1. (2+3) Neka je $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$, te $f = (f_1, \ldots, f_d) \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$.

   a) Pokažite sljedeći identitet
   $$\Delta(u \circ f) = ((Df)^T Df) : D^2 u + Du \cdot \Delta f,$$
   pri čemu je $\Delta f = (\Delta f_1, \ldots, \Delta f_d)$, $:$ označava standardni skalarni produkt matrica, a $\cdot$ standardni skalarni produkt vektora.

   b) Neka je sada $d = 2$ i u rješenje Laplaceove jednadžbe. Pretpostavimo da za svaki $x \in \mathbb{R}^2$ postoje $\lambda(x) > 0$ i ortogonalna matrica s determinantom jednakom 1, $O(x)$, takvi da je $Df(x) = \lambda(x)O(x)$. Pokažite da je tada $\Delta(u \circ f) = 0$.

2. (3) Pokažite da za $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ vrijedi
   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$
   Uputa: Pokažite da funkcija
   $$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos(tbx) dx$$
   zadovoljava diferencijalnu jednadžbu
   $$I' = -\frac{b^2}{2a} t I.$$

3. (3) Pretpostavimo da je u glatka funkcija koja zadovoljava $u_t - u_{xx} = 0$ na $\mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle$.

   a) Pokažite da je funkcija $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ također rješenje jednadžbe provođenja za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$.

   b) Koristeći a) pokažite da je tada i funkcija
   $$v(x,t) := x u_x(x,t) + 2t u_t(x,t)$$
   također rješenje jednadžbe provođenja.

4. (4) Pokažite da postoji konstanta $C > 0$ za koju rješenje valne jednadžbe
   $$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = g, \\ u_t(\cdot, 0) = h, \end{cases}$$
   zadovoljava
   $$(\forall t > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^3) \qquad |u(x,t)| \leq \frac{C}{t},$$
   pri čemu su $g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$.