JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

drugi kolokvij — 7. siječnja 2013.

Zadatak 1. *(ukupno 6 bodova)*

(a) *(4 boda)* Neka je $a > 1$. Izračunajte limes

$$\lim_n \frac{n}{a^{n+1}} \left(a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n} \right).$$

(b) *(2 boda)* Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju: Ako je (a_n) niz realnih brojeva takav da za svaki niz realnih brojeva (b_n) vrijedi

$$\liminf_n (a_n + b_n) = \liminf_n a_n + \liminf_n b_n,$$

tada je niz (a_n) konvergentan.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

drugi kolokvij — 7. siječnja 2013.

Zadatak 2. *(ukupno 6 bodova)*

Niz (b_n) je zadan rekurzivno

$$b_1 = \frac{1}{3}, \quad 3b_{n+1} = b_1 b_2 \cdots b_n + 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

(a) *(2 boda)* Dokažite da je $b_n < 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(b) *(4 boda)* Dokažite da je niz (b_n) konvergentan i odredite mu limes.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

drugi kolokvij — 7. siječnja 2013.

Zadatak 3. *(6 bodova)* Odredite, ako postoje, infimum i supremum skupa

$$A = \{\pi + \operatorname{arctg} x : x > 0\} \cup \left\{ \frac{2m^2 + m}{m^2 + 1} \cdot \frac{6n + 1}{1 - 3n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

drugi kolokvij — 7. siječnja 2013.

Zadatak 4. *(ukupno 7 bodova)* Izračunajte limese bez upotrebe L'Hôpitalovog pravila.

(a) *(4 boda)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\sin x}\operatorname{ch} x - 1}{\sqrt[3]{x\,(\operatorname{ch} x - \cos x)}}$

(b) *(3 boda)* $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x}$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

drugi kolokvij — 7. siječnja 2013.

Zadatak 1. *(ukupno 6 bodova)*

(a) *(4 boda)* Neka je $a > 1$. Izračunajte limes

$$\lim_n \frac{1 + a + 2a^2 + \cdots + na^n}{na^{n+1}}.$$

(b) *(2 boda)* Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju: Ako je (a_n) niz pozitivnih realnih brojeva takav da vrijedi

$$\limsup_n a_n \cdot \limsup_n \frac{1}{a_n} = 1,$$

tada je niz (a_n) konvergentan.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

drugi kolokvij — 7. siječnja 2013.

Zadatak 2. *(ukupno 6 bodova)*

Niz (a_n) je zadan rekurzivno

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad 2a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n + 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

(a) *(2 boda)* Dokažite da je $a_n < 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(b) *(4 boda)* Dokažite da je niz (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

drugi kolokvij — 7. siječnja 2013.

Zadatak 3. *(6 bodova)* Odredite, ako postoje, infimum i supremum skupa

$$B = \left\{ \frac{n^2+1}{2n^2+n} \cdot \frac{4m+7}{1-2m} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{ -\frac{3\pi}{2} + \operatorname{arcctg} x : x < 0 \}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

drugi kolokvij — 7. siječnja 2013.

Zadatak 4. *(ukupno 7 bodova)* Izračunajte limese bez upotrebe L'Hôpitalovog pravila.

(a) *(4 boda)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x\,(\operatorname{ch} x - \cos x)}}{e^{3\sin x} - e^{\operatorname{tg} x}}$

(b) *(3 boda)* $\displaystyle\lim_{x\to -1} \sqrt[x+1]{-\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x}$