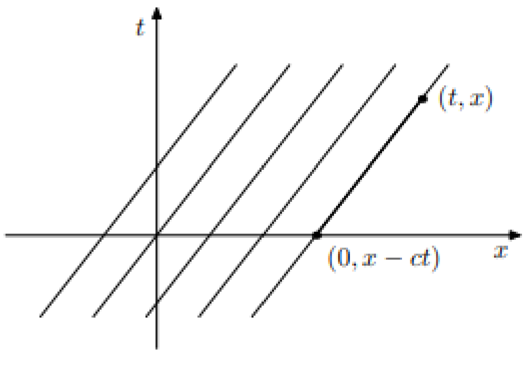
$$u_t + cu_x = 0, \quad \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

gdje je $c \in \mathbb{R}$ neka konstanta, a $u : \mathbb{R} \times [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ nepoznata funkcija.

Pretpostavimo sada da je funkcija $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ rješenje jednadžbe te pokušajmo doći do eksplicitnog izraza za u. Primijetimo kako jednadžbu možemo drugačije zapisati

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Drugim riječima, funkcija $u = u(x,t)$ je konstantna duž pravaca smjera $\begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix}$.



Dakle, ukoliko znamo vrijednost funkcije u za barem jednu točku svakog takvog pravca, možemo odrediti vrijednost za proizvoljnu točku. Stoga ćemo promotriti sljedeću **početnu zadaću**:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u = g, & \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

gdje je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unaprijed zadana funkcija. Svaka točka $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ leži na pravcu oblika $x - ct = x_0$, za neki $x_0 \in \mathbb{R}$. Uzveši u obzir prethodna razmatranja, imamo

$$u(x,t) = u(x_0, 0) = g(x_0) = g(x - ct).$$

Dakle, jedini kandidat za rješenje je dan gornjom formulom. Ako je $g \in C^1$, onda je ovom formulom očito dano C^1 rješenje početne zadaće. U suprotnom klasično rješenje ne postoji (o drugim oblicima rješenja ćemo govoriti više na kolegiju PDJ2).

Zadatak 2.1.1. *Pokažite da za $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $f \in C(\mathbb{R}^2)$ postoji točno jedno rješenje početne zadaće te izvedite formulu za rješenje*

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f, & \textit{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = g. \end{cases}$$

Rješenje. Prije same egzistencije rješenja, pokazat ćemo da, ukoliko ono postoji, mora biti jedinstveno. Način na koji ćemo to napraviti je standardan za **linearne** jednadžbe. Pretpostavimo da su u_1, u_2 dva rješenja. Tada $u := u_1 - u_2$ zadovoljava

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = 0. \end{cases}$$

Prethodni rezultat nam tada daje $u = 0$, odnosno $u_1 = u_2$.
Izvedimo sada formulu za rješenje (kojom ćemo ujedno i pokazati egzistenciju). Ovdje bismo također mogli ponoviti pristup iz prethodnog problema, no pokazat ćemo jedan drugačiji način koji će biti motivacija i za neke kompliciranije primjere kasnije. Želimo uvesti zamjenu varijabli

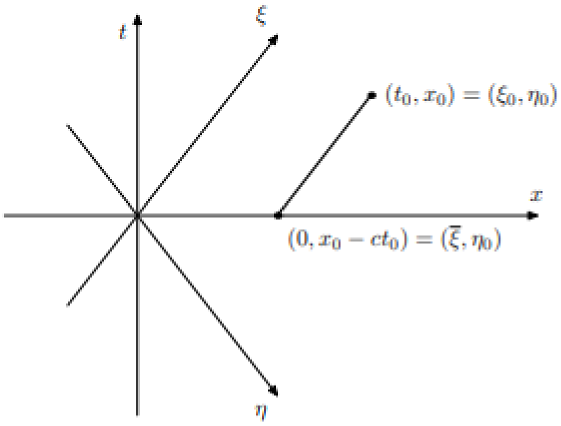
$$\begin{cases} \xi = \xi(x,t) \\ \eta = \eta(x,t) \end{cases}$$

takvu da diferencijalna jednadžba u novim koordinatama postane jednostavnija. S obzirom da je problem linearan, te zbog već viđene uloge pravaca smjera $(c, 1)$, pogodna je linearna zamjena varijabli

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct.$$

Također, definiramo funkcije u novim varijablama:

$$v(\xi,\eta) := u(x,t), \quad \tilde{f}(\xi,\eta) := f(x,t).$$



Uvjerimo se da smo stvarno na ovaj način došli do jednostavnijeg problema. Imamo

$$\begin{aligned} u_t &= cv_\xi - cv_\eta \\ u_x &= v_\xi + v_\eta, \end{aligned}$$

pa zbog $\tilde{f} = f = u_t + cu_x = 2cv_\xi$ vidimo da funkcija v zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$v_\xi(\xi,\eta) = \frac{1}{2c}\tilde{f}(\xi,\eta).$$

Ovo je sada ODJ prvog reda (po ξ varijabli) pa rješenje v u točki (ξ_0,η_0) dobivamo integriranjem od točke $(\overline{\xi},\eta_0)$ do (ξ_0,η_0) što daje

$$v(\xi_0,\eta_0) = v(\overline{\xi},\eta_0) + \frac{1}{2c}\int_{\overline{\xi}}^{\xi_0} \tilde{f}(\xi,\eta_0)d\xi.$$

Preostaje nam još vratiti se u originalne koordinate. Imamo

- $v(\xi_0,\eta_0) = u(x_0,t_0)$,
- $v(\overline{\xi},\eta_0) = u(x_0 - ct_0, 0)$,
- $\tilde{f}(\xi,\eta_0) = f\left(\frac{\xi+\eta_0}{2}, \frac{\xi-\eta_0}{2c}\right)$,

što daje

$$u(x_0,t_0) = u(x_0 - ct_0, 0) + \frac{1}{2c}\int_{\overline{\xi}}^{\xi_0} f\Big(\frac{\xi+\eta_0}{2}, \frac{\xi-\eta_0}{2c}\Big)d\xi.$$

Preostaje još vratiti se u stare varijable pod integralom: $\begin{bmatrix} t = \frac{\xi-\eta_0}{2c} & dt = \frac{1}{2c}d\xi \\ \xi = \overline{\xi} & t = \frac{\overline{\xi}-\eta_0}{2c} = 0 \\ \xi = \xi_0 & t = \frac{\xi_0-\eta_0}{2c} \end{bmatrix}$ što konačno daje

$$u(x_0,t_0) = g(x_0 - ct_0) + \int_0^{t_0} f(x_0 - ct_0 + ct, t)dt$$

Direktnom provjerom zaista se možemo uvjeriti da je time dano rješenje početnog problema.

■

Za vježbu, pokažite analogan rezultat u slučaju kada je prostorna varijabla x u više dimenzija (**Uputa:** ponovno promotrite ponašanje rješenja duž odgovarajućih pravaca).

Zadatak 2.1.2. *Pokažite da za $c \in \mathbb{R}^n, f \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ i $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ postoji jedinstveno rješenje početne zadaće*

$$\begin{cases} u_t + c\cdot\nabla u = f, \\ u(\cdot,0) = g. \end{cases}$$

Pokažimo još kako tehnikom prikazanom u prethodnom primjeru možemo riješiti i polulinearnu jednadžbu u kojoj su koeficijenti uz derivacije konstantni.

Zadatak 2.1.3. *Zadana je polulinearna početna zadaća*

$$\begin{cases} u_t + cu_x + u^2 = 0, \quad \text{na } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ u(\cdot,0) = g, \end{cases}$$

gdje je $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ te $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $g \neq 0$. Pokažite da postoji lokalno rješenje $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times\langle-\delta,\delta\rangle)$. Može li se to rješenje proširiti do C^∞ rješenja na čitavom $\mathbb{R}^2$?

Rješenje. Kako je dio s derivacijama najvišeg reda (prvog) isti kao i u prethodnim primjerima, koristimo se istom zamjenom varijabli kako bi se taj dio sveo na parcijalne derivacije po samo jednoj od varijabli. Uz iste oznake kao i prije dobivamo

$$0 = u_t + cu_x + u^2 = 2cv_\xi + v^2,$$

odnosno

$$v_\xi = -\frac{1}{2c}v^2.$$

Ponovno je riječ o ODJ prvog reda u ξ varijabli, za čije rješavanje koristimo metodu separacije varijabli:

$$\frac{dv}{d\xi} = -\frac{1}{2c}v^2$$
$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{2c}d\xi,$$

odakle integriranjem slijedi
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{2c}\xi + C,$$
odnosno
$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{\frac{1}{2c}\xi + C(\eta)}.$$

Rješenje ćemo imati na nekoj okolini točke $(\overline{\xi},\eta)$ ukoliko je bilo
$$0 \neq v(\overline{\xi},\eta) = v(\eta,\eta) = u(x-ct,0) = g(x-ct) = g(\eta).$$
U tom slučaju odredimo $C(\eta)$:
$$g(\eta) = v(\eta,\eta) = \frac{1}{\frac{1}{2c}\eta + C(\eta)},$$
iz čega slijedi
$$C(\eta) = \frac{1}{g(\eta)} - \frac{1}{2c}\eta,$$
odnosno
$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{\frac{1}{2c}(\xi-\eta) + \frac{1}{g(\eta)}}.$$
Povratkom u originalne koordinate konačno dobivamo
$$u(x,t) = \frac{1}{t + \frac{1}{g(x-ct)}} = \frac{g(x-ct)}{1+tg(x-ct)}.$$
Primijetimo kako u ovom obliku rješenje ima smisla i u onim točkama gdje je $g=0$. Direktnom provjerom se može provjeriti da je ovako definirana funkcija zaista rješenje početnog problema. Preostaje nam još osigurati da je ono dobro definirano za male t-ove. Za to je dovoljno pokazati da postoji $\delta > 0$ takav da nazivnik nije nula za $|t| < \delta$. Kako je $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ona je posebno i ograničena pa postoji $M > 0$ takav da je $|g(x)| \leq M$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Sada imamo
$$|1+tg(x-ct)| \geq 1 - |t||g(x-ct)| \geq 1 - M\cdot|t|,$$
pa stavljanjem $\delta := \frac{1-\varepsilon}{M}$ za $|t| < \delta$ imamo
$$|1+tg(x-ct)| \geq \varepsilon > 0.$$
Pokažimo sada da se ovako dobiveno rješenje ne može proširiti do glatkog na cijelom $\mathbb{R}^2$. S obzirom da je $g \neq 0$, postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $g(x_0) \neq 0$. Tada za $t = -\frac{1}{g(x_0)}$ i x takav da je $x - ct = x_0$ imamo
$$1 + tg(x-ct) = 0,$$
pa vidimo da se rješenje ne može proširiti do trenutka $t = -\frac{1}{g(x_0)}$. ■

Poglavlje 3

Kvazilinearne jednadžbe 1. reda

3.1 Metoda karakteristika

U prethodnom smo dijelu vidjeli kako zadani PDJ možemo svesti na jednostavniji problem koristeći se geometrijskim argumentima, odnosno poznavanjem ponašanja rješenja duž neke krivulje. Sada ćemo na sličan način pristupiti i široj klasi problema. Radi jednostavnije geometrijske interpretacije, fokusirat ćemo se na problem u kojem je tražena funkcija u funkcija dvije varijable, no sam pristup i princip dokaza je analogan u više dimenzija.

Promatramo **kvazilinernu jednadžbu 1. reda** oblika

$$a(x,y,u)\cdot\nabla u(x,y) = b(x,y,u) \tag{3.1}$$

pri čemu su $a = a(x,y,z) = \begin{bmatrix} a_1(x,y,z) \\ a_2(x,y,z) \end{bmatrix}$ i $b = b(x,y,z)$ zadane C^1 funkcije, te $u = u(x,y)$ nepoznata funkcija. Domene zasad ne preciziramo, no one će naravno biti neki otvoreni skupovi.

Pretpostavimo da je funkcija u C^1 rješenje (3.1), te označimo s $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ graf funkcije u. Kao ploha je taj graf implicitno zadan s $F(x,y,z) = 0$, gdje je $F(x,y,z) = u(x,y) - z$. Normala na graf u točki (x,y,z) je tada dana s $\nabla F(x,y,z) = \begin{bmatrix} \nabla u(x,y) \\ -1 \end{bmatrix}$. Primijetimo sada kako jednadžbu možemo zapisati na sljedeći ekvivalentan način:

$$\begin{bmatrix} a(x,y,u) \\ b(x,y,u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla u \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$$

Iz prethodnoga zaključujemo kako je vektorsko polje $\begin{bmatrix} a(x,y,z) \\ b(x,y,z) \end{bmatrix}$ okomito na normalu u svakoj točki grafa. Dakle, to je polje tangencijalno na tu plohu u svakoj njenoj točki. Geometrijski gledano, možemo očekivati sljedeće: ako se nalazimo u točki koja je na grafu rješenja, te se iz te točke nastavimo kretati (koliko je to moguće) u smjeru koje nam određuje vektorsko polje $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ dobit ćemo krivulju koja u cijelosti leži na grafu. Dakle, ako znamo vrijednost rješenja u nekom dovoljno dobrom dijelu grafa, na ovaj način bismo trebali opisati graf funkcije.

Pretpostavimo sada da imamo zadane neke "početne" uvjete na funkciju u, tj da tražimo rješenje (3.1) koje zadovoljava $u\big|_S = u_0$, gdje je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ zadana parametrizirana krivulja, te neka je $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$ njena parametrizacija. Ako je u rješenje (3.1), onda se krivulja $s \mapsto (\gamma(s), u(\gamma(s)))$ nalazi na grafu rješenja, te želimo na maloprije opisani način pokušati izgraditi ostatak grafa barem na nekoj okolini te krivulje.

Definicija 3.1.1. *Za parametriziranu krivulju $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ kažemo da je **integralna krivulja** vektorskog polja X na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ako vrijedi*

- *$\alpha(t) \in \Omega$ za sve $t \in J$,*
- *$X(\alpha(t)) = \alpha'(t)$.*

U našem ćemo slučaju tražiti integralne krivulje vektorskog polja $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ koje se u početnom trenutku nalaze u točki podgrafa $\{(\gamma(s), u_0(\gamma(s)) : s \in J\}$. Određivanje tih krivulja se očito svodi na rješavanje sljedećeg sustava ODJ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} = a_2(x,y,z) \\ \frac{dz}{dt} = b(x,y,z), \end{cases}$$

s početnim uvjetima

$$\begin{cases} x(0;s) = \gamma_1(s) \\ y(0;s) = \gamma_2(s) \\ z(0;s) = u_0(\gamma(s)) \end{cases}$$

Teorija ODJ nam daje jedinstveno rješenje gornjeg sustava

$$x = x(t,s)$$
$$y = y(t,s)$$
$$z = z(t,s)$$

na nekom intervalu I koji sadrži 0. Za početak, uvjerimo se da navedene integralne krivulje zaista leže u cijelosti na grafu.

Lema 3.1.2. *Neka je točka $P = (x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ točka grafa rješenja u jednadžbe* (3.1) Γ, *te neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ integralna krivulja vektorskog polja $\begin{bmatrix} a(x,y,z) \\ b(x,y,z) \end{bmatrix}$ takva da je $\alpha(0) = P$. Tada vrijedi $\alpha(I) \subseteq \Gamma$.*

Dokaz. Podsjećamo kako je graf funkcije u ploha implicitno zadana s $F(x,y,z) = u(x,y) - z = 0$, pa je dovoljno pokazati da je $F(\alpha(t)) = 0$ za sve $t \in I$. Kako je u rješenje (3.1), imamo

$$\frac{d}{dt}F(\alpha(t)) = \nabla F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \begin{bmatrix} \nabla u(\alpha(t)) \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a(\alpha(t)) \\ b(\alpha(t)) \end{bmatrix} = 0.$$

Dakle, $F(\alpha(t))$ je konstantno, što uz početni uvjet $F(\alpha(0)) = F(P) = 0$ daje tvrdnju. □

Ove se integralne krivulje zovu se još i **karakteristike** jednadžbe (3.1), dok se gornji sustav naziva još i **karakteristični sustav** jednadžbe (3.1).

Dakle, kroz svaku točku podgrafa koji je određen početnim uvjetima možemo provući integralnu krivulju koja će opisati rješenje jednadžbe. Problem može nastati ako za neke točke se ta krivulja podudara sa samim podgrafom (drugim riječima, ne mičemo se iz početnih uvjeta). Do toga će doći ako je polje $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ tangencijalno na krivulju S. Zbog toga uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 3.1.3. *Neka su a, u_0 i S kao ranije, te neka je $n(s)$ normala na krivulju S u točki $\gamma(s)$. Kažemo da je točka $\gamma(s) \in S$ **karakteristična točka** vektorskog polja a ako vrijedi*

$$a(\gamma(s), u_0(s)) \cdot n(s) = 0.$$

Pretpostavimo sada da S ne sadrži nijednu karakterističnu točku vektorskog polja a. U posljednjem koraku radimo sljedeće: za točku $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ koja će biti "dovoljno blizu" S (dakle, barem za t blizu 0) želimo invertirati funkciju $(t,s) \mapsto (x,y)$ (drugim riječima, želimo odrediti gdje i na kojoj karakteristici projekciranoj na xy-ravninu se nalazi promatrana točka), te konačno očekujemo da će $z(t,s)$ biti tražena vrijednost rješenja (naprosto "očitamo" što bi trebala biti vrijednost na grafu). Označimo s $R(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$ rješenje karakterističnog sustava jednadžbi (koje je C^1 funkcija) te stavimo $H(t,s) = (x(t,s), y(t,s))$. Računamo za $s \in J$

$$\begin{aligned} J_H(0,s) &= \begin{vmatrix} \partial_t x(0,s) & \partial_t y(0,s) \\ \partial_s x(0,s) & \partial_s y(0,s) \end{vmatrix} \\ &= \partial_t x(0,s) \cdot \partial_s y(0,s) - \partial_s x(0,s) \cdot \partial_t y(0,s) \\ &= a_1(\gamma(s)) \cdot g_2'(s) - a_2(\gamma(s)) \cdot g_1'(s) \\ &= a(\gamma(s)) \cdot n(s) \neq 0. \end{aligned}$$

Prema teoremu o inverznom preslikavanju, postoje okolina U točke $(0,s)$ i okolina V točke $H(0,s)=\gamma(s)$ takve da je $H:U\to V$ difeomorfizam. Sada za $(x,y)\in V$ definiramo

$$u(x,y):=z(H^{-1}(x,y)).$$

Funkcija u je svakako C^1, te zadovoljava uvjet $u\big|_S=u_0$. Zaista, neka je $(x,y)=\gamma(s)\in S$. Slijedi

$$u(x,y)=z(H^{-1}(x,y))=z(0,s)=u_0(\gamma(s))=u_0(x,y).$$

Konačno, pokažimo da u zadovoljava (3.1):

$$\begin{aligned}
a(x,y,u(x,y))\cdot\nabla u(x,y)&=\frac{\partial x}{\partial t}\Big(\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\Big)+\frac{\partial y}{\partial t}\Big(\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\Big)\\
&=\frac{\partial z}{\partial t}\Big(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}\Big)+\frac{\partial z}{\partial s}\Big(\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\Big)\\
&=\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t}\\
&=\frac{\partial z}{\partial t}\cdot 1+0\\
&=b(x,y,u(x,y)),
\end{aligned}$$

gdje smo u predzadnjem retku koristili nezavisnost funkcija s i t.
Ovime smo dobili rješenje lokalno oko točke $\gamma(s,0)$, dok rješenje na okolini Ω od S dobivamo uzimanjem unije lokalnih. Pritom se može dogoditi da neka od karakteristika siječe krivulju S u više od jedne točke; u tom slučaju smanjujemo Ω tako da svaka od karakteristika "ne izlazi iz Ω.

Istaknimo za kraj ključne korake ove konstrukcije rješenja jednadžbe (3.1) uz zadani uvjet $u\big|_S=u_0$. Potrebno je prvo odrediti postoje li karakteristične točke na krivulji S. Ukoliko takvih nema, znamo da postoji rješenje na nekoj okolini; u suprotnom možemo imati rješenja na okolinama onih dijelova krivulje S u kojima nema karakterističnih točaka, no tada nemamo garanciju C^1 rješenja. U tom slučaju ćemo tražiti najveću moguću domenu na kojoj imamo rješenje. Zatim odredimo karakteristike, uz uvjet da u početnom trenutku $t=0$ te karakteristike moraju prolaziti kroz neku unaprijed fiksiranu točku (ta će točka biti opisana parametrom s) na S. Zatim odredimo sve one točke koje su sadržane u nekoj od takvih karakteristika (što se svodi na problem invertiranja $(x,y)\mapsto(t,s)$). Naposljetku, naše je rješenje dano uvrštavanjem dobivenih izraza za t i s preko x i y u posljednju koordinatu karakteristika.

Zadatak 3.1.4. *Riješite zadatke 1.1.1 i 1.1.3 metodom karakteristika.*

Zadatak 3.1.5. *Riješite Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} u_x+u_y=u,\\ u(x,y)=\cos x,\ \textit{na}\ y=0.\end{cases}$$

Rješenje. Uz oznake kao ranije prepoznajemo

$$a(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b(x,y,z) = z.$$

Također stavimo

$$S = \{(s,0) : s \in \mathbb{R}\}, \text{ te } n(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pogledajmo imamo li karakterističnih točaka:

$$a(s,0,\cos s) \cdot n(s,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1,$$

pa zaključujemo da karakterističnih točaka nema. Postavljamo pripadni sustav ODJ kojim dobivamo tražene karakteristike:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(x,y,z) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = a_2(x,y,z) = 1, \\ \frac{dz}{dt} = b(x,y,z) = z, \end{cases}$$

uz početne uvjete (ovisne o parametru s)

$$\begin{cases} x(0;s) = s, \\ y(0;s) = 0, \\ z(0;s) = \cos s. \end{cases}$$

Rješavamo sustav:

$$\frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow x(t) = t + C_1,$$

što uz početni uvjet daje

$$x(t,s) = t + s.$$

Na isti način dobivamo i

$$y(t,s) = t.$$

Konačno,

$$\frac{dz}{dt} = z \Rightarrow z(t) = C_3 e^t,$$

što uz početni uvjet daje

$$z(t,s) = \cos s \cdot e^t.$$

Preostaje nam sada vidjeti za koje točke u $\mathbb{R}^2$ postoje projicirane karakteristike koje prolaze kroz njih. Uzmimo proizvoljnu točku $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tražimo t,s takve da je $x = x(t,s), y = y(t,s)$, odnosno tražimo rješenje

$$\begin{cases} x = t + s, \\ y = t. \end{cases}$$

Ovdje lako vidimo da je rješenje $t = y$, $s = x - t = x - y$. Dakle, za svaku točku u $\mathbb{R}^2$ postoji (jedna) projicirana karakteristika koja kroz nju prolazi. Samim time, i naše rješenje će postojati na cijelom $\mathbb{R}^2$. Izvedimo još formulu za rješenje uvrštavanjem dobivenih izraza u izraz za $z(t;s)$:

$$u(x,y) = z(t,s) = \cos s \cdot e^t = \cos(x-y)e^y.$$

$\blacksquare$

Napomena: Pretpostavimo sada da u prethodnom zadatku umjesto uvjeta na pravcu $y = 0$ imamo zadane uvjete na pravcu $y = x$. U tom je slučaju normala dana s $n(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, pa vidimo da je za svaki $s \in \mathbb{R}$

$$a(s,s,\cos s) \cdot n(s) = 1 - 1 = 0,$$

što znači da je svaka točka pravca karakteristična, te nemamo garanciju egzistencije rješenja nigdje osim na samom pravcu $y = x$ dosadašnjom tehnikom. Naime, projicirane karakteristike su pravci paralelni s pravcem $y = x$, te je jasno da niti jedan takav ne siječe pravac $y = x$ (naravno, osim njega samoga). Pogledajmo u kojem slučaju se možemo nadati egzistenciji rješenja u slučaju da imamo karakterističnu točku. Pritom, da bi pojednostavili izraze, označit ćemo s $u_0(s)$ početnu zadanu funkciju (dakle, u_0 je sada ono što je prije zapravo bilo $u_0 \circ \gamma$). Pretpostavimo da je u rješenje klase C^1 zadaće

$$\begin{cases} a(x,y,u(x,y)) \cdot \nabla u(x,y) = b(x,y,u(x,y)), \\ u(\gamma(s)) = u_0(s). \end{cases} \tag{3.2}$$

Neka je s, odnosno $\gamma(s)$, karakteristična točka polja a, tj. pretpostavimo da je

$$a(\gamma(s), u_0(s)) = \lambda \gamma'(s), \tag{3.3}$$

za neki $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Deriviranjem po s početnog uvjeta u (3.2) dobivamo

$$\nabla u(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) = u_0'(s). \tag{3.4}$$

Tada je posebno zbog (3.4)

$$a(\gamma(s), u_0(s)) \cdot \nabla u(\gamma(s)) = \lambda u_0'(s). \tag{3.5}$$

Usporedbom sa samom jednadžbom u (3.2) dolazimo do nužnog (ne i dovoljnog) uvjeta za postojanje rješenja, a to je

$$b(\gamma(s), u_0(s)) = \lambda u_0'(s), \tag{3.6}$$

ili, ekvivalentno, matrica

$$M(s) = \begin{bmatrix} a_1(\gamma(s)) & a_2(\gamma(s)) & b(\gamma(s), u_0(s)) \\ \gamma_1'(s) & \gamma_2'(s) & u_0'(s) \end{bmatrix}$$

more biti ranga 1.

Napomena: Pogledajmo ponovno posljednji primjer

$$\begin{cases} u_x + u_y = u, \\ u(x,x) = \cos x. \end{cases}$$

Tada je odgovarajuća matrica $M(s)$ dana s

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cos s \\ 1 & 1 & -\sin s \end{bmatrix},$$

Da bi ova matrica bila ranga 1, mora vrijediti

$$\cos s = -\sin s,$$

odnosno $s = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dakle, C^1 rješenje niti ne može postojati u okolini gotovo svake točke početne krivulje.

S druge strane, pogledajmo slučaj u kojem su početni uvjeti kompatibilni, tj. vrijedi da je matrica $M(s)$ ranga 1 za sve $s \in \mathbb{R}$. Stoga, promotrimo sad zadaću

$$\begin{cases} u_x + u_y = u, \\ u(x,x) = e^x. \end{cases} \tag{3.7}$$

Tada je

$$M(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & e^s \\ 1 & 1 & e^s \end{bmatrix},$$

pa vidimo da je nužan uvjet za postojanje rješenja zadovoljen. Pristup kojim ćemo pokušati dobiti (jedno) rješenje je sljedeći: umjesto zadane početne krivulje γ, odaberemo neku nigdje karakterističnu krivulju $\tilde{\gamma}$ koja siječe γ u jednoj točki, recimo P. Uz to, zadamo uvjet

$u|_{\tilde{\gamma}}(s) = \tilde{u_0}(s)$, takav da je $u_0(P) = \tilde{u_0}(P)$. Tada postoji neka okolina krivulje $\tilde{\gamma}$ na kojoj postoji jedinstveno rješenje zadaće

$$\begin{cases} u_x + u_y = u, \\ u(\gamma(s)) = \tilde{u_0}(s). \end{cases} \tag{3.8}$$

S obzirom da se točka P nalazi na grafu takvog rješenja, te s obzirom da je krivulja γ integralna krivulja polja $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, zaključujemo da postoji i okolina točke P takva da je i dio krivulje γ oko P također sadržan u grafu. Drugim riječima, dobili smo rješenje zadaće (3.7) na nekoj okolini točke P. Primijetimo da ovakvih rješenja možemo konstruirati beskonačno; naravno, ovisno o odabiru pomoćne zadaće (3.8). Konkretno, za naš primjer (3.7), uzmimo $\tilde{\gamma}(s) = (s, 0)$ te $\tilde{u_0}(s) = e^s$. Tada kao u zadatku 3.1.5. dobijemo da je rješenje tog problema dano s

$$u(x, y) = e^y.$$

Prethodna razmatranja pokazuju da će ovo biti i rješenje u nekoj okolini točke $P = (0, 0)$. No ovdje zapravo dobijemo i više; ovo je ujedno i globalno rješenje na cijelom $\mathbb{R}^2$ zadaće (3.7).

Zadatak 3.1.6. *Riješite Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} x^2 u_x + y^2 u_y = u^2, \\ u = 1, \ na \ y = 2x. \end{cases}$$

Rješenje. Prepoznajemo:

$$a(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}, \quad b(x, y, z) = z^2.$$

Također stavimo

$$S = \{(s, 2s) : s \in \mathbb{R}\}, \text{ te } n(s) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pogledajmo imamo li karakterističnih točaka:

$$a(s, 2s, 1) \cdot n(s, 2s) = \begin{bmatrix} s^2 \\ 4s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -2s^2,$$

pa zaključujemo da je jedina karakteristična točka $(0, 0)$. Postavljamo pripadni sustav ODJ kojim dobivamo tražene karakteristike:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(x, y, z) = x^2, \\ \frac{dy}{dt} = a_2(x, y, z) = y^2, \\ \frac{dz}{dt} = b(x, y, z) = z^2, \end{cases}$$

uz početne uvjete (za $s \neq 0$):

$$\begin{cases} x(0,s) = s, \\ y(0;s) = 2s, \\ z(0;s) = 1. \end{cases}$$

Rješavamo sustav:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{C_1 - t},$$

što uz početni uvjet daje

$$x(t,s) = \frac{s}{1 - ts}.$$

Na isti način vidimo i

$$y(t,s) = \frac{2s}{1 - 2ts},$$

kao i

$$z(t,s) = \frac{1}{1 - t}.$$

Odredimo sada za koje točke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ postoje projicirane karakteristike koje prolaze kroz njih. Tražimo rješenje

$$\begin{cases} x = \frac{s}{1-ts}, \\ y = \frac{2s}{1-2ts}. \end{cases}$$

U slučaju $x = 0$ vidimo da mora biti $s = 0$, pa onda i $y = 0$, što nas vraća na karakterističnu točku $(0,0)$ te nam daje trivijalnu karakteristiku (točku). Stoga jedina točka na y-osi koja leži na nekoj od karakteristika je je ishodište, i to na onoj trivijalnoj. Analogan zaključak dobivamo promatranjem $y = 0$. Za $x \neq 0$ iz prve jednadžbe dobivamo

$$t = \frac{x - s}{xs},$$

što uvrštavanjem u drugu jednadžbu i sređivanjem daje i

$$s = \frac{xy}{2(y - x)},$$

za $x \neq y$. U slučaju $x = y$, ponovno se vratim u gornje izraze za iste, te dobijemo da mora biti $s = t = 0$, što nas vraća na već spomenuti slučaj ishodišta. Uvrstimo dobiveno natrag u izraz za t te dobivamo

$$t = \frac{y - 2x}{xy}.$$

Konačno, vraćamo se u izraz za $z(t;s)$:

$$u(x,y) = z(t,s) = \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1 - \frac{y-2x}{xy}} = \frac{xy}{xy + 2x - y}.$$

Direktnom provjerom se lako možemo uvjeriti da dobivena funkcija zaista jest rješenje zadaće, ali ne na cijelom $\mathbb{R}^2$, već na onom dijelu na kojem ju možemo definirati. Zapisano u ovom obliku, ono ima smisla i za točke na x-osi i na y-osi, osim ishodišta, koje su prije predstavljale problem. Osim ishodišta, funkcija nije definirana za točke za koje je $xy+2x-y=0$.

Napomena: Primijetimo kako je dobiveno rješenje jednako 0 na koordinatnim osima, dok bi u ishodištu ono trebalo biti 1 prema uvjetu zadaće. Međutim, ovo nije u kontradikciji s našim rezultatima otprije; metoda garantira rješenje u okolini točaka koje nisu karakteristične, a kako je ishodište jedina točka presjeka krivulja $xy+2x-y$ i $y=2x$, vidimo da je za sve preostale točke uvjet ispunjen i rješenje pronađeno. Također, zbog gore navedenog razloga, ovo se rješenje očito ne može proširiti do neprekidnog (a onda naravno ni do C^1) na većem skupu. ■

Zadatak 3.1.7. *Riješite Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} u_y = xuu_x, \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

Rješenje. Stavljamo:

$$a(x,y,z) = \begin{bmatrix} xz \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b(x,y,z) = 0.$$

Također dodajemo

$$S = \{(s,0) : s \in \mathbb{R}\}, \text{ te } n(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pogledajmo imamo li karakterističnih točaka:

$$a(s,0,s) \cdot n(s,0) = \begin{bmatrix} s^2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1,$$

pa zaključujemo da karakterističnih točaka nema. Postavljamo pripadni sustav ODJ kojim dobivamo tražene karakteristike:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xz, \\ \frac{dy}{dt} = -1, \\ \frac{dz}{dt} = 0, \end{cases}$$

uz početne uvjete (ovisne o parametru s)

$$\begin{cases} x(0;s) = s, \\ y(0;s) = 0, \\ z(0;s) = s. \end{cases}$$

Rješavamo sustav. Prvo primijetimo da je

$$z(t,s) = s.$$

Sljedeće imamo

$$\frac{dx}{dt} = xz = sx \Rightarrow x(t,s) = se^{st}.$$

Konačno,

$$y(t,s) = -t.$$

Neka je $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljna točka. Tražimo s,t takve da vrijedi

$$\begin{cases} x = se^{st}, \\ y = -t. \end{cases}$$

Uvrštavanjem $y = -t$ u prvu jednadžbu vidimo da treba vrijediti

$$x = se^{-sy}.$$

Traženi s ne postoji za sve parove $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; za $y > 0$ takav s postoji ukoliko je $x \leq \frac{1}{ey}$, za $y < 0$ ukoliko je $x \geq -\frac{1}{ey}$, dok za $y = 0$ postoji uvijek. U tim slučajevima rješenje zapisujemo u implicitnom obliku

$$x = se^{st} = z(t,s)e^{z(t,s)t} = u(x,y)e^{-u(x,y)y}.$$

■

Zadatak 3.1.8. *Riješite Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} xu_y - yu_x = u, \\ u(\cdot,0) = u_0, \end{cases}$$

gdje je $u_0 \in C(\mathbb{R})$ zadana.

Rješenje. Prepoznajemo:

$$a(x,y,z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \quad b(x,y,z) = z.$$

Također imamo

$$S = \{(s,0) : s \in \mathbb{R}\}, \text{ te } n(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pogledajmo imamo li karakterističnih točaka:

$$a(s,0,u_0(s)) \cdot n(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s,$$

pa zaključujemo da je jedina karakteristična točka $(0,0)$. Postavljamo pripadni sustav ODJ kojim dobivamo tražene karakteristike:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x, \\ \frac{dz}{dt} = z, \end{cases}$$

uz početne uvjete (za $s \neq 0$):

$$\begin{cases} x(0;s) = s, \\ y(0;s) = 0, \\ z(0;s) = u_0(s). \end{cases}$$

Deriviranjem prve jednadžbe po t te korištenjem druge dolazimo do

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} = -x,$$

odakle dobivamo

$$x(t) = A\sin t + B\cos t,$$

te deriviranjem

$$y(t) = -A\cos t + B\sin t.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta imamo

$$x(t,s) = s\cos t,$$

$$y(t,s) = s\sin t.$$

Na kraju, lako vidimo da je

$$z(t,s) = u_0(s)e^t.$$

Neka je sada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljna točka. Primijetimo prvo kako su karakteristike zapravo dijelovi kružnice (ili cijela) oko $(0,0)$ radijusa $|s|$. Za svaku točku $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ postoji jedinstvena takva kružnica koja prolazi kroz nju, međutim, postoje dvije vrijednosti parametara koja možemo odabrati; uzimanjem s ili $-s$, gdje vrijedi $|s| = \sqrt{x^2+y^2}$. Da bi osigurali jednoznačnost odabira, podijelit ćemo naše karakteristike na dva dijela, te ćemo gledati samo polukružnice

$$t \mapsto (s\cos t, s\sin t), \quad t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Za $s > 0$ ove se polukružnice nalaze u poluravnini $x > 0$, dok se za $s < 0$ one nalaze u poluravnini $x < 0$. Kao i maloprije, vidimo da je $s = \operatorname{sgn} x\sqrt{x^2+y^2}$, dok je $t = \arctan\frac{y}{x}$. Konačno, uvrstimo te vrijednosti u izraz za $z(t,s)$ te dobivamo

$$u(x,y) = z(t,s) = u_0(s)e^t = u_0(\operatorname{sgn} x\sqrt{x^2+y^2})e^{\arctan\frac{y}{x}}.$$

■

Napomenimo za kraj kako izgleda metoda karakteristika u općenitijem, d-dimenzionalnom slučaju. Prilagodba dokaza iz dvodimenzionalnog slučaja je ostavljena za vježbu.
Promatramo kvazilinearnu jednadžbu

$$a(x,u(x)) \cdot \nabla u(x) = b(x,u(x)),$$

gdje su a,b C^1 funkcije na odgovarajućoj domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$. Pretpostavimo da su zadani početni uvjeti na nekoj parametriziranoj hiperplohi $S \subseteq \mathbb{R}^d$; preciznije, neka je U otvoren podskup od $\mathbb{R}^{d-1}$ te $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d) : U \to \mathbb{R}^d$ C^1 parametrizacija hiperplohe S. Pretpostavimo da su zadani početni uvjeti $u|_S = u_0$, gdje je u_0 unaprijed zadana funkcija. Uvjet karakterističnosti ćemo iskazati u nešto drugačijem obliku, međutim, cilj je isti; točka $\gamma(s) \in S$ će biti karakteristična za a ako se a nalazi u tangencijalnom prostoru na S točke $\gamma(s)$.

Definicija 3.1.9. *Neka su a, u_0 i S kao ranije. Kažemo da je točka $\gamma(s) = \gamma(s_1, \ldots, s_{d-1}) \in S$* ***karakteristična točka*** *vektorskog polja a ako vrijedi*

$$\det\big(a(\gamma(s), u_0(\gamma(s))), \partial_{s_1}\gamma(s), \partial_{s_2}\gamma(s), \ldots, \partial_{s_{d-1}}\gamma(s)\big) = 0.$$

Teorem 3.1.10. *Pretpostavimo da je S hiperploha klase C^1 u $\mathbb{R}^d$ te a, b, u_0 c^1 funkcije. Pretpostavimo također da S ne sadrži karakteristične točke vektorskog polja a. Tada postoji jedinstveno C^1 rješenje kvazilinearne jednadžbe na nekoj okolini od S takvo da je $u|_S = u_0$.*

Postupak za dobivanje okoline od S i rješenja kvazilinearne jednadžbe na toj okolini je sljedeći. Nakon što smo se uvjerili da karakterističnih točaka nema, postavljamo pripadni karakteristični sustav

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1(x_1, \ldots, x_d, z) \\ \quad\vdots \\ \frac{dx_d}{dt} = a_d(x_1, \ldots, x_d, z) \\ \frac{dz}{dt} = b(x_1, \ldots, x_d, z) \end{cases}$$

s početnim uvjetima

$$\begin{cases} x_1(0;s) = \gamma_1(s) \\ \quad\vdots \\ x_d(0;s) = \gamma_d(s) \\ z(0;s) = u_0(\gamma(s)) \end{cases}$$

Ovo je sustav $d+1$ jednadžbi s $d+1$ početnih uvjeta; teorija ODJ ponovno daje jedinstveno rješenje ovog sustava na nekom intervalu oko 0. Idući korak je invertirati preslikavanje

$$H : (t, s_1, \ldots, s_{d-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_d)$$

za one $(x_1, \dots, x_d)$ za koje je to moguće. Konačno rješenje jednadžbe je tada dano s

$$u(x) = z(H^{-1}(t, s_1, \dots, s_{d-1})).$$

Zadatak 3.1.11. *Neka je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ te $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^{d-1})$ zadana. Odredite rješenje Cauchyjeve zadaće*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{d} x_k \partial_k u = \alpha u, \\ u(x_1, \dots, x_{d-1}, 1) = u_0(x_1, \dots, x_{d-1}). \end{cases}$$

3.2 Lagrangeova metoda

Za kraj dijela o kvazilinearnim jednadžbama 1. reda reći ćemo nešto o metodi određivanja općeg rješenja jednadžbe

$$a(x, y, u(x, y)) \cdot \nabla u(x, y) = b(x, y, u(x, y)),$$

gdje su a i b kao ranije, uz pretpostavku da u domeni od a i b ne postoji točka (x, y, u) za koju vrijedi $a(x, y, u) = b(x, y, u) = 0$. S obzirom da nemamo nikakvih dodatnih zahtjeva na funkciju u, moramo pronaći neki način da opišemo cijeli skup rješenja gornje jednadžbe. Već smo vidjeli kako plohe izgrađene pomoću karakteristika opisuju rješenja kvazilinearne jednažbe, stoga se ponovno vraćamo na pripadni sustav.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(x, y, u), \\ \frac{dy}{dt} = a_2(x, y, u), \\ \frac{du}{dt} = b(x, y, u). \end{cases}$$

Prema teoremu o inverznoj funkciji, ukoliko je u nekoj točki $a_1(x, y, u) \neq 0$, na nekom otvorenom skupu oko te točke zapravo imamo da je $t = t(x)$, odnosno $y = y(x)$, te vrijedi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Sličan zaključak možemo donijeti i u preostale dvije kombinacije varijabli x, y, z, što nas navodi na sljedeći sustav:

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{du}{b}. \tag{3.9}$$

Pretpostavimo sada da smo pronašli dva rješenja gornjeg sustava $\phi(x, y, u) = c_1$ i $\psi(x, y, u) = c_2$. Dodatno, neka su ta dva rješenja **funkcionalno nezavisna** na nekom skupu Ω, tj. Jacobijeva matrica

$$\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y, u)} = \begin{bmatrix} \nabla\phi(x, y, u) \\ \nabla\psi(x, y, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial u} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \end{bmatrix}.$$

je ranga 2 na Ω. Tada je opće rješenje kvazilinearne jednadžbe implicitno dano relacijom

$$F(\phi(x,y,u),\psi(x,y,u)) = 0,$$

gdje je F proizvoljna C^1 funkcija. Da bi se uvjerili u to, pretpostavimo za početak da je $\partial_u F = \partial_1 F \cdot \phi_u + \partial_2 F \cdot \psi_u \neq 0$ (u suprotnom izraz $F(\phi,\psi)$ ne ovisi o u, pa nema smisla govoriti o rješenju u takvom obliku). Prema teoremu o implicitnoj funkciji slijedi da postoji funkcija f takva da je $u = f(x,y)$ te vrijedi $F(\phi(x,y,f(x,y)),\psi(x,y,f(x,y))) = 0$. Deriviranjem gornjeg izraza po x i y dobivamo redom

$$\partial_1 F(\phi_x + \phi_u f_x) + \partial_2 F(\psi_x + \psi_u f_x) = 0,$$

$$\partial_1 F(\phi_y + \phi_u f_y) + \partial_2 F(\psi_y + \psi_u f_y) = 0.$$

Kako je

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \neq 0,$$

matrica gornjeg sustava je singularna, tj. njena determinanta je nula. Konkretnije, imamo

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(y,u)}\right| f_x + \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,x)}\right| f_y = \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right|. \tag{3.10}$$

Uzmimo sada $t \to (x(t),y(t),u(t))$ proizvoljnu karakteristiku početnog karakterističnog sustava. Uvrštavanjem u izraze za ϕ,ψ, te deriviranjem po t dobivamo

$$a_1\phi_x + a_2\phi_y + b\phi_u = 0,$$

$$a_1\psi_x + a_2\psi_y + b\psi_u = 0.$$

Iz ovoga čitamo kako je vektorsko polje $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{bmatrix}$ okomito i na $\nabla\phi$ i na $\nabla\psi$. Kako su oni linearno nezavisni, slijedi da je to polje normalno na ravninu razapetu s $\{\nabla\phi,\nabla\psi\}$. Dakle, postoji $\lambda \neq 0$ takav da je

$$(a_1,a_2,b) = \lambda\Big(\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(y,u)}\right|, \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,x)}\right|, \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right|\Big).$$

Uvrštavanjem u (3.10) dobivamo upravo

$$a_1 f_x + a_2 f_y = b.$$

Opće rješenje se kao posljedica teorema o implicitno zadanoj funkciji može napisati i na još jedan od dva ekvivalentna načina:

- $\phi(x,y,u) = g_1(\psi(x,y,u))$,
- $\psi(x,y,u) = g_2(\phi(x,y,u))$,

gdje su g_1, g_2 proizvoljne C^1 funkcije. Ovaj oblik nam može biti od koristi ukoliko je potrebno pronaći jedno konkretno rješenje u skupu općeg.

Napomena: Uvjet na rang Jacobijeve matrice ekvivalentan je uvjetu da je barem jedna od minora

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right|, \quad \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(y,u)}\right|, \quad \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,x)}\right|$$

različita od 0.

Zadatak 3.2.1. *Odredite opće rješenje jednadžbe*

$$xuu_x + yuu_y = -(x^2+y^2).$$

Rješenje. Za početak, zbog toga što se na tom skupu poništavaju i a i b, rješenje tražimo na skupu gdje je $x \neq 0$ ili $y \neq 0$. Postavljamo pripadni sustav

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{-(x^2+y^2)}.$$

Iz prve jednadžbe dobivamo:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

odakle integriranjem slijedi

$$\ln|x| = \ln|y| + C_1,$$

odnosno

$$x = C_1 y.$$

Dakle, prvo rješenje je dano s

$$\phi(x,y,u) := \frac{x}{y}(= C_1).$$

Promatramo sada jednakost prvog i trećeg izraza u sustavu. Imamo

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{xu} &= \frac{du}{-(x^2+y^2)} \\
\Rightarrow \frac{dx}{xu} &= \frac{du}{-(1+\frac{1}{C_1^2})x^2} \\
\Rightarrow -(1+\frac{1}{C_1^2})xdx &= udu,
\end{aligned}$$

odakle integriranjem slijedi

$$-(1+\frac{1}{C_1^2})x^2 = u^2 + C_2.$$

Konačno, vraćanjem izraza za C_1 dobivenog ranije dobivamo drugo rješenje

$$\psi(x,y,u) := u^2 + x^2 + y^2 (= C_2).$$

Provjerimo uvjet funkcionalne nezavisnosti rješenja ϕ i ψ. Računamo minore:

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2\Big(1+\frac{x^2}{y^2}\Big),$$

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(y,u)}\right| = \begin{vmatrix} -\frac{x}{y^2} & 0 \\ 2y & 2u \end{vmatrix} = -2\frac{xu}{y^2},$$

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,u)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 2x & 2u \end{vmatrix} = 2\frac{u}{y}.$$

Dakle, opće rješenje je dano relacijom

$$F\Big(\frac{x}{y}, x^2 + y^2 + u^2\Big) = 0,$$

ili ekvivalentnom relacijom

$$u^2 = g\Big(\frac{x}{y}\Big) - x^2 - y^2,$$

na skupu na kojem je barem jedna od determinanti različita od 0. S obzirom da su svi izrazi dobro definirani za $y \neq 0$, te da je već $\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right| \neq 0$, vidimo da je rješenje dano gornjom relacijom na skupu $y \neq 0$, odnosno na $\mathbb{R}^3$ bez xu-ravnine. ∎

Sustav (3.9) ponekad može biti kompliciran za riješiti direktno kao u prethodnom zadatku. Koristeći sljedeća dvije tehnike možemo si često pojednostavniti rješavanje:

1) Ukoliko imamo jednakost omjera $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, tada za sve $\lambda, \mu \neq 0$ vrijedi $\frac{A}{B} = \frac{\lambda A + \mu C}{\lambda B + \lambda D}$.

2) Iteriranjem izraza u 1) možemo zaključiti i sljedeće: ako imamo jednakost tri omjera, "linearna kombinacija brojnika"/"linearna kombinacija nazivnika" daje isti omjer. Posebno, u slučaju našeg sustava možemo gledati jednakost omjera

$$\frac{\lambda dx + \mu dy + \nu du}{\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu b} = \frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{du}{b}.$$

Ukoliko možemo naći λ, μ, ν takve da vrijedi $\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu b = 0$, tada mora biti i

$$\lambda dx + \mu dy + \nu du = 0.$$

pa je jedno rješenje (3.9) dano s $\phi(x,y,u) = C$, gdje vrijedi $\nabla\phi = (\lambda, \mu, \nu)$.

Zadatak 3.2.2. *Odredite opće rješenje jednadžbe*

$$(y-x)u_x+(y+x)u_y=\frac{x^2+y^2}{u}.$$

Rješenje. Rješenje tražimo izvan ishodišta. Postavljamo pripadni sustav:

$$\frac{dx}{y-x}=\frac{dy}{y+x}=\frac{du}{\frac{x^2+y^2}{u}}.$$

Promatramo prvo prvu jednadžbu u sustavu, te koristimo prvu tehniku navedenu prije zadatka:

$$\frac{dx}{y-x}=\frac{dy}{y+x}=\frac{dx+dy}{(y-x)+(y+x)},$$

odakle dobivamo, promatranjem posljednje jednakosti

$$\frac{dy}{y+x}=\frac{d(x+y)}{2y}.$$

Posljednja jednakost je ekvivalentna s

$$(x+y)d(x+y)=2ydy,$$

odakle integriranjem slijedi

$$(x+y)^2=2y^2+C_1.$$

Dakle, prvo rješenje sustava je dano s

$$\phi(x,y,u):=x^2+2xy-y^2(=C_1).$$

Za drugo ćemo rješenje pokušati s drugom navedenom tehnikom. Prvo pronađimo λ,μ,ν takve da vrijedi $\lambda(y-x)+\mu(y+x)+\nu\left(\frac{x^2+y^2}{u}\right)=0$. Jedan od izbora je sljedeći

$$\lambda=x,\qquad \mu=-y,\qquad \nu=u.$$

Sada preostaje pronaći funkciju ψ takvu da je $\nabla\psi=(\lambda,\mu,\nu)$. Iz prve jednadžbe imamo

$$\partial_x\psi(x,y,u)=x,$$

iz čega slijedi

$$\psi(x,y,u)=\frac{1}{2}x^2+F(y,u).$$

Parcijalnom derivacijom po y i korištenjem drugog uvjeta imamo

$$-y=\partial_y\psi(x,y,u)=\partial_yF(y,u),$$

odakle zaključujemo da je

$$F(y,u) = -\frac{1}{2}y^2 + G(u),$$

odnosno

$$\psi(x,y,u) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + G(u).$$

Konačno, parcijalno deriviramo po u te koristimo posljednji uvjet da bi dobili

$$u = \partial_u \psi(x,y,u) = G'(u),$$

iz čega slijedi

$$G(u) = \frac{1}{2}u^2 + C,$$

pa je drugo rješenje sustava dano s

$$\psi(x,y,u) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + u^2)(= C_2).$$

Provjerimo funkcionalnu nezavisnost ova dva rješenja. Računamo ponovno minore pripadne Jacobijeve matrice

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 2x+2y & 2x-2y \\ x & -y \end{vmatrix} = -2(x^2+y^2).$$

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(y,u)}\right| = \begin{vmatrix} 2x-2y & 0 \\ -y & u \end{vmatrix} = 2(x-y)u.$$

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,u)}\right| = \begin{vmatrix} 2x+2y & 0 \\ x & u \end{vmatrix} = 2(x+y)u.$$

Dakle, imamo opće rješenje dano relacijom

$$F(x^2 + 2xy - y^2, x^2 - y^2 + u^2) = 0,$$

kad god je barem jedna od minora različita od 0, što imamo izvan ishodišta. Ekvivalentno, rješenje možemo zapisati i relacijom

$$u^2 = y^2 - x^2 + g(x^2 + 2xy - y^2),$$

za neku $g \in C^1$. ■

Zadatak 3.2.3. *Odredite opće rješenje jednadžbe*

$$uu_x + yu_y = x.$$

Rješenje. Rješenje tražimo izvan ishodišta. Zapisujemo pripadni sustav ODJ:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{x}.$$

Ponovno ćemo potražiti λ, μ, ν kao ranije. Jedna opcija su vrijednosti

$$\lambda = x, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = -u.$$

Tražimo funkciju ϕ takvu da je $\nabla\phi = (\lambda, \mu, \nu)$. Iz prvog uvjeta imamo

$$\partial_x \phi(x,y,u) = x,$$

iz čega slijedi

$$\phi(x,y,u) = \frac{1}{2}x^2 + F(y,u).$$

Sada deriviramo po y te koristimo drugi uvjet pa imamo

$$0 = \partial_y \phi(x,y,u) = \partial_y F(y,u),$$

iz čega vidimo da je

$$F(y,u) = G(u),$$

odnosno

$$\psi(x,y,u) = \frac{1}{2}x^2 + G(u).$$

Konačno, deriviramo po u i koristimo posljednji uvjet da dobijemo

$$-u = \partial_u \phi(x,y,u) = G'(u),$$

odakle slijedi

$$G(u) = -\frac{1}{2}u^2 + C.$$

Dakle, jedno rješenje sustava je dano s

$$\phi(x,y,u) = \frac{1}{2}(x^2 - u^2)(= C_1).$$

Naravno, nije za očekivati da za bilo koji odabir λ, μ, ν koji zadovovljavaju željeni uvjet možemo pronaći funkciju čije komponente gradijenta odgovaraju istima. Primjerice, uzmimo

$$\lambda = y, \qquad \mu = -u, \qquad \nu = 0.$$

Iz prvog uvjeta dobivamo

$$\phi(x,y,u) = xy + F(y,u),$$

no deriviranjem ovog izraza po y i korištenjem drugog uvjeta dobivamo

$$-u = x + \partial_y F(y,u),$$

što nije moguće jer F ne smije ovisiti o x. Slično, ni odabir

$$(0, x, -y)$$

nas neće dovesti do rješenja. Uzet ćemo stoga sljedeće vrijednosti:

$$\lambda = \frac{1}{y}, \qquad \mu = -\frac{x+u}{y^2}, \qquad \nu = \frac{1}{y}.$$

Na isti način kao i u prethodnim zadacima dolazimo do drugog rješenja

$$\psi(x,y,u) = \frac{x}{y} + \frac{u}{y} (= C_2).$$

Provjerimo sada funkcionalnu nezavisnost ova dva rješenja. Računamo ponovno minore pripadne Jacobijeve matrice

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} x & 0 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x+u}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{x(x+u)}{y^2}.$$

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(y,u)}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -u \\ -\frac{x+u}{y^2} & \frac{1}{y} \end{vmatrix} = -\frac{u(x+u)}{y^2}.$$

$$\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,u)}\right| = \begin{vmatrix} x & -u \\ \frac{1}{y} & \frac{1}{y} \end{vmatrix} = \frac{x+u}{y}.$$

Dakle, imamo opće rješenje dano relacijom

$$F\left(x^2 - u^2, \frac{x}{y} + \frac{u}{y}\right) = 0,$$

na skupu na kojem je barem jedna od minora različita od 0. ■

Zadatak 3.2.4. *Odredite opće rješenje jednadžbe*

$$x(y-u)u_x + y(u-x)u_y = u(x-y).$$

Poglavlje 4

Dodatak

4.1 Polarne koordinate

Označimo s

$$S^{d-1}(r) = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = r^2\}$$

$d-1$-dimenzionalnu sferu radijusa r u $\mathbb{R}^d$. Neka je $x \in S^{d-1} := S^{d-1}(1)$. Posebno je $|x_d| \leq 1$, pa postoji $\vartheta_{d-1} \in [0, \pi]$ takav da je $x_d = \cos \vartheta_{d-1}$. Tada vrijedi $\sum_{i=1}^{d-1} x_i^2 = 1 - x_d^2 = \sin^2 \vartheta_{d-1}$, pa zaključujemo da se $(x_1, \dots, x_{d-1})$ nalazi na $d-2$-dimenzionalnoj sferi radijusa $\sin \vartheta_{d-1}$, tj. $(x_1, \dots, x_{d-1}) \in S^{d-2}(\sin \vartheta_{d-1})$. Induktivno dobivamo iduću parametrizaciju sfere

$$(x_1, \dots, x_d) = \Phi_{d-1}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}),$$

gdje je $\Phi_{d-1} : [0, 2\pi\rangle \times [0, \pi]^{d-2} \to \mathbb{R}^d$ definirana (prvo rekurzivno kao u ranije opisanom postupku) s

$$\Phi_1(\vartheta_1) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{d-1}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}) = \begin{bmatrix} \sin \vartheta_{d-1} \Phi_{d-2}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-2}) \\ \cos \vartheta_{d-1} \end{bmatrix}, \quad \text{za } d \geq 3.$$

odnosno raspisano

$$\Phi_{d-1}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}) = \begin{bmatrix} \sin \vartheta_{d-1} \sin \vartheta_{d-2} \cdots \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_{d-1} \sin \vartheta_{d-2} \cdots \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_{d-1} \sin \vartheta_{d-2} \cdots \cos \vartheta_2 \\ \vdots \\ \sin \vartheta_{d-1} \cos \vartheta_{d-2} \\ \cos \vartheta_{d-1} \end{bmatrix}.$$

Parametrizacija sfere radijusa r, $S^{d-1}(r)$, se sada jednostavno dobije kao

$$(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}) \mapsto r\Phi(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}).$$

Svaki $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ možemo na jedinstven način zapisati kao produkt pozitivnog broja (modul) te elementa na sferi (smjer) u **polarnim koordinatama**

$$x = r \cdot x', \quad r = |x| > 0, x' = \frac{x}{|x|} \in S^{d-1}.$$

Na taj način dobivamo parametrizaciju od $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ kao

$$(x_1, \dots, x_d) = \Psi_d(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}),$$

gdje je $\Psi_d : \langle 0, \infty\rangle \times [0, 2\pi\rangle \times [0, \pi]^{d-2}$ dana s

$$\Psi_d(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}) = r \cdot \Phi_{d-1}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}).$$

Napomena 1. *Navedene parametrizacije se mogu promatrati restringirati na otvoreni skup* $\langle 0, \infty\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, \pi\rangle^{d-2}$*; slika* Ψ *po ovom skupu se od prethodnog razlikuje do na skup mjere nula (uvjerite se), što ne čini nikakvu razliku pri integriranju (neki rezultati s INTRAF-a su napravljeni za otvorene skupove, dok neki za kvadre).*

4.2 Integriranje u polarnim koordinatama

Zadatak 4.2.1. *(Jacobijan zamjene varijabli)*

1. *Pokažite da je*

$$\det \nabla\Psi_d(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}) = r \sin^{d-2} \vartheta_{d-1} \det \nabla\Psi_{d-1}(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-2}).$$

2. *Pokažte da je* $\det \nabla\Psi_d = r^{d-1} \prod_{k=2}^{d-1} \sin^{k-1} \vartheta_k$.

Napomena 2. *Za idući zadatak nije potrebna eksplicitna formula za Jacobijane dobivena u prethodnom zadatku; ovdje je prije svega navedena radi potpunosti te kako bi se mogli računati integrali funkcija u polarnim koordinatama koje nisu nužno radijalne. Treba napomenuti da je već računanje samog volumena kugle netrivijalno zbog pojave potencija trigonometrijskih funkcija u integralu, već se najčešće koristi trik s gamma funkcijom (dodatak materijalima na INTRAF-u).*

Zadatak 4.2.2. *Označimo $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}) \in [0, 2\pi\rangle \times [0, \pi]^{d-2}$. Iz definicije imamo (u blok-matričnom zapisu)*

$$\nabla\Psi_d(r,\vartheta) = \begin{bmatrix} \Phi_{d-1}(\vartheta) & r\nabla\Phi_{d-1}(\vartheta) \end{bmatrix},$$

odnosno

$$(\nabla\Psi_d(r,\vartheta))^T = \begin{bmatrix} (\Phi_{d-1}(\vartheta))^T \\ r(\nabla\Phi_{d-1}(\vartheta))^T \end{bmatrix}$$

1. *Dokažite da vrijedi (u blok-matričnom zapisu):*

$$(\nabla\Psi_d(r,\vartheta))^T \nabla\Psi_d(r,\vartheta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2(\nabla\Phi_{d-1}(\vartheta))^T\nabla\Phi_{d-1}(\vartheta). \end{bmatrix}$$

2. *Dokažite da vrijedi*

$$|\det\Psi_d(r,\vartheta)| = \sqrt{\det(\nabla(r\Phi_{d-1})(\vartheta))^T\nabla(r\Phi_{d-1})(\vartheta)}.$$

Koristeći prethodni odnos Jacobijana u polarnoj zamjeni varijabli te Jacobijana parametrizacije sfere, možemo pokazati:

Zadatak 4.2.3. *Neka je $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Tada je*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_0^\infty \Big(\int_{rS^{d-1}} f\Big) dr.$$

Poseban slučaj koji će se nama često javljati u kolegiju je onaj u kojem je f radijalna funkcija, tj. ovisi samo o modulu, a ne i o smjeru.

Zadatak 4.2.4. *Neka je $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ radijalna funkcija, tj. pretpostavimo da postoji $g : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ td. je $f(x) = g(|x|)$. Tada je*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = |S^{d-1}| \int_0^\infty g(r) r^{d-1} dr.$$

4.3 Zamjena varijabli pri integriranju po sferi

Neka je sada $d \geq 2$ fiksan. Označimo s $S(x,r)$ sferu radijusa r oko $x \in \mathbb{R}^d$. Stavimo $\Omega = [0, 2\pi\rangle \times [0, \pi]^{d-2}$, te neka je kao ranije $\Phi := \Phi_{d-1} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ parametrizacija jedinične sfere.

Zadatak 4.3.1. *Neka je $A \in L(\mathbb{R}^d)$ dan s $Ay = x + ry$, pri čemu su $x \in \mathbb{R}^d$ i $r > 0$ zadani.*

1. *Parametrizacija sfere $S(x,r)$ je tada dana s $\Phi_A := A \circ \Phi$.*

2. *Vrijedi*
$$(\nabla\Phi_A)^T\nabla\Phi_A = r^2(\nabla\Phi)^T\nabla\Phi.$$

3. *Neka je* $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Tada je*
$$\int_{S(0,1)} u\circ A = r^{-(d-1)}\int_{S(x,r)} u.$$

4. *Posebno, tada je* $|S(0,r)| = r^{d-1}|S(0,1)|$, *tj. volumen sfere je proporcionalan s* r^{d-1}.

4.4 Deriviranje pod znakom integrala

U poglavljima o Poissonovoj i toplinskoj jednadžbi dolazimo do sličnih zaključaka: ako je Φ bilo elementarno rješenje pripadnog diferencijalnog operatora L, tada je rješenje jednadžbe $Lu = f$ dano konvolucijom
$$u(x) = \Phi * f(x) := \int_{\mathbb{R}^d}\Phi(x-y)f(y)dy.$$
Pritom nam je bitno da možemo ovako definirane funkcije derivirati, te s derivacijom ući pod znak integrala (tj. da vrijedi rezultat poput $\frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)dy$); na INTRAF-u je pokazan odgovarajući rezultat za funkcije dvije varijable na pravokutnicima, a analogon u više dimenzija i za općenitije prostore mjere (primjerice na sferi gdje je pripadna mjera dobivena iz ranije parametrizacije) ćemo pokazati u idućem zadatku.

Zadatak 4.4.1. *Neka je* $(X,\mathscr{F},\mu)$ *prostor mjere,* $I\subseteq\mathbb{R}$ *otvoreni interval te* $f : X\times I\to\mathbb{R}$ *funkcija takva da je za svaki* $t\in I$ *funkcija* $x\mapsto f(x,t)$ *u* $\mathrm{L}^1(X,\mathscr{F},\mu)$ *dok je za svaki* $x\in X$ *funkcija* $t\mapsto f(x,t)$ *klase* C^1 *na* I. *Ako postoji* $g\in\mathrm{L}^1(X,\mathscr{F},\mu)$ *takva da je* $\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\le g(x)$ *za svake* $x\in X, t\in I$, *pokažite da onda vrijedi*
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_X f(x,t)d\mu(x) = \int_X\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)d\mu(x).$$
Rješenje. Označimo s
$$F(t) = \int_X f(x,t)d\mu(x).$$
Neka je $(h_n)_n$ niz takav da vrijedi $h_n\to 0$. Imamo
$$\frac{F(t+h_n)-F(t)}{h_n} = \int_X\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}d\mu(x).$$
Podintegralna funkcija po točkama konvergira ka $\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)$, dok je zbog teorema srednje vrijednosti
$$\left|\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}\right| \le \sup_{t\in I}\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right| \le g(x)\in\mathrm{L}^1(\mu).$$
Stoga možemo primijeniti LTDK, odakle slijedi tvrdnja. ■

4.5 Prostor glatkih funkcija s kompaktnim nosačem

Podsjetimo se da smo ranije već spomenuli sljedeći prostor funkcija:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \{f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}} \text{ je ograničen skup}\}.$$

U ovom trenutku ne znamo niti jednu netrivijalnu funkciju koja pripada tom prostoru, stoga sada navodimo postojanje takve.

Zadatak 4.5.1. *Označimo s $f(t) = e^{-1/t}\mathbb{1}_{\langle 0,\infty\rangle}(t)$. Tada je*

a) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$,

b) funkcija $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definirana s

$$\rho(x) = Cf(1-|x|^2) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases},$$

*pri čemu je $C = \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{1/(|x|^2-1)}dx\right)^{-1}$, klase C^∞ te vrijedi $\operatorname{supp}\rho = K[0,1]$. Funkciju ρ zovemo još i **standardni izglađivač**.*

Napomena 3. *Konstanta C služi radi normalizacije integrala, tj. da bi vrijedilo $\int \rho = 1$. Primijetimo također da je ρ radijalna funkcija.*

Zadatak 4.5.2. *Definiramo niz $(\rho_n)_n \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ s $\rho_n(x) := n^d\rho(x)$.*

1. *Vrijedi:* $\operatorname{supp}\rho_n = K[0,1/n]$, $\int \rho_n = 1$.

2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren i ograničen skup. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo*

$$\Omega_n := \{x \in \Omega : d(x,\partial\Omega) > \frac{2}{n}\}.$$

Neka je $u \in C(\Omega)$, te stavimo $u_n := u \cdot \mathbb{1}_{\Omega_n}$ Dokažite da je $\operatorname{supp}\rho_n * u_n \subseteq \{x \in \Omega : d(x,\partial\Omega) > 1/n\}$ te da je $\rho_n * u_n \in C_c^\infty(\Omega)$.

3. *Neka je sada $v \in C(\Omega)$ takva da je $\operatorname{supp} v$ kompaktno sadržan u Ω (tj. postoji otvoreni skup Ω' takav da je $\operatorname{supp} v \subseteq \overline{\Omega'} \subseteq \Omega$). Dokažite da tada niz $\rho_n * v_n$ konvergira uniformno k v na Ω, počevši od dovoljno velikog n takvog da je $\rho_n * v_n$ dobro definiran (tj. od takvog n da je $d(\operatorname{supp} v, \partial\Omega) > 1/n$).*

Napomena 4. *Prethodne aproksimacije funkcije u glatkim (C^∞) funkcijama u unutrašnjosti skupa se pojavljuju u dokazu glatkoće harmoničkih funkcija.*

Prethodni rezultat nam daje način kako od funkcije koja nije nužno glatka dobiti dovoljno dobru aproksimaciju iste, uz uvjet da nosač funkcije "ne ide preblizu rubu". Taj rezultat najčešće kombiniramo sa sljedećim, a to je tzv. **cutoff funkcija**, koja zapravo predstavlja glatku verziju karakteristične funkcije skupa.

Zadatak 4.5.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren te $K \subseteq \Omega$ kompaktan. Označimo s $\delta = d(K, \partial\Omega) > 0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{4}{n} < \delta$ te stavimo redom*

$$K_n = \{x \in \Omega : d(x,K) < 2/n\}, \quad \psi = \rho_n * \mathbb{1}_{K_n}.$$

Tada vrijedi:

1. $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$,

2. $0 \leq \psi \leq 1$,

3. $\psi \equiv 1$ *na skupu* $\{x \in \Omega : d(x,K) < 1/n\}$.

Zadatak 4.5.4. *Neka su $f, g \in C_c^1(\mathbb{R})$. Tada je*

$$\int_{\mathbb{R}} fg' = -\int_{\mathbb{R}} f'g.$$

Rješenje. Kako su f, g kompaktno nošene, postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g \subseteq [-a, a].$$

Posebno su onda i f', g' nošene u istom kompaktu. Slijedi

$$0 = f(a)g(a) - f(-a)g(-a) = \int_{-a}^{a} (fg)' = \int_{\mathbb{R}} (fg)' = \int_{\mathbb{R}} f'g + fg'.$$

∎

U gornjem zadatku nije bilo potrebno da su obje funkcije kompaktno nošene, dovoljno je da je jedna takva da bismo zaključili isto: možemo prebaciti derivaciju s jedne funkcije na drugu **bez rubnog člana**.

Poglavlje 5

Laplaceova jednadžba

5.1 Harmoničke funkcije

U ovom ćemo se poglavlju posvetiti dvjema vrlo bitnim parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, **Laplaceovom jednadžbom**

$$-\Delta u = 0,$$

odnosno **Poissonovom jednadžbom**

$$-\Delta u = f,$$

pri čemu s Δ označavamo **Laplaceov operator** definiran s

$$\Delta = \sum_{i=1}^{d} \partial_i^2.$$

U oba slučaja tražimo nepoznatu funkciju $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, pri čemu je zadan otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. U slučaju Poissonove jednadžbe zadana je i funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Definicija 5.1.1. *Funkciju $u \in C^2(\Omega)$ koja rješava Laplaceovu jednadžbu zovemo **harmonička funkcija**.*

Zadatak 5.1.2. *a) Neka je $U \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup te $f : \Omega \to \mathbb{C}$. $f = u + iv$ holomorfna funkcija, pri čemu su $u, v : \Omega_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$. Tada su u i v harmoničke funkcije.*

b) Vrijedi i svojevrsni obrat. Ako je dodatno Ω 1-povezan, te $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonička funkcija, tada postoji holomorfna funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ takva da je $u = \mathrm{Re} f$.

Rješenje. a) Iz Cauchy-Riemannovih uvjeta imamo $u_x = v_y$ i $u_y = -v_x$, pa vidimo da je

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy}.$$

Kako je realni dio holomorfne funkcije C^∞ funkcija, primjenom Schwartzovog teorema dobivamo da je gornji izraz jednak 0. Sasvim analogno se pokaže tvrdnja i za v.

b) Za $(x,y) \in \Omega$ stavimo

$$f(x+iy) = u_x(x,y) - iu_y(x,y).$$

Kako je u harmonička funkcija (posebno C^2), jednostavno vidimo da je $f \in C^1(\Omega)$ te da zadovoljava *CR* uvjete. Dakle, f je holomorfna funkcija. Fiksirajmo sada $z_0 = (x_0 + iy_0) \in \Omega$, te stavimo za $z \in \Omega$

$$F(z) := u(z_0) + \int_\gamma f(w)dw,$$

pri čemu je γ proizvoljan put od z_0 do z u Ω. Funkcija F je primitivna funkcija funkcije f (pa je posebno i ona holomorfna). Pokažimo sada da je $\mathrm{Re}F = u$. Označimo s $U = \mathrm{Re}F$. Za sve $z = (x+iy) \in \Omega$ imamo

$$U_x(x,y) - iU_y(x,y) = F'(z) = f(z) = u_x(x,y) - iu_y(x,y),$$

odnosno $DU = Du$ na Ω. Kako je $U(x_0,y_0) = u(x_0.y_0)$, slijedi

$$u = \mathrm{Re}F.$$

■

Napomena 5.1.3. *Usporedite rezultate o harmoničkim funkcijama s rezultatima za holomorfne funkcije iz kolegija Kompleksna analiza.*

U slučaju $\Omega = \mathbb{R}^d$ smo vidjeli kako se koristeći neke prirodne pretpostavke i uvjete na funkciju u može doći do tzv. **elementarnog rješenja** Laplaceove jednadžbe na $\mathbb{R}^d$. Prvi korak na tom putu je bila pretpostavka da je poželjno rješenje Laplaceove jednadžbe tražiti među radijalnim funkcijama. To je pak bila posljedica činjenice da je Laplaceova jednadžba invarijantna na rotacije. U nastavku ćemo pokazati i nešto općenitiju tvrdnju.

Zadatak 5.1.4. *Neka je $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$, te neka je $O = (a_{ij}) \in M_d(\mathbb{R})$ ortogonalna matrica. Tada je $\Delta(u \circ O) = (\Delta u) \circ O$.*

Rješenje. Stavimo $v = u \circ O$. Kako je matrica O ortogonalna (odnosno $O^T O = OO^T = I$), imamo

$$\sum_{i=1}^d a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk}, \quad \text{za sve } j,k = 1,\dots,d.$$

Računamo:

$$\partial_i v(x) = \sum_{j=1}^d (\partial_j u)(Ox) \cdot a_{ji},$$

te

$$\partial_i^2 v(x) = \sum_{j,k=1}^{d} (\partial_{jk} u)(Ox) a_{ji} a_{ki}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\Delta v(x) = \sum_{i=1}^{d} \partial_i^2 v(x) &= \sum_{i,j,k=1}^{d} (\partial_{jk} u)(Ox) a_{ji} a_{ki} \\
&= \sum_{j,k=1}^{d} (\partial_{jk} u)(Ox) \Big(\sum_{i=1}^{d} a_{ji} a_{ki} \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{d} (\partial_j^2 u)(Ox) \\
&= \Delta u(Ox).
\end{aligned}$$

■

Definicija 5.1.5. ***Elementarno rješenje Laplaceove jednadžbe*** *je funkcija*

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, & d = 2, \\ \frac{1}{d(d-2)\omega_d} \frac{1}{|x|^{d-2}}, & d \geq 3, \end{cases}$$

definirana za $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Iako funkcija Φ ima singularitet u ishodištu, ona ipak ima jedno poželjno svojstvo koje ćemo sada pokazati: ona pripada prostoru **lokalno integrabilnih funkcija**

$$\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) := \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \int_K |f| < \infty, \text{ za svaki kompakt } K \subseteq \mathbb{R}^d \}.$$

Zadatak 5.1.6. *Pokažite da je*

$$\int_K |\Phi(x)| dx < \infty,$$

za svaki kompakt $K \subseteq \mathbb{R}^d$.

Rješenje. Primijetimo prvo kako je zbog neprekidnosti od Φ funkcija integrabilna na svakom kompaktu koji ne sadrži 0. Stoga je za svaki $K \subseteq \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\Phi(x)| dx = \underbrace{\int_{K \cap K(0,1)} |\Phi|}_{\leq \int_{K(0,1)} |\Phi|} + \underbrace{\int_{K \setminus K(0,1)} |\Phi|}_{< \infty},$$

pa je dovoljno pokazati da je

$$\int_{K(0,1)} |\Phi| < \infty.$$

Pokazat ćemo prvo slučaj $d = 2$. S obzirom da je riječ o radijalnoj funkciji, poželjno je prijeći na polarne koordinate (vidjeti iduće poglavlje, korolar 3.2.2.). Računamo:

$$\begin{aligned}\int_{K[0,1]} \Phi(x)dx &= 2\omega_2 \int_0^1 \Phi(r)rdr \\ &= -\int_0^1 r\ln r dr \quad \text{(parc. int.)} \\ &= -\frac{r^2 \ln r}{2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{r}{2}dr.\end{aligned}$$

Preostaje pokazati da je $\lim_{r\to 0^+} r^2 \ln r < \infty$. Ovdje koristimo L'Hopitalovo pravilo kako bismo zaključili

$$\lim_{r\to 0^+} r^2 \ln r = \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln r}{\frac{1}{r^2}} = -\lim_{r\to 0^+} \frac{\frac{1}{r}}{\frac{2}{r^3}} = 0.$$

Dakle, gornji integral je konačan, te iznosi $\frac{1}{4}$.

U slučaju $d \geq 3$ postupamo analogno. Ponovno prelaskom na polarne koordinate dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{K[0,1]} \Phi(x)dx &= d\omega_d \int_0^1 \frac{1}{d(d-2)\omega_d} \frac{1}{r^{d-2}} r^{d-1} dr \\ &= \frac{1}{d-2}\int_0^1 rdr \\ &= \frac{1}{2(d-2)}.\end{aligned}$$

■

Napomena 5.1.7. *Iako je funkcija Φ lokalno integrabilna, ona nije integrabilna zbog svog ponašanja u beskonačnosti.*

Zadatak 5.1.8. *(alternativni dokaz jakog principa maksimuma)*
Neka je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonička funkcija na ograničenom otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Tada je

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Rješenje. Za $\varepsilon > 0$ definiramo $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon|x|^2$. Kako je funkcija u harmonička, imamo

$$\Delta u_\varepsilon = 2d\varepsilon.$$

Pretpostavimo sada da se maksimum ne postiže na rubu, već u unutrašnjosti (tj. u Ω) u točki x_0. Tada za matricu drugog diferencijala u točki x_0 vrijedi

$$D^2 u_\varepsilon(x_0) \leq 0.$$

Kako je to simetrična matrica, postoje ortogonalna matrica O i dijagonalna matrica $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, gdje su $\lambda_1, \dots, \lambda_d \le 0$ svojstvene vrijednosti matrice $D^2 u_\varepsilon(x_0)$ takve da vrijede

$$O^T D^2 u_\varepsilon(x_0) O = D.$$

Imamo

$$0 < 2d\varepsilon = \Delta u_\varepsilon = \operatorname{tr}(D^2 u_\varepsilon(x_0)) = \operatorname{tr}(O^T D^2 u_\varepsilon(x_0) O) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \le 0.$$

Dakle, funkcije u_ε postižu svoj maksimum na rubu. Puštanjem $\varepsilon \to 0$ slijedi tvrdnja. ■

Zadatak 5.1.9. *Kažemo da je $u \in C^2(\overline{\Omega})$* ***subharmonička*** *ako vrijedi*

$$-\Delta u \le 0, \quad \text{na } \Omega.$$

a) Dokažite da za subharmoničku funkciju u vrijedi

$$u(x) \le \fint_{B(x,r)} u(y)\, dy, \quad \text{za svaku kuglu } B(x,r) \subseteq \Omega.$$

b) Dokažite da subharmoničke funkcije zadovoljavaju jaki princip maksimuma, tj.

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Zadatak 5.1.10. *Neka je $\Omega = K(0,1)$, te f, g neprekidne funkcije. Dokažite da postoji konstanta C takva da vrijedi*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \le C\Big(\max_{\overline{\Omega}} |f| + \max_{\partial\Omega} |g|\Big)$$

za svaku funkciju u koja rješava

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{na } K(0,1), \\ \quad u = g & \text{na } S(0,1) \end{cases}$$

Rješenje. Označimo s $M := \max_{\overline{\Omega}} |f|$. Promotrimo funkciju

$$v(x) = u(x) + \frac{|x|^2}{2d} M.$$

Ako je u rješenje gornje zadaće, tada u kugli imamo

$$-\Delta v = f - M \le 0.$$

Prema prethodnom zadatku, v tada postiže svoj minimum na rubu (sferi), pa za sve $x \in K[0,1]$ slijedi

$$u(x) \leq v(x) \leq \max_{\partial\Omega} g + \frac{1}{2d}M \leq \max_{\partial\Omega} |g| + \max_{\overline{\Omega}} |f|.$$

S druge strane, za $v(x) = -u(x) + \frac{|x|^2}{2d}M$ u kugli vrijedi

$$-\Delta v = -(f+M) \leq 0,$$

pa slično dobivamo za svaki $x \in K[0,1]$ da vrijedi i

$$-u(x) \leq v(x) \leq \max_{\partial\Omega}(-g) + \frac{1}{2d}M \leq \max_{\partial\Omega} |g| + \max_{\overline{\Omega}} |f|,$$

odakle slijedi tvrdnja zadatka uz $C = 1$.

■

Prije nego nastavimo, uvest ćemo pomoćno poglavlje koje služi za motivaciju cijelog pojma Greenove funkcije i njenog izvoda.

5.2 Diracova delta funkcija: uvod

Na samom početku ćemo pokušati dati kratku motivaciju za objekt koji je u nekom obliku spominjan na kolegiju ODJ, a riječ je o tzv. **Diracovoj delta funkciji**. Prije svega su se koristila neka njena svojstva pri postavljanju i računanju rješenja linearnih običnih diferencijalnih jednadžbi. No, što je zapravo delta funkcija, i kojem matematičkom okviru ona pripada? Kao što se moglo vidjeti u svakom od kolegija koji u nekoj mjeri obuhvaćaju teoriju diferencijalnih jednažbi, ovo područje matematike je prije svega nastalo kako bi se mogli opisati, modelirati a zatim i riješiti (ili predivdjeti) razni fizikalni procesi, odnosno zakoni. Pri tome smo često navikli na određena pojednostavljivanja ili idealizacije stvarne situacije:

- Iako gotovo svi objekti u stvarnosti imaju volumen, zamišljamo ih kao točkaste objekte u kojima su koncentrirani svi njihovi atributi, bilo da je riječ o masi, električnom naboju ili potencijalu, temperaturi itd.

- Odvijanje fizikalnih procesa, a samim time i promjene koje se u njima događaju, često smatramo instantnima. Primjerice, ukoliko lopta miruje, te ju zatim u trenutku t_0 udarimo nogom, trajanje prijenos količine gibanja p smatramo beskonačno kratkim, ne uzimajući u obzir ipak netrivijano vrijeme međudjelovanja noge i lopte, kako na makroskopskoj razini, tako i na samoj subatomskoj razini, te nakon toga lopta nastavlja imati količinu gibanja p.

Stoga se javila potreba za načinom na koji bismo takve aproksimacije mogli zapisati, ali i računati s njima na način koji nam fizikalna opažanja sugeriraju. Naravno, očiti način označavanja gornjih pojava bi bio:

- Karaterističnom funkcijom točkastog objekta, $\mathbb{1}_{x_0}(x)$,
- Step funkcijom $\mathbb{1}_{t\geq t_0}(t)$.

Obje ove funkcije imaju sličan problem u vidu onoga što želimo postići: u dosadašnjoj teoriji mjere i izmjerivih funkcija, obje ove funkcije zapravo "ne vide" što se događa u ključnom trenutku. Naime, prva funkcija je zapravo s.s. jednaka nuli, dok druga funkcija ima s.s. derivaciju jednaku nuli, dok u $t = t_0$ derivacija ne postoji. Dakle, za svaki tip računa nam prva funkcija uopće ni ne može očuvati informaciju o količini koja se nalazi u točki x_0, dok u drugom slučaju nemamo nikakvu informaciju o tome da je nekakve promjene u trenutku t_0 uopće bilo, a kamoli kolika je. Diracova delta funkcija će biti rješenje prvog od tih problema; objekt koji nam označava koncentraciju cijele mase/naboja/itd. u jednoj jedinoj točki, ali pritom ne narušavajući neka svojstva koja posjeduju trodimenzionalni objekti. Drugi dio problema će zapravo voditi na pitanje deriviranja funkcija koje nisu nužno više derivabilne u klasičnom smislu, čuvajući informacije o tome gdje se pojavio skok, i koliki je on bio.

Iako je već sugerirano da delta funkcija neće zapravo biti standardna funkcija, pogledajmo kako bismo htjeli da ona izgleda kada bi to ipak bio slučaj. Poslužimo se opet fizikalnim primjerom tijela u prostoru u tu svrhu. Radi jednostavnosti, neka je naše tijelo kugla oko ishodišta radijusa 1 (K_1) mase $m > 0$. U slučaju da je kugla homogena, njena funkcija gustoće je dana s $\rho(x) = \frac{m}{|K_1|}\mathbb{1}_{K_1}(x)$, gdje je $|\cdot|$ oznaka za volumen u $\mathbb{R}^3$, tj. vrijedi

$$m = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)dx.$$

Naš je cilj reći nešto o slučaju koji se nalazi na drugoj krajnosti; kada tijelo nije homogeno već je cijela masa koncentrirana u jednoj točki (npr. ishodištu). Za aproksimaciju tog efekta možemo prvo uzeti niz gustoća koje su uniformne na vrlo maloj kugli oko ishodišta (K_ε), ali tako da masa tijela i dalje ostane m. Drugim riječima, označimo s $\rho_\varepsilon(x) = \frac{m}{|K_\varepsilon|}\cdot\mathbb{1}_{K_\varepsilon}(x)$. Tada ponovno imamo

$$m = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(x)dx.$$

Za aproksimacijske funkcije ρ_ε vrijedi

$$\rho_0(x) := \lim_{\varepsilon\to 0}\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{5.1}$$

Kako je za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedilo $\int \rho_\varepsilon = m$, te uzevši u obzir fizikalnu interpretaciju ("masa = integriranje gustoće po volumenu"), htjeli bismo da vrijedi i

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_0(x)dx = m. \tag{5.2}$$

Naravno, iz teorije mjere i integrala znamo da ne postoji izmjeriva funkcija koja zadovoljava i (3.10) i (5.2). Stoga vidimo da promatranje jakog limesa prethodnog niza funkcija nema smisla. Na taj način nastala je cijela teorija tzv. **distribucija** (ili **generaliziranih funkcija**). Drugim riječima, smisao našoj "funkciji" ρ_0, koju ćemo sada označiti s δ (za normaliziran slučaj $m = 1$) ćemo dati tek kada s njom djelujemo na neku drugu "dovoljno dobru" funkciju. Preciznije, **Diracovu delta distribuciju** ćemo definirati kao linearan funkcional na prostoru testnih funkcija, $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, na sljedeći način

$$\langle \delta, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|K_\varepsilon|} \int_{K_\varepsilon} \varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Napomena 5. *(a) Nekad se za djelovanje $\langle \delta, \varphi \rangle$ na test funkciju φ, u skladu s uvodnom pričom, koristi i neprecizna oznaka*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \delta(x)\varphi(x)dx.$$

(b) Gornja definicija, odnosno račun, ima smisla i za funkcije φ koje su samo neprekidne u nuli. Međutim, pojam distribucije općenito se definira kao neprekidni linearni funkcional na $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. U ovom trenutku nije jasno što neprekidnost podrazumijeva, s obzirom da za $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ nije spomenuta nikakva topološka struktura. Nešto više o tome će biti rečeno u kolegiju nastavku, no za sam pojam delta distribucije nam ne treba ništa od toga.

(c) Primijetimo da nam ovakav objekt daje upravo ono što nismo mogli postići s običnim funkcijama; informaciju o mjeri nekog atributa u jednoj jedinoj točki.

(d) Ukoliko uvrstimo $\varphi \equiv 1$, tada bismo dobili upravo

$$\int_{\mathbb{R}^d} \delta(x)dx = 1.$$

(e) Delta distribucija nam da je informaciju o tome što se događa u ishodištu. Ukoliko želimo isto napraviti za neki drugi $a \in \mathbb{R}^d$, tada bismo promotrili "funkciju" $\delta(x-a)$, odnosno preciznije distribuciju definiranu kao slabi limes funkcija $x \mapsto \rho_\varepsilon(x-a) = \frac{1}{|K_\varepsilon|}\mathbb{1}_{K_\varepsilon}(x-a)$. Koristeći ponovno oznaku kao u (a) imamo za sve $a \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \delta(a-x)f(x)dx = f(a),$$

što bismo mogli zapisati i kao $\delta * f = f$. Dakle, δ možemo smatrati kao neutralni element za operaciju konvolucije.

Dotaknimo se za kraj ovog dijela i pitanja deriviranja funkcija koje nisu nužno neprekidne, kao što smo spomenuli u primjeru step-funkcije. Označimo s

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Vrijedi $H'(x) = 0$ za $x \neq 0$ dok u nuli derivacija ne postoji. Međutim, htjeli bismo ipak na neki način pri deriviranju dobiti informaciju i što se dogodilo u točki prekida. Primijenit ćemo isti pristup kao i u slučaju definiranja delta funkcije, a to je zamjena pitanjem jakog limesa slabim. Time dolazimo do idućeg kandidata za H' kao distribucije:

$$\langle H', \varphi \rangle = \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{H(x) - H(x-h)}{h} \varphi(x) dx = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Ovo će se zaista podudarati s definicijom deriviranja distribucija koju ćemo imati na PDJ2. Primijetimo u ovom trenutku da nam H' u ovom smislu zaista daje informaciju koju želimo; pojava δ u derivaciji sugerira upravo da se u nuli dogodio skok visine 1, dok je van toga "jednaka nuli" (naravno, to da je distribucija jednaka nuli na nekom skupu u $\mathbb{R}$ zasad nema smisla, s obzirom da je riječ o funkcionalima koji djeluju na funkcije, a ne na točke).

5.3 Greenova funkcija i elementarno rješenje - motivacija

U ovom ćemo dijelu pokušati dati kratki pregled pojma Greenove funkcije, odnosno elementarnog rješenja, kao i pozadinu iza njihove veze s rješenjem odgovarajućih PDJ-ova. Pritom je vrlo bitno napomenuti kako će računi koji će se provoditi u ovom dijelu biti fomralni: drugim riječima, operirat ćemo s δ kao s funkcijom, koristeći nepreciznu notaciju za djelovanje kao integral, koristiti neke rezultate iz analize funkcija više varijabli (Greenovi teoremi, parcijalna integracija, itd.), te se nećemo baviti opravdavanjem konvergencije integrala, zamjena limesa i slično. Bez razvoja teorije distribucija poopćenja gornjih rezultata ni ne možemo dokazivati. Također, s obzirom da se bavimo rješavanjem Poissonove jednadžbe, odnosno rubne zadaće za istu, imat ćemo zadane i nekakve funkcije f, g; za njih možemo pretpostaviti da su iste (ili veće) regularnosti kao i u odgovarajućim rezultatima u kolegiju, makar za one dijelove račune koji bi se tada zaista mogli opravdati.

Kao uvodni primjer ćemo uzeti primjer problema određivanja električnog potencijala u električnom polju. Ukoliko s $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ označimo električni potencijal te s $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gustoću električnog naboja, veza je dana upravo Laplaceovom jednadžbom (do na određene konstante koje ovdje izostavljamo)

$$-\Delta u(x) = f(x). \tag{5.3}$$

Sada ćemo formalnim računom (tj., ne bavimo se pitanjima konvergencije integrala niti ulaskom limesa pod integral i slično) dati ideju kako pristupiti rješavanju ovog problema. Pretpostavimo za početak da nam je dan jedinični točkasti naboj koncentriran u točki $y \in \mathbb{R}^3$. Recimo da smo u mogućnosti odrediti koliki potencijal generira taj točkasti naboj u svakoj drugoj točki prostora, drugim riječima, možemo odrediti rješenje $x \mapsto G(x,y)$ jednadžbe

$$-\Delta_x G(x,y) = \delta(x-y). \tag{5.4}$$

Množenjem gornje jednadžbe s $f(y)$ imamo

$$-\Delta_x[G(x,y)f(y)] = f(y)\delta(x-y). \tag{5.5}$$

Desnu stranu u (5.5) možemo protumačiti sada kao točkasti naboj u y, ali ne jedinični, već jačine $f(y)$. Pretpostavimo u idućem koraku da nemamo jedan izvor naboja, već da se izvori nalaze u točkama $y_1,\dots,y_n$ koje imaju naboj jačine $f(y_i)$. S obzirom da je problem linearan, ukupni potencijal koji dobijemo u točki $x \in \mathbb{R}^3$ možemo dobiti kao sumu svih potencijala koji generiraju točkasti naboji, pa bi rješenje problema trebalo biti

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} G(x,y_i)f(y_i).$$

Konačno, ako je pak izvor glatko raspoređen kroz cijeli prostor (odnosno, dan funkcijom $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}3$), tada formalno zamijenimo sumu s integralom, te dobijemo

$$-\Delta\Big(\int_{\mathbb{R}^3} G(x,y)f(y)dy\Big) = \int_{\mathbb{R}^3} -\Delta_x G(x,y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^3} f(y)\delta(x-y) = f(x).$$

Dakle, ukoliko stavimo

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^3} G(x,y)f(y)dy, \tag{5.6}$$

očekujemo da će to biti rješenje jednadžbe (5.3).

Postupak koji je opisan je osnovna ideja Greenove funkcije. Međutim, mi smo pri rješavanju Poissonove jednadžbe prvo krenuli od pojma elementarnog rješenja, a onda smo kasnije vidjeli da je Greenova funkcija došla kao određena korekcija tog elementarnog rješenja. Ova dva pojma su u nekim slučajevima gotovo jednaka; a riječ je u slučajevima kada je diferencijalni operator koji opisuje jednadžbu invarijantan na translacije (fizikalno, opisuje procese/zakone u kojima vrijednosti ovise samo o udaljenosti objekata). Naravno, Laplaceov operator je upravo takav. U takvim slučajevima je prirodno tražiti Greenovu funkciju kao funkciju koja ovisi samo o razlici argumenata, drugim riječima u obliku

$$G(x,y) = \Phi(x-y).$$

Dakle, tada bi nam bilo dovoljno riješiti (5.4) za slučaj $y = 0$, odnosno Φ bi bio rješenje

$$-\Delta\Phi(x) = \delta(x). \tag{5.7}$$

Uvrštavanjem $G(x,y) = \Phi(x-y)$ u (5.6) dobivamo i poznatu nam formulu za rješenje Poissonove jednadžbe

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x-y) f(y) dy.$$

Napomena 6. *Formalni postupak napravljen za Laplaceov operator jednako tako je moguće napraviti i za bilo koji linearni parcijalni diferencijalni operator L.*

Primijetimo kako nam jednadžba (5.7) ujedno daje i potencijalnu definiciju pojma elementarnog rješenja za pripadni diferencijalni operator; reći ćemo da je Φ **elementarno rješenje operatora** L ako vrijedi $L\Phi = \delta$.

Napomena 7. *(a) S obzirom da je desna strana jednakosti, δ, generalizirana funkcija, a priori nije za očekivati da će pripadno elementarno rješenje Φ biti išta bolje od također generalizirane funkcije. Naravno, što znači primjena diferencijalnog operatora na distribucije koje nisu funkcije nije jasno u ovom trenutku.*

(b) Rješavanje jednadžbe $L\Phi = \delta$ u sklopu teorije distribucija se najčešće provodi tehnikama Fourierove analize. U nekim slučajevima, ovisno o samom operatoru L, možemo pronaći odgovarajuće invarijante ili simetrije pomoću kojih si možemo olakšati rješavanje gornje jednadžbe, kao što je bilo u slučaju Laplaceovog operatora (radijalnost).

(c) *Ukoliko elementarno rješenje postoji, ono nije nužno jedinstveno. Primjerice, za* $L = -\Delta$ *neka je* u *bilo koja harmonička funkcija (u klasičnom smislu); takav je recimo bilo koji polinom prvog stupnja. Tada je i* $-\Delta(\Phi + u) = -\Delta\Phi - \Delta u = \delta$*. Jedinstvenost se ponekad može postići dodavanjem dodatnih uvjeta na* Φ*, primjerice zahtjevom* $\lim_{|x|\to\infty} \Phi(x) = 0$.

(d) *Promotrimo ponovno slučaj* $L = -\Delta$*, te pretpostavimo da imamo neko elementarno rješenje* Φ*. Jednakost u definiciji možemo protumačiti na sljedeći način: na* $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ *vrijedi* $\Delta\Phi = 0$*, što sugerira da se izvan ishodišta* Φ *zapravo ponaša kao (harmonička) funkcija, dok pojava delte na desnoj strani jednakosti kao i u posljednjem primjeru prvog dijela sugerira da u samom ishodištu imamo neki tip singulariteta (npr. prekid/skok, gubitak glatkoće ili divergenciju vrijednosti). Primijetimo da je to upravo ono što imamo za funkciju*

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x|, & d = 2, \\ \frac{1}{d(d-2)\omega_d} |x|^{-(d-2)}, & d \geq 3. \end{cases}$$

koju smo "prozvali" elementarnim rješenjem za Δ.

5.4 Greenova funkcija na omeđenim domenama

Greenova funkcija za omeđen skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ s C^1 rubom je funkcija $G(x,y)$ na $\Omega \times \overline{\Omega}$ definirana sljedećim svojstvima:

(1) $y \mapsto G(x,y) - \Phi(x-y)$ je harmonička funkcija na Ω i neprekidna na $\overline{\Omega}$, gdje je Φ elementarno rješenje za $-\Delta$.

(2) $G \equiv 0$ na $\Omega \times \partial\Omega$.

Napomena 8. (a) *Zbog činjenice da je* $-\Delta_y \Phi(x-y) = \delta(x-y)$*, uvjet (1) je ekvivalentan s uvjetom* $\Delta_y G(x,y) = \delta(x-y)$*, za svaki* $x \in \Omega$*. Posebno,* G *možemo definirati i kao funkciju koja za svaki* $x \in \Omega$ *rješava zadaću*

$$\begin{cases} -\Delta_y G(x,y) = \delta(x-y), & na\ \Omega, \\ G(x,y) = 0, & na\ \partial\Omega, \end{cases}$$

(b) Ukoliko Greenova funkcija za Ω postoji, tada je ona jedinstvena. Zaista, ukoliko su G_1 i G_2 funkcije koje zadovoljavaju gornja svojstva, tada je $G := G_1 - G_2$ rješenje zadaće

$$\begin{cases} -\Delta_y G(x,y) = 0, & na\ \Omega, \\ G(x,y) = 0, & na\ \partial\Omega, \end{cases}$$

za svaki x, odakle zbog principa maksimuma slijedi $G \equiv 0$. Pritom napomenimo razliku između zadaća iz (a) i (b): jednadžba u (a) govori kako je Greenova funkcija harmonička po drugoj varijabli van dijagonale, gdje ima isti singularitet kao i elementarno rješenje, dok je u jednadžbi u (b) oduzimanjem poništimo taj singularitet, tako da je riječ o običnoj Laplaceovoj jednadžbi.

(d) Ovdje to nećemo dokazivati, međutim vrijedi sljedeći rezultat: ako je Ω omeđen skup s C^1 rubom, tada Greenova funkcija za Ω postoji, i za svaki $x \in \Omega$ je $y \mapsto G(x,y)$ klase C^∞ na $\overline{\Omega} \setminus \{x\}$.

Lema 5.4.1. *$G(x,y) = G(y,x)$ za sve $x,y \in \Omega$.*

Dokaz. Za fiksne $x,y \in \Omega$ označimo s $u(z) = G(x,z)$ te $v(z) = G(y,z)$. Tada je $\Delta u = \delta(x-z)$ i $\Delta v = \delta(y-z)$, pa primjenom Greenovog teorema slijedi

$$\begin{aligned} G(x,y) - G(y,x) &= \int_\Omega [G(x,z)\delta(y-z) - G(y,z)\delta(x-z)]dz \\ &= \int_\Omega [G(x,z)\Delta v(z) - G(y,z)\Delta u(z)]dz \\ &= \int_{\partial\Omega} [G(x,z)\nabla_n v(z) - G(y,z)\nabla_n u(z)]d\sigma(z) \\ &= 0, \end{aligned}$$

zbog toga što su funkcije $z \mapsto G(x,z), G(y,z)$ jednake nula na $\partial\Omega$. □

Napomena 9. *Simetričnost Greenove funkcije nam daje i prirodno proširenje domene na $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ na način $G(x,y) = 0$ za $x \in \partial\Omega$.*

Pogledajmo sada kako nam Greenova funkcija pomaže pri rješavanju rubne zadaće

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{na } \Omega, \\ u = g, & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.8}$$

Ovu zadaću možemo rastaviti na dvije zadaće

$$\begin{cases} -\Delta v = f, & \text{na } \Omega, \\ v = 0, & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta w = 0, & \text{na } \Omega, \\ w = g, & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Naravno, tada je rješenje u zadaće (5.8) dano s $u = v + w$, gdje su v, w rješenja rastavljenih zadaća.

Za nehomogenu zadaću s Dirichletovim rubnim uvjetom definiramo kao i prije

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy = \int_\Omega [G(x,y) - \Phi(x-y)]f(y)dy + \int_\Omega \Phi(x-y)f(y)dy.$$

Neka je prvo $x \in \Omega$. S obzirom da je $y \mapsto G(x,y) - \Phi(x-y)$ harmonička funkcija unutar Ω, prvi integral će nakon primjene $-\Delta$ biti jednak nula, dok za računanje drugog integrala možemo prvo proširiti funkciju f nulom izvan Ω, te zatim iskoristiti da je Φ elementarno rješenje (koje smo spomenuli samo na čitavom prostoru $\mathbb{R}^d$) da bismo zaključili da drugi član daje $f(x)$. Također, za $x \in \partial\Omega$ je $y \mapsto G(x,y) = 0$ za sve $y \in \Omega$, pa vidimo da je na rubu zaista zadovoljen Dirichletov uvjet.

Pretpostavimo sada da je w rješenje homogene zadaće s nehomogenim rubnim uvjetima. Tada je

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_\Omega w(y)\delta(x-y)dy \\ &= -\int_\Omega w(y)\Delta G(x,y)dy \\ &= -\int_\Omega \Delta w(y)G(x,y)dy + \int_{\partial\Omega} [w(y)\nabla_n G(x,y) - G(x,y)\nabla_n w(y)]d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} g(y)\nabla_n G(x,y)d\sigma(y). \end{aligned}$$

Napomena 10. *(a) Uvjet (1) u definiciji Greenove funkcije osigurava da funkcija u definirana kao prije zadovoljava samu jednadžbu unutar Ω, dok uvjet (2) osigurava da ćemo zadovoljiti Dirichletov rubni uvjet.*

(b) Iako pojam C^1 ruba do sada nije zapravo ni definiran (kao što smo vidjeli, bavimo se ionako nekim jednostavnim slučajevima Ω), napomenimo samo kako je određena glatkoća ruba potrebna kako bi proširenja funkcija izvan Ω (primjerice, nulom) dala funkcije koje su ponovno integrabilne i s kojima možemo računati određene izraze.

5.5 Greenova funkcija - račun

U ovom ćemo se dijelu posvetiti problemu rješavanja Poissonove jednadžbe na otvorenom skupu $\Omega \nsubseteq \mathbb{R}^d$ s C^1 rubom (u našim slučajevima će on biti "ravan" ili "okrugao"), odnosno **rubne zadaće**

Definicija 5.5.1. ***Greenova funkcija*** *područja Ω je funkcija*

$$G(x,y) := \Phi(y-x) - \phi^x(y), \quad (x,y \in \Omega, x \neq y),$$

pri čemu je $\phi^x = \phi^x(y)$ ***funkcija korektor*** *dana kao rješenje rubne zadaće*

$$\begin{cases} \Delta\phi^x = 0, & u\ \Omega, \\ \phi^x = \Phi(\cdot - x), & na\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Ukoliko možemo za dani skup Ω konstruirati pripadnu Greenovu funkciju, rješenje rubne zadaće tada tražimo u obliku

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y)d\sigma(y) + \int_{\Omega} f(y)G(x,y)dy, \quad x \in \Omega,$$

pri čemu je n vanjska normala na $\partial\Omega$, a $\frac{\partial G}{\partial n}(x,y) = \nabla G(x,y) \cdot n(y)$ normalna derivacija.

U praksi se često ispostavlja da je Greenovu funkciju teško konstruirati ako Ω nema jednostavnu geometrijsku strukturu. Navodimo dva područja čija je Greenova funkcija konstruirana na predavanjima.

Primjer 5.5.2. *(Poluprostor $\mathbb{R}^d_+$)*
Neka je $\Omega = \{(x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$. Označimo s x' refleksiju $x \in \mathbb{R}^d_+$ s obzirom na ravninu $x_d = 0$. Pripadni korektor je tada dan s

$$\phi^x(y) := \Phi(y-x') = \Phi(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_{d-1} - x_{d-1}, y_d + x_d),$$

te je Greenova funkcija za poluravninu

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-x').$$

Primjer 5.5.3. *(Jedinična kugla)*
Neka je $\Omega = K[0,1]$. Za $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ definiramo ***dualnu točku s obzirom na*** *$S(0,1)$*

$$\tilde{x} := \frac{x}{|x|^2}.$$

Pripadni korektor je tada dan s

$$\phi^x(y) := \Phi(|x|(y-\tilde{x})),$$

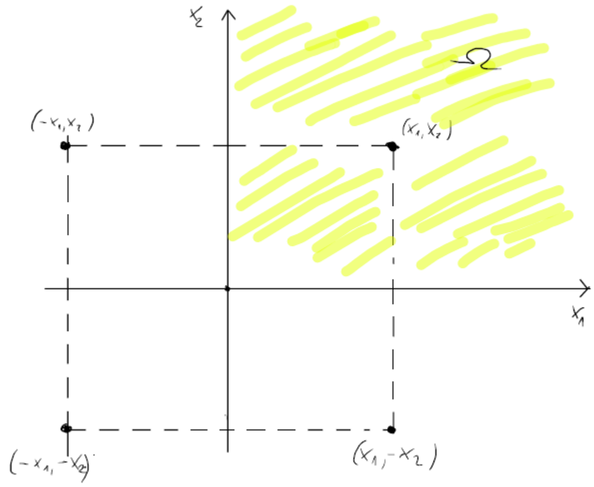
te je Greenova funkcija za kuglu

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(|x|(y-\tilde{x})).$$

U oba prethodna primjera ideja je bila reflektiranjem s obzirom na rub prebaciti singularitet na područje izvan skupa. Pokušat ćemo sada na sličan način, kombinacijom refleksija, konstruirati Greenovu funkciju za još neke skupove.

Zadatak 5.5.4. *(Prvi kvadrant u $\mathbb{R}^2$)*
Konstruirajte Greenovu funkciju za skup $\Omega = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1,x_2 > 0\}$.

Rješenje.



Za točku $x = (x_1,x_2) \in \Omega$ prvo napravimo standardne refleksije obzirom na $\partial\Omega$, odnosno koordinantne osi, te dobijemo točke $x' = (-x_1,x_2)$ i $x'' = (x_1,-x_2)$. Tada ćemo izrazom

$$\Phi(y-x') + \Phi(y-x'')$$

"poništiti" $\Phi(y-x)$ na koordinatnim osima, međutim ostaje problem relfeksije točke x' obzirom na x_1-os, odnosno x'' obzirom na x_2-os, gdje je zapravo riječ o istoj točki: $x''' = (-x_1,-x_2)$. Dakle, od gornjeg izraza moramo još oduzeti i $\Phi(y-x''')$ da bi dobili traženi korektor. Konačan izraz za Greenovu funkciju je tada

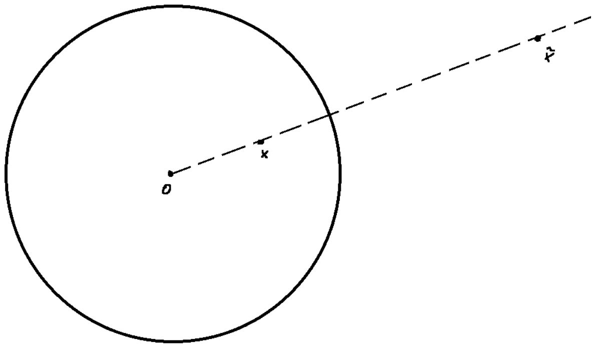
$$\begin{aligned}
G((x_1,x_2),(y_1,y_2)) =& \Phi(y-x) - \Phi(y-x') - \Phi(y-x'') + \Phi(y-x''') \\
=& -\frac{1}{4\pi} \ln\left[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right] \\
&+ \frac{1}{4\pi} \ln\left[(x_1+y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right] \\
&+ \frac{1}{4\pi} \ln\left[(x_1-y_1)^2 + (x_2+y_2)^2\right] \\
&- \frac{1}{4\pi} \ln\left[(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2\right].
\end{aligned}$$

∎

Napomena 5.5.5. *Cilj će nam, kao i u prethodnom primjeru, dobiti zatvoren sustav refleksija. Pritom, one točke koje su dobivene neparnim brojem refleksija dolaze s predznakom $+$ u korektoru (odnosno $-$ u konačnom izrazu za Greenovu funkciju), dok one s parnim brojem refleksija dolaze s predznakom $-$ (odnosno $+$ u Greenovoj funkciji).*

Zadatak 5.5.6. *Konstruirajte Greenovu funkciju za kuglu $K[0,R]$.*

Rješenje.



Kao i u slučaju $R=1$, radimo inverziju obzirom na sferu $S(0,R)$. Za točku $x \in K[0,R] \setminus \{0\}$ definiramo

$$\tilde{x} := R^2 \frac{x}{|x|^2}.$$

Definiramo korektor za $x \neq 0$

$$\phi^x(y) = \Phi\Big(\frac{|x|}{R}(y-\tilde{x})\Big),$$

odnosno

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi\Big(\frac{|x|}{R}(y-\tilde{x})\Big).$$

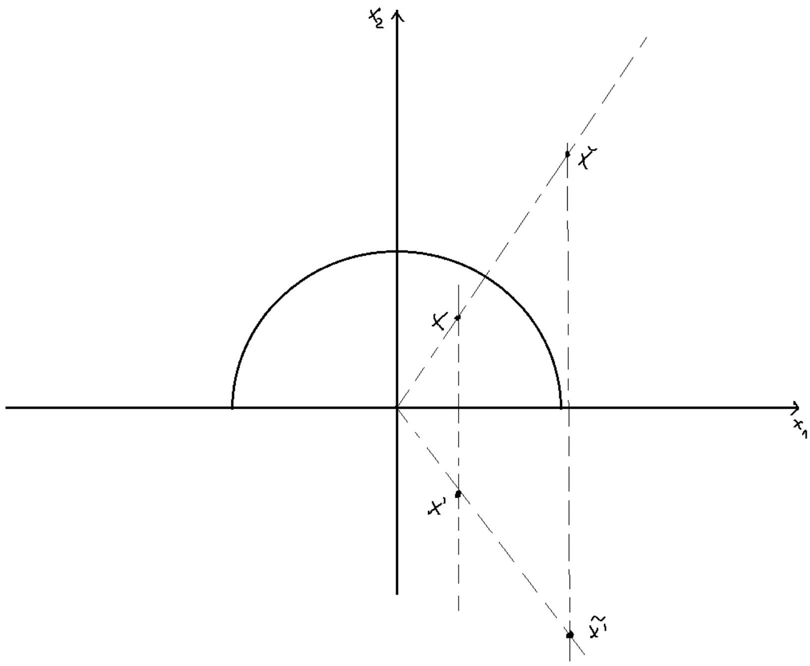
Primijetimo kako funkcija $G(x,y)$ ima singularitet u $x=0$, međutim taj singularitet je uklonjiv. Zaista, za $y \neq 0$ imamo

$$\lim_{x\to 0} \Phi\Big(\frac{|x|}{R}(y-\tilde{x})\Big) = \lim_{x\to 0} \Phi\Big(\frac{|x|y}{R} - \frac{Rx}{|x|}\Big).$$

Izraz $\frac{|x|y}{R}$ teži ka 0, dok se izraz $\frac{Rx}{|x|}$ uvijek nalazi na $S(0,R)$. Zbog radijalnosti funkcije Φ je tada gornji limes jednak $\Phi(R)$. ∎

Zadatak 5.5.7. *Konstruirajte Greenovu funkciju za polukuglu $\Omega = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 > 0\}$.*

Rješenje.



Prvo radimo refleksiju točke $x = (x_1, x_2)$ s obzirom na x_1-os, pa zatim i inverziju s obzirom na sferu $S(0,1)$ te dobivamo redom točke $x' = (x_1, -x_2)$ i $\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$. Sljedeće moramo napraviti refleksiju točke $\tilde{x}$ s obzirom na x_1-os te inverziju s obzirom na sferu točke x'. U oba slučaja dobijemo istu točku, $\tilde{x}' = \frac{x'}{|x|^2}$. Dakle, Greenova funkcija za polukuglu je dana s

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-x') - \Phi(|x|(y-\tilde{x})) + \Phi(|x|(y-\tilde{x}')).$$

■

Zadatak 5.5.8. *Izvedite formulu za rješenje rubne zadaće na prvom kvadrantu Ω:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & na\ \Omega, \\ u(\cdot,0) = f, & \\ u(0,\cdot) = 0, & \end{cases}$$

gdje je $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 0, & inače. \end{cases}$

Rješenje. Greenovu funkciju za prvi kvadrant smo već odredili te je ona dana s

$$\begin{aligned} G((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = &-\frac{1}{4\pi}\ln\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right] \\ &+\frac{1}{4\pi}\ln\left[(x_1+y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right] \\ &+\frac{1}{4\pi}\ln\left[(x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2\right] \\ &-\frac{1}{4\pi}\ln\left[(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2\right]. \end{aligned}$$

Rub skupa Ω nisu ništa drugo nego pozitivni dijelovi koordinatnih osi. Konačno, jedinična vanjska normala na x-os je dana s $(0-,1)$, dok nam za y-os neće biti ni potrebna zbog rubnih uvjeta. Posebno je

$$\begin{aligned} -\frac{\partial G((x_1,x_2),(y_1,0))}{\partial n_{(y_1,0)}} &= \frac{\partial G((x_1,x_2),(y_1,0))}{\partial y_2} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{x_2}{(x_1-y_1)^2+x_2^2} - \frac{1}{\pi}\frac{x_2}{(x_1+y_1)^2+x_2^2}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem svih podataka u formulu za rješenje dobivamo

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2) &= -\int_0^1 \frac{\partial G((x_1,x_2),(y_1,0))}{\partial n_{(y_1,0)}} y_1 dy_1 \\ &= \frac{x_2}{\pi}\int_0^1 \frac{y_1}{(x_1-y_1)^2+x_2^2}dy_1 - \frac{x_2}{\pi}\int_0^1 \frac{y_1}{(x_1+y_1)^2+x_2^2}dy_1 \end{aligned}$$

Računamo prvi integral u posljednjem izrazu:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{y_1}{(x_1-y_1)^2+x_2^2}dy_1 &= \int_0^1 \frac{y_1-x_1}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}dy_1 + x_1\int_0^1 \frac{1}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}dy_1 \\ &= \frac{1}{2}\ln\left[(y_1-x_1)^2+x_2^2\right]\Big|_0^1 + \frac{x_1}{x_2}\arctan\left(\frac{y_1-x_1}{x_2}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\ln\left[(1-x_1)^2+x_2^2\right] - \frac{1}{2}\ln\left(x_1^2+x_2^2\right) \\ &\quad -\frac{x_1}{x_2}\arctan\left(\frac{x_1-1}{x_2}\right) + \frac{x_1}{x_2}\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \end{aligned}$$

Analogno dobivamo i izraz za drugi integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{y_1}{(x_1+y_1)^2+x_2^2}dy_1 &= \frac{1}{2}\ln\left[(1+x_1)^2+x_2^2\right] - \frac{1}{2}\ln\left(x_1^2+x_2^2\right) \\ &\quad -\frac{x_1}{x_2}\arctan\left(\frac{x_1+1}{x_2}\right) + \frac{x_1}{x_2}\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \end{aligned}$$

Konačno, imamo

$$u(x_1,x_2) = \frac{x_2}{2\pi}\ln\frac{(x_1-1)^2+x_2^2}{(x_1+1)^2+x_2^2} - \frac{x_1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{x_1-1}{x_2}\right) - \arctan\left(\frac{x_1+1}{x_2}\right)\right).$$

■

Zadatak 5.5.9. *Neka je $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, te $f \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$. Pretpostavimo da za svaki $x \in \mathbb{R}^2$ postoje $\lambda(x) > 0$ i matrica rotacije (ortogonalna matrica s determinantom 1) $O(x)$ takvi da je $Df(x) = \lambda(x)O(x)$. Tada je $\Delta(u\circ f) = \lambda^2 \cdot (\Delta u)\circ f$.*

Zadatak 5.5.10. *Izvedite formulu za rješenje rubne zadaće*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{na } \Omega \\ u = g, & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

gdje je $\Omega = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 - x_1 > 0\}$ i $g(x_1,x_2) = \chi_{K(0,1)}(x_1,x_2)$.

Rješenje. Označimo s O matricu rotacije ravnine za kut $\frac{\pi}{4}$, te uvedimo funkciju $v(x) = u(Ox)$. Prema zadatku 3.1.4., v također zadovoljava Laplaceovu jednadžbu, dok početni uvjet, zbog invarijantnosti funkcije g na rotacije, ostaje isti. Dakle, transformirana zadaća je:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & \text{na } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \\ v(x_1,0) = \chi_{[-1,1]}(x_1), & \text{na } \mathbb{R}\times\{0\}. \end{cases}$$

Vanjska normala na rub je dana s $n(y_1,0) = (0,-1)$, pa nam je jedino potrebno izračunati $\frac{\partial G}{\partial y_2}$. Rješenje gornjeg problema je onda dano formulom

$$v(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial y_2}(x_1,x_2,y_1,0)\chi_{[-1,1]}(y_1)dy_1 = \int_{-1}^{1}\frac{\partial G}{\partial y_2}(x_1,x_2,y_1,0)dy_1$$

Greenova funkcija za gornju poluravninu je dana s

$$G(x_1,x_2,y_1,y_2) = -\frac{1}{4\pi}\left(\ln[(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2] - \ln[(y_1-x_1)^2+(y_2+x_2)^2]\right).$$

Deriviranjem po y_2 te uvrštavanjem $y_2 = 0$ dobivamo

$$\frac{\partial G}{\partial y_2}(x_1,x_2,y_1,0) = \frac{1}{\pi}\frac{x_2}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}.$$

Uvrštavanjem u formulu za rješenje slijedi

$$v(x_1,x_2) = \frac{x_2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dy_1}{(y_1-x_1)^2+x_2^2} = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{1-x_1}{x_2}\right) + \arctan\left(\frac{1+x_1}{x_2}\right)\right)$$

Preostaje još iskoristiti $u(x_1,x_2) = v(O^T(x_1,x_2)) = v\big(\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1-x_2,x_1+x_2)\big)$.

■

Poglavlje 6

Jednadžba provođenja

U ovom poglavlju promatramo **jednadžbu provođenja**

$$u_t - \Delta u = 0,$$

odnosno **nehomogenu jednadžbu provođenja**

$$u_t - \Delta u = f,$$

na skupu $\Omega \times \langle 0, \infty \rangle$, pri čemu je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren. Ovdje ćemo se uglavnom baviti slučajem $\Omega = \mathbb{R}^d$, odnosno traženjem funkcije $u : \mathbb{R}^d \times [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ koja rješava početnu zadaću

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{u } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ u = g, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}. \end{cases},$$

pri čemu su $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ unaprijed zadane funkcije.

Rješenje te početne zadaće je reprezentirano sljedećom formulom:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y,t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) dy ds,$$

gdje je $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ **elementarno rješenje jednadžbe provođenja** definirano s

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Napomena 6.1.1. *Za svaki $t > 0$ vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x,t) dx = 1.$$

Zadatak 6.1.2. *Pokažite da za sve $a,b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ vrijedi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos(bx)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Zadatak 6.1.3. *Odredite rješenje početne zadaće*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = e^t, & na\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x_1,x_2,0) = \cos x_1 \sin x_2. \end{cases}.$$

Rješenje. Koristimo formulu za rješenje:

$$u(x_1,x_2,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y,t)\cos y_1 \sin y_2\, dy_1 dy_2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y,t-s)e^s\, dy_1 dy_2 ds.$$

Računamo prvi integral u izrazu:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y,t)\cos y_1 \sin y_2\, dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{4t}}\cos y_1\, dy_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_2-y_2)^2}{4t}}\sin y_2\, dy_2 \\
&= I_1 \cdot I_2.
\end{aligned}$$

Izračunajmo sada I_1 zasebno:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{4t}}\cos y_1\, dy_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z_1^2}{4t}}\cos(z_1+x_1)\, dz_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z_1^2}{4t}}(\cos z_1 \cos x_1 - \sin z_1 \sin x_1)\, dz_1 \\
&= \cos x_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z_1^2}{4t}}\cos z_1\, dz_1 + \sin x_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z_1^2}{4t}}\sin z_1\, dz_1 \\
&= \sqrt{4\pi t}\cos x_1 e^{-t}.
\end{aligned}$$

Na isti način dođemo i do

$$I_2 = \sqrt{4\pi t}\sin x_2 e^{-t},$$

pa je prvi integral jednak

$$e^{-2t}\cos x_1 \sin x_2.$$

Sada računamo drugi integral u početnom izrazu:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y,t-s)e^s\, dy_1 dy_2 ds = \int_0^t e^s\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y,t-s)dy\Big)ds = \int_0^t e^s ds = e^t - 1.$$

Dakle, konačno rješenje je

$$u(x_1,x_2,t) = e^{-2t}\cos x_1 \sin x_2 + e^t - 1.$$

■

Primijetimo kako je rješenje homogenog dijela zadaće

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u(\cdot,0) = \cos x_1 \sin x_2 \end{cases}$$

dano s $e^{-2t}\cos x_1 \sin x_2 = e^{-2t}u(x_1,x_2,0)$. Pogledajmo stoga kako bismo mogli pokušati pogoditi ovo rješenje bez cijelog prijašnjeg računa. Za početak, lako se provjeri da su funkcije oblika

$$\cos\left(\sum_{k=1}^{d} \lambda_k x_k\right) \quad \text{i} \quad \sin\left(\sum_{k=1}^{d} \lambda_k x_k\right), \qquad \lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}$$

svojstveni vektori za $-\Delta$ pridruženi svojstvenoj vrijednosti $\sum_{k=1}^{d} \lambda_k^2$. Ukoliko je naš početni uvjet upravo funkcija takvog oblika, tada možemo pokušati tražiti rješenje homogene zadaće u obliku

$$u(x,t) = g(x)h(t) = u(x,0)h(t),$$

za neku nepoznatu funkciju $h = h(t)$ takvu da je $h(0) = 1$. Kada bi u ovakvog oblika zadovoljavala jednadžbu, tada bi moralo za sve $(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}$ biti

$$0 = g(x)h'(t) - h(t)\Delta g(x) = g(x)\left(h'(t) + \left(\sum_{k=1}^{d} \lambda_k^2\right)h(t)\right).$$

Stoga se problem svodi na rješavanje ODJ-a

$$\begin{cases} h'(t) = -\left(\sum_{k=1}^{d} \lambda_k^2\right)h(t) \\ h(0) = 1, \end{cases}$$

čije je rješenje $h(t) = e^{-(\sum_{k=1}^{d} \lambda_k^2)t}$. Konačno, lako se provjeri da je funkcija

$$u(x,t) = e^{-(\sum_{k=1}^{d} \lambda_k^2)t}u(x,0)$$

zaista traženo rješenje. U prethodnom zadatku početni uvjet nije već zapisan u traženom obliku, međutim to se lako postigne pomoću trigonometrijskih identiteta te imamo

$$\cos x_1 \sin x_2 = \frac{1}{2}(\sin(x_1+x_2) - \sin(x_1-x_2)).$$

Zadaću tada možemo zbog linearnosti rastaviti na dvije homogene s početnim uvjetima $\sin(x_1 \pm x_2)$, odakle je zbog prethodne diskusije i $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \pm 1$ traženi $h(t) = e^{-2t}$ (u oba slučaja).

Zadatak 6.1.4. *Izvedite eksplicitnu formulu za rješenje početne zadaće.*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f, & u\ \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ u = g, & na\ \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Rješenje. Uvedimo pomoćnu funkciju

$$v(x,t) = u(x,t)e^{ct}.$$

Vidimo da tada v zadovoljava jednadžbu

$$v_t - \Delta v = e^{ct}(u + cu - \Delta u) = e^{ct} f,$$

uz početne uvjete

$$v(x,0) = u(x,0).$$

Koristeći formulu za rješenje jednadžbe provođenja zaključujemo da je

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y,t)g(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y,t-s)e^{cs} f(y,s)dyds.$$

Konačno, imamo

$$u(x,t) = e^{-ct}v(x,t) = e^{-ct} \int_0^t \Phi(x,t-s)g(s)ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y,t-s)e^{c(s-t)} f(y,s)ds.$$

■

Napomena 6.1.5. *Izvedimo formulu za rješenje početne zadaće*

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

gdje je $k > 0$. Stavimo

$$v(x,t) = u(x,t/k).$$

Tada v zadovoljava jednadžbu

$$v_t - \Delta v = \frac{1}{k}u_t - \Delta u = \frac{1}{k}(u_t - k\Delta u) = 0,$$

uz početne uvjete

$$v(x,0) = u(x,0) = g(x).$$

Koristeći formulu za rješenje ovog problema dobivamo

$$u(x,t) = v(x,kt) = (4\pi kt)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{|x-y|^2}{4kt}} g(y)dy$$

Funkciju

$$\Phi_k(x,t) = (4\pi kt)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4kt}},$$

ćemo također zvati elementarno rješenje jednadžbe provođenja. Isto kao i ranije, za sve $t > 0$ *vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi_k(x,t)dx = 1.$$

Zadatak 6.1.6. *Izvedite eksplicitnu formulu za rješenje početne zadaće.*

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} + bu_x + cu = 0, & u \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u = g, & na \ \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

gdje su $k > 0$, b, c *konstante. Pokažite da u slučaju da je* $c > 0$ *i* $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ *vrijedi*

$$\lim_{t \to \infty} |u(x,t)| = 0.$$

Rješenje. Pretpostavimo da je u rješenje zadaće. Kao i u prethodnom zadatku, uvest ćemo pomoćnu funkciju oblika

$$v(x,t) = u(x,t)e^{\alpha x + \beta t},$$

pri čemu ćemo konstante α i β odrediti tako da nova funkcija zadovoljava jednadžbu provođenja. Za početak, dobivamo

$$v_t = e^{\alpha x + \beta t}(u_t + \beta u), \quad v_x = e^{\alpha x + \beta t}(u_x + \alpha u), \quad v_{xx} = e^{\alpha x + \beta t}(u_{xx} + 2\alpha u_x + \alpha^2 u),$$

pa vidimo da v zadovoljava

$$v_t - kv_{xx} = e^{\alpha x + \beta t}(u_t - ku_{xx} - 2k\alpha u_x + (\beta - k\alpha^2)u).$$

Konstante α i β sada odabiremo tako da vrijedi

$$2k\alpha = -b, \qquad \beta - k\alpha^2 = c,$$

odnosno

$$\alpha = -\frac{b}{2k}, \qquad \beta = \frac{b^2}{4k} + c.$$

Uz ovaj odabir, funkcija v će tada biti rješenje zadaće

$$\begin{cases} v_t - k\Delta v = 0, \\ v(x,0) = e^{-\frac{b}{2k}x} g(x) \end{cases}.$$

Stoga možemo koristiti formulu za rješenje izvedenu u napomeni prije zadatka, te dobivamo

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_k(x-y,t) e^{-\frac{b}{2k}y} g(y) dy,$$

odnosno, vraćanjem natrag na početnu funkciju u

$$u(x,t) = e^{\frac{b}{2k}x-(\frac{b^2}{4k}+c)t} \int_{\mathbb{R}} \Phi_k(x-y,t) e^{-\frac{b}{2k}y} g(y)dy.$$

Pokažimo još da je u slučaju $c > 0$ i $||g||_\infty < \infty$ za svaki x

$$\lim_{t\to\infty} |u(x,t)| = 0.$$

Ocjenjujemo redom:

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq e^{\frac{b}{2k}x-(\frac{b^2}{4k}+c)t} \int_{\mathbb{R}} \Phi_k(x-y,t) e^{-\frac{b}{2k}y} |g(y)|dy \\
&\leq e^{\frac{b}{2k}x-(\frac{b^2}{4k}+c)t} ||g||_\infty (4\pi kt)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} e^{-\frac{b}{2k}y} dy \\
&= ||g||_\infty e^{\frac{b}{2k}x-(\frac{b^2}{4k}+c)t} (4\pi kt)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-(x-bt))^2}{4kt}} \cdot e^{-\frac{b}{2k}x+\frac{b^2}{4k}t} dy \\
&\leq ||g||_\infty e^{-ct} (4\pi kt)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-(x-bt))^2}{4kt}} dy \\
&= Ce^{-ct}.
\end{aligned}$$

Kako je $c > 0$, gornji izraz puštanjem $t \to \infty$ teži ka 0. ■

Promotrimo sada iduću **početno-rubnu** zadaću

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{na } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = g, & x > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

gdje je g neka unaprijed zadana funkcija takva da je $g(0) = 0$ (kompatibilnost početnih i rubnih uvjeta). Rješavanju ovog problema ćemo pristupiti na idući način; pokušat ćemo ga proširiti do odgovarajuće početne zadaće (dakle, na cijelom prostoru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$) na kojem znamo formulu za rješenje, te "očitati" vrijednosti za nenegativne x. Prije nego nastavimo, pokažimo sljedeću tvrdnju.

Zadatak 6.1.7. *Pretpostavimo da je u rješenje početne zadaće*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = g(x), \end{cases}$$

najviše eksponencijalnog rasta gdje je g neparna funkcija. Tada je i $x \mapsto u(x,t)$ neparna funkcija za sve $t > 0$.

Rješenje. Stavimo $v(x,t) = u(-x,t)$. Zbog neparnosti funkcije g, funkcija v je tada rješenje sljedeće početne zadaće

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, \\ v(x,0) = -g(x). \end{cases}$$

Slijedi da je $w := u + v$ rješenje

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, \\ w(x,0) = 0, \end{cases}$$

pa je $w \equiv 0$, odnosno

$$u(x,t) = -v(x,t) = -u(-x,t).$$

■

Vratimo se sada na našu početno-rubnu zadaću. S obzirom da za neparnu funkciju f vrijedi $f(0) = 0$, te uzevši u obzir prethodni zadatak, prirodno je naš problem proširiti na cijeli prostor proširenjem po neparnosti. Tada je uvjet $u(0,t) = 0$ automatski zadovoljen za sve $t > 0$, te nam preostaje samo riješiti odgovarajuću početnu zadaću. Preciznije, neka je $\tilde{u}$ proširenje funkcije u, a $\tilde{g}$ funkcije g po neparnosti, tj.

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & x > 0 \\ -u(-x,t), & x < 0 \end{cases}, \qquad \tilde{g}(x,t) = \begin{cases} g(x,t), & x > 0 \\ -g(-x,t), & x < 0. \end{cases}$$

Tada $\tilde{v}$ rješava početnu zadaću

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{g}, & \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Koristeći formulu za rješenje jednadžbe provođenja na cijelom prostoru dobivamo

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t)\tilde{g}(y)dy \\ &= -\int_{-\infty}^{0} \Phi(x-y,t)g(-y)dy + \int_{0}^{\infty} \Phi(x-y,t)g(y)dy \\ &= \int_{0}^{\infty} \Big(\Phi(x-y,t) + \Phi(x+y,t)\Big)g(y)dy \end{aligned}$$

Zadatak 6.1.8. *Neka je $g \in C^1(\mathbb{R})$ takva da je $g(0) = 0$. Zadana je početno-rubna zadaća*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & u\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0, & na\ \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ u = g, & na\ \{x = 0\} \times [0, \infty\rangle. \end{cases}$$

Izvedite iduću formulu za rješenje te zadaće:

$$u(x,t)=\frac{x}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}g(s)ds.$$

Rješenje. Pretpostavimo da je u rješenje početno-rubne zadaće. Stavimo

$$v(x,t)=u(x,t)-g(t)$$

te proširimo funkciju v po neparnosti po prostornoj varijabli

$$\tilde{v}(x,t)=\begin{cases} u(x,t)-g(t), & x\geq 0,\\ -u(-x,t)+g(t), & x<0.\end{cases}$$

Tada funkcija $\tilde{v}$ rješava sljedeću početnu zadaću

$$\begin{cases} \tilde{v}_t-\tilde{v}_{xx}=\begin{cases} -g'(t), & x>0,\\ g'(t), & x<0.\end{cases} \\ \tilde{v}(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Koristeći formulu za rješenje početne zadaće, zaključujemo kako je

$$\tilde{v}(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^0 \Phi(x-y,t-s)g'(s)dyds-\int_0^t\int_0^\infty \Phi(x-y,t-s)g'(s)dyds,$$

što zapisujemo kao

$$\int_0^t\int_{-\infty}^\infty \Phi(x-y,t-s)g'(s)dyds-2\int_0^t\int_0^\infty \Phi(x-y,t-s)g'(s)dyds.$$

Prvi integral je jednak $g(t)$, dok za računanje drugog integrala uvodimo

$$h(s)=\int_0^\infty \Phi(x-y,t-s)dy.$$

Tada je drugi integral jednak

$$-2\int_0^t g'(s)h(s)ds.$$

Uvođenjem zamjene varijabli $z=\frac{y-x}{\sqrt{4(t-s)}}$ dobivamo

$$h(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{4(t-s)}}}^\infty e^{-z^2}dz,$$

odnosno

$$h'(s) = \frac{x}{4\sqrt{\pi}(t-s)^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}.$$

Parcijalnom integracijom sada dobivamo

$$-2\int_0^t g'(s)h(s)ds = -2g(s)h(s)\Big|_0^t + 2\int_0^t g(s)h'(s)ds = -2g(t) + \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi}(t-s)^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} g(s)ds.$$

Dakle, funkcija $\tilde{v}$ je dana s

$$\tilde{v}(x,t) = -g(t) + \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi}(t-s)^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} g(s)ds.$$

S obzirom da nas zanima formula za u u slučaju $x \geq 0$, vraćamo se natrag u izraz $u(x,t) = v(x,t) + g(t)$ te dobivamo traženu formulu. ■

Promotrimo sada iduću početno-rubnu zadaću.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{na } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = g, & x > 0 \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

Kao i u prethodnim primjerima, ideja je proširiti problem na cijeli prostor odgovarajućom refleksijom te primijeniti rezultat rješenja na novonastali problem. Za razliku od prethodnog slučaja, ovdje je zadan uvjet na prostornu derivaciju u točkama na t-osi. Potrebna nam je odgovarajuća refleksija koja će automatski zadovoljiti taj uvjet. Prvo primijetimo kako je derivacija parne funkcije neparna; zaista, iz $u(x) = u(-x)$ deriviranjem slijedi $u'(x) = -u'(-x)$). Stoga nam je prirodno proširenje u ovom slučaju ono po parnosti. Stoga stavimo

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & x > 0 \\ u(-x,t), & x < 0 \end{cases}, \qquad \tilde{g}(x,t) = \begin{cases} g(x,t), & x > 0 \\ g(-x,t), & x < 0. \end{cases}$$

Tada $\tilde{u}$ rješava početnu zadaću

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta\tilde{u} = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{g}, & \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Koristeći formulu za rješenje dobivamo

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t)\tilde{g}(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \Phi(x-y,t)g(-y)dy + \int_0^\infty \Phi(x-y,t)g(y)dy \\ &= \int_0^\infty \Big(\Phi(x-y,t) - \Phi(x+y,t)\Big)g(y)dy \end{aligned}$$

Zadatak 6.1.9. *(alternativni dokaz principa maksimuma)*
Pretpostavimo da je $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ *rješenje jednadžbe provođenja. Tada vrijedi*

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Uputa: *Promotrite familiju funkcija* $u_\varepsilon = u - \varepsilon t$.

Poglavlje 7

Valna jednadžba

U posljednjem poglavlju bavimo se **valnom jednadžbom**,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{u } \mathbb{R}^d \times \langle 0, \infty \rangle, \\ u(\cdot, 0) = g, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \\ u_t(\cdot, 0) = h, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

gdje su g, h unaprijed zadane funkcije, a u traženo rješenje.

Formula za reprezentaciju rješenja postoji, međutim, ona ovisi o dimenziji prostora. Navest ćemo u nastavku samo pripadne formule za dimenzije $d = 1, 2, 3$.

$\boxed{d=1}$ **D'Alembertova formula:**

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy$$

$\boxed{d=2}$ **Poissonova formula:**

$$u(x,t) = \frac{1}{2} ⨍_{K(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t\nabla g(y) \cdot (y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy$$

$\boxed{d=3}$ **Kirchhoffova formula:**

$$u(x,t) = ⨍_{S(x,t)} th(y) + g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x)\, dS(y)$$

Nehomogenu jednadžbu rješavamo pomoću **Duhamelovog principa**; za zadaću

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \text{u } \mathbb{R}^d \times \langle 0, \infty \rangle, \\ u(\cdot, 0) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \\ u_t(\cdot, 0) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

rješenje je dano s

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t-s;s)ds,$$

pri čemu je $v(\cdot,\cdot;s)$ rješenje zadaće

$$\begin{cases} v_{tt}(\cdot,\cdot;s) - \Delta v(\cdot,\cdot;s) = 0, & \text{u } \mathbb{R}^d \times \langle 0,\infty\rangle, \\ v(\cdot,0;s) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t=0\}, \\ u_t(\cdot,0;s) = f(\cdot,s), & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t=0\}. \end{cases}$$

Primjer 7.1.1. *Kako bismo malo pojasnili kako izgleda primjena Duhamelovog načela, izvedimo formulu za rješenje valne jednadžbe u jednoj dimenziji*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f, \\ u(\cdot,0) = 0, \\ u_t(\cdot,0) = 0. \end{cases}$$

Prvo riješimo pomoćni problem ovisno o parametru s,

$$\begin{cases} v_{tt}(\cdot,\cdot;s) - v_{xx}(\cdot,\cdot;s) = 0, \\ v(\cdot,0;s) = 0, \\ v_t(\cdot,0;s) = f(\cdot,s). \end{cases}$$

Prema D'Alembertovoj formuli, rješenje je dano s

$$v(x,t;s) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f(y,s)dy.$$

Sada je rješenje originalne zadaće dano s

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t v(x,t-s;s)ds \\ &= \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y,s)ds \\ &= \int_0^t \int_{x-t}^{x+t} f(y,t-s)ds. \end{aligned}$$

Ukoliko imamo početnu zadaću

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \text{u } \mathbb{R}^d \times \langle 0,\infty\rangle, \\ u(\cdot,0) = g, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t=0\}, \\ u_t(\cdot,0) = h, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t=0\}, \end{cases}$$

tada ju rješavamo rastavljanjem na dva dijela:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \text{u } \mathbb{R}^d \times \langle 0, \infty \rangle, \\ u(\cdot, 0) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, , \\ u_t(\cdot, 0) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{u } \mathbb{R}^d \times \langle 0, \infty \rangle, \\ u(\cdot, 0) = g, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \\ u_t(\cdot, 0) = h, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Zatim pronađemo rješenje svake od ovih dviju zadaća, te konačno rješenje dobivamo njihovim zbrajanjem.

Zadatak 7.1.2. *Riješite Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 2, & u\ \mathbb{R}^2 \times \langle 0, \infty \rangle, \\ u(x_1, x_2, 0) = x_1, & na\ \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}, \\ u_t(x_1, x_2, 0) = x_2, & na\ \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Rješenje. Rješavamo prvo pripadni homogeni dio:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{u } \mathbb{R}^2 \times \langle 0, \infty \rangle, \\ u(x_1, x_2, 0) = x_1, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}, \\ u_t(x_1, x_2, 0) = x_2, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Prema Poissononvoj formuli rješenje ove zadaće je dano s

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{K(x,t)} \frac{ty_1 + t^2 y_2 + t(y_1 - x_1)}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy.$$

Prelazimo na polarne koordinate

$$y_1 = x_1 + r\cos\varphi, \quad y_2 = x_2 + r\sin\varphi, \quad |J| = r,$$

pa integral postaje

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi t^2} \int_0^t \int_0^{2\pi} r \frac{tr\cos\varphi + tx_1 + t^2 r\sin\varphi + t^2 x_2 + tr\cos\varphi}{(t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} d\varphi dr \\ &= \frac{1}{2\pi t^2} \int_0^t \frac{tr}{(t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi} (2r\cos\varphi + tr\sin\varphi + x_1 + tx_2) d\varphi dr \\ &= \frac{1}{2\pi t} \int_0^t \frac{r}{(t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} 2\pi (x_1 + tx_2) dr \\ &= \frac{x_1 + tx_2}{t} \int_0^t \frac{r}{(t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} dr \\ &= x_1 + tx_2 \end{aligned}$$

Preostaje još riješiti i drugi dio zadaće. Za rješavanje tog problema potrebno nam je riješiti sljedeću zadaću:

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0, & \text{u } \mathbb{R}^2 \times \langle 0, \infty \rangle, \\ v(x_1, x_2, 0) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}, \\ v_t(x_1, x_2, 0) = 2, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

■

Ponovno koristimo Poissonovu formulu za rješenje; ono je dano s

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2\pi t^2} \int_{K(x,t)} \frac{2t^2}{(t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{K(0,t)} \frac{dz}{(t^2 - |z|^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{r}{(t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} d\varphi dr \\ &= 2t \end{aligned}$$

Stoga je rješenje nehomogenog dijela jednadžbe dano s

$$\int_0^t v(x, t-s; s) ds = \int_0^t 2(t-s) = t^2.$$

Konačno, rješenje početne zadaće je

$$u(x,t) = x_1 + t x_2 + t^2.$$

Zadatak 7.1.3. *Neka je u rješenje zadaće*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \textit{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u = g, & \textit{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ u_t = h, & \textit{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

pri čemu su $g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Definiramo kinetičku energiju s

$$k(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t^2(x,t) dx$$

te potencijalnu energiju s

$$p(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t) dx.$$

Dokažite:

a) $k(t)+p(t)$ *je konstantno,*

b) *postoji* $t_0>0$ *takav da je* $k(t)=p(t)$ *za* $t>t_0$.

Rješenje. a) Prema D'Alembertovoj formuli, rješenje u je dano s

$$u(x,t)=\frac{g(x+t)+g(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}h(y)dy.$$

Primijetimo prvo kako za fiksni $t>0$ funkcija $x\mapsto u(x,t)$ ima kompaktan nosač. To slijedi direktno iz gornje formule; za dovoljno velike x je $[x-t,x+t]\cap(\text{supp } g\cup\text{supp } h))=\emptyset$. Zbog ovoga i funkcije $x\mapsto u_t(x,t)$ i $x\mapsto u_x(x,t)$ također imaju kompaktan nosač. Posebno, opravdano je deriviranje pod integralom i parcijalna integracija nema rubni član pa imamo:

$$(k+p)'(t)=\int_{\mathbb{R}}u_tu_{tt}dx+\int_{\mathbb{R}}u_xu_{xt}dx\overset{\text{P.I.}}{=}\int_{\mathbb{R}}u_t(u_{tt}-u_{xx})dx=0.$$

b) Koristimo ponovno D'Alembertovu formulu. Deriviranjem po x, odnosno po t, dobijemo sljedeće izraze:

$$u_x(x,t)=\frac{1}{2}[g'(x+t)+g'(x-t)]+\frac{1}{2}[h(x+t)-h(x-t)],$$

$$u_t(x,t)=\frac{1}{2}[g'(x+t)-g'(x-t)]+\frac{1}{2}[h(x+t)+h(x-t)].$$

Računamo:

$$\begin{aligned}p(t)-k(t)&=\int_{\mathbb{R}}(u_x^2-u_t^2)dx=\int_{\mathbb{R}}(u_x-u_t)(u_x+u_t)dx\\&=\int_{\mathbb{R}}[g'(x-t)-h(x-t)][g'(x+t)+h(x+t)]dx.\end{aligned}$$

Ponovno, zbog kompaktnosti nosača od g i h, za dovoljno veliki t je za svaki x jedna od točaka $x-t$ i $x+t$ izvan nosača i od g i od h, pa je za takve t uvijek jedan od faktora jednak 0; preciznije, dovoljno je uzeti $a>0$ takav da je $(\text{supp } g\cup\text{supp } h))\subseteq[-a,a]$, te staviti $t_0=3a$. Za $t>t_0$ tada vrijedi $k(t)=p(t)$.

■