MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 16. studenog 2015.

Zadatak 1. (6 bodova) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \arcsin \sqrt{\log_6(x^2 - 4x + 1)} + \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \pi x}{\cos \pi x}}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 16. studenog 2015.

Zadatak 2. (7 bodova) Funkcija f zadana je na svojoj prirodnoj domeni formulom

$$f(x) = \operatorname{ctg}\left(\pi\frac{3^{x+1}+1}{3^x+1}\right).$$

Odredite $\mathcal{R}_f$ i prasliku skupa $\langle\frac{\sqrt{3}}{3},1\rangle$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3^x \\ f_2(x) &= \frac{3x+1}{x+1} = 3 - \frac{2}{x+1} \\ f_3(x) &= \operatorname{ctg}(\pi x), \quad f = f_3 \circ f_2 \circ f_1. \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_f = f_3(f_2(f_1(\mathbb{R}))) = f_3(f_2(\langle 0,\infty\rangle)) = f_3(\langle 1,3\rangle) = \operatorname{ctg}(\langle \pi, 3\pi\rangle) = \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\langle\sqrt{3}/3,1\rangle) &= f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(\langle\sqrt{3}/3,1\rangle))) = f_1^{-1}\left(f_2^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle\frac{1}{4}+k, \frac{1}{3}+k\right\rangle\right)\right) \\ &= f_1^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle\frac{4k-3}{11-4k}, \frac{3k-2}{8-3k}\right\rangle\right) \\ &= \text{(uocimo da u slici od } f_1 \text{ mogu biti samo pozitivni intervali, dakle } k=1,2) \\ &= f_1^{-1}\left(\left\langle\frac{1}{7},\frac{1}{5}\right\rangle \bigcup \left\langle\frac{5}{3},\frac{4}{2}\right\rangle\right) = \left\langle\log_3\frac{1}{7}, \log_3\frac{1}{5}\right\rangle \bigcup \left\langle\log_3\frac{5}{3}, \log_3 2\right\rangle. \end{aligned}$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 16. studenog 2015.

Zadatak 3. (6 bodova) Neka je $f : [0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + 2^{\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor} |\cos x|}$.

(a) Odredite $\mathcal{R}_f$.

(b) Neka je $f_1 = f \circ f$. Je li f_1 bijekcija? Ako jest, odredite joj inverz.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 16. studenog 2015.

Zadatak 4. (6 bodova) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo rastuća funkcija koja zadovoljava

$$f\Big(\frac{x+f(x)}{2}\Big) = x,$$

za sve $x \in \mathbb{R}$. Dokažite da je $f(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Pretpostavimo da za neki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x) \neq x$. Tada je ili $f(x) > x$ ili $f(x) < x$. U prvom slučaju je $\frac{f(x)+x}{2} > x$, a budući da je funkcija strogo rastuća, slijedi $f(\frac{f(x)+x}{2}) > f(x) > x$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Analogno za $f(x) < x$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 16. studenog 2015.

Zadatak 1. (6 bodova) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \arccos \sqrt{\log_7(2x^2 - 8x + 7)} + \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \pi x}{\sin \pi x}}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA IME I PREZIME BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 16. studenog 2015.

Zadatak 2. (7 bodova) Funkcija f zadana je na svojoj prirodnoj domeni formulom

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\pi\frac{1+2^{x+1}}{1+2^x}\right).$$

Odredite $\mathcal{R}_f$ i prasliku skupa $\langle\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\rangle$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2^x \\ f_2(x) &= \frac{1+2x}{1+x} = 2 - \frac{1}{1+x} \\ f_3(x) &= \operatorname{tg}(\pi x), \quad f = f_3 \circ f_2 \circ f_1. \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_f = f_3(f_2(f_1(\mathbb{R}))) = f_3(f_2(\langle 0, \infty\rangle)) = f_3(\langle 1, 2\rangle) = \operatorname{tg}(\langle \pi, 2\pi\rangle) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\langle\sqrt{3}/3, 1\rangle) &= f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(\langle\sqrt{3}/3, 1\rangle))) = f_1^{-1}\left(f_2^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle\frac{1}{6}+k, \frac{1}{4}+k\right\rangle\right)\right) \\ &= f_1^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle\frac{6k-5}{11-6k}, \frac{4k-3}{7-4k}\right\rangle\right) \\ &= (\text{uocimo da u slici od } f_1 \text{ mogu biti samo pozitivni intervali, dakle } k=1) \\ &= f_1^{-1}\left(\left\langle\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right\rangle\right) = \left\langle\log_2\frac{1}{5}, \log_2\frac{1}{3}\right\rangle. \end{aligned}$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 16. studenog 2015.

Zadatak 3. (6 bodova) Neka je $f : [0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + 3^{\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor}|\sin x|}$.

(a) Odredite $\mathcal{R}_f$.

(b) Neka je $f_1 = f \circ f$. Je li f_1 bijekcija? Ako jest, odredite joj inverz.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 16. studenog 2015.

Zadatak 4. (6 bodova) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo padajuća funkcija koja zadovoljava

$$f\Big(\frac{x - f(x)}{2}\Big) = -x,$$

za sve $x \in \mathbb{R}$. Dokažite da je $f(x) = -x$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Pretpostavimo da za neki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x) \neq -x$. Tada je ili $f(x) > -x$ ili $f(x) < -x$. U prvom slučaju je $\frac{x-f(x)}{2} < x$, a budući da je funkcija strogo padajuća, slijedi $f(\frac{x-f(x)}{2}) > f(x) > -x$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Analogno za $f(x) < -x$.