

Parcijalne diferencijalne jednačbe 1

Prvi ispitni rok - 4. veljače 2026.

1. (8 bodova) Dana je zadaća

$$\begin{cases} xu_x + (1+y)u_y = x+y, \\ u(x, x^2 - \alpha) = x^2 + x \end{cases}$$

- (a) U ovisnosti u $\alpha \in \mathbb{R}$ odredite sve karakteristične točke danog vektorskog polja a na početnoj krivlji.
- (b) Riješite zadaću na desnoj poluravnini za one α za koje karakterističnih točaka nema.
2. (a) (4 boda) Neka je $A \in M_d$ pozitivno definitna matrica, te neka $u \in C^2(\overline{K(0,1)})$ zadovoljava

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = 0 \quad \text{na } K(0,1).$$

Pokažite da vrijedi

$$\max_{\overline{K(0,1)}} u = \max_{S(0,1)} u.$$

- (b) (4 boda) Zapišite eksplicitno formulu za Greenovu funkciju za područje $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 > 0, x_1 - x_2 < 0\}$
3. (5 bodova) Riješite početno-rubnu zadaću na $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = \sin x + x, \\ u(0, t) = 0. \end{cases}$$

4. (a) (4 boda) Riješite početnu zadaću

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = x_1 e^t, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = x_1^2 - x_2^2, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \\ u_t(x_1, x_2, x_3, 0) = x_1 x_3, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

- (b) (5 bodova) Neka je u rješenje zadatice

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) = g, u_t(\cdot, 0) = h, & \text{na } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

gdje je $c \in \mathbb{R}$ te $g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ takve da je $\operatorname{supp} g, \operatorname{supp} h \subseteq K(0, R)$. Izvedite formulu za rješenje te zadatice te pokažite (bez pozivanja na isti rezultat s predavanja) da je $u(x, t) = 0$ za sve $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ takve da je $|x| > R + ct$.