MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 28. siječnja 2019.

Zadatak 1. (6 bodova) Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan je rekurzivnom formulom

$$a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n}, \quad a_1 = 0.$$

Dokažite da je konvergentan i odredite mu limes.

Rješenje. Dokažimo matematičkom indukcijom da niz (a_n) raste.
Baza: kako je $a_2 = 2$, očito vrijedi $a_2 > a_1$. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n > a_{n-1}$.
Tada imamo

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = \sqrt{4+3a_n} - \sqrt{4+3a_{n-1}} &= \left(\sqrt{4+3a_n} - \sqrt{4+3a_{n-1}}\right) \cdot \frac{\sqrt{4+3a_n} + \sqrt{4+3a_{n-1}}}{\sqrt{4+3a_n} + \sqrt{4+3a_{n-1}}} \\ &= \frac{(4+3a_n) - (4+3a_{n-1})}{\sqrt{4+3a_n} + \sqrt{4+3a_{n-1}}} \\ &= 3 \cdot \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{4+3a_n} + \sqrt{4+3a_{n-1}}} \end{aligned}$$

Nazivnik u posljednjem izrazu je očito pozitivan, a brojnik je pozitivan po induktivnoj pretpostavci. Odavde zaključujemo da vrijedi $a_{n+1} - a_n > 0$, to jest $a_{n+1} > a_n$. Time je induktivni korak završen; pokazali smo da niz raste.
Potrebno je dokazati i ograničenost niza. Dokazat ćemo (ponovno indukcijom) da vrijedi $a_n < 4, \forall n \in \mathbb{N}$. Tvrdnja u bazi indukcije je očita. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n < 4$. Tada imamo

$$a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n} < \sqrt{4+3\cdot 4} = \sqrt{16} = 4.$$

Time je induktivni korak završen; dokazali smo da je niz odozgo omeđen s 4.

Budući da je niz rastući i ograničen, zaključujemo da je konvergentan. Neka je $L = \lim_n a_n$. Tada imamo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{4+3a_n} \quad / \quad \lim_n \\ L &= \sqrt{4+3L} \\ L^2 &= 4+3L. \end{aligned}$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe $L^2 - 3L - 4 = 0$ dolazimo do rješenja $L_1 = -1$ i $L_2 = 4$. Kako su svi članovi niza pozitivni, zaključujemo da -1 ne može biti limes. Zbog toga je $\lim_n a_n = L_2 = 4$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 28. siječnja 2019.

Zadatak 2.

(a) (4 boda) Odredite limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n + \sum_{k=1}^{n}(1+\sin(\frac{1}{k}))^{\pi}}{\ln n}.$$

(b) (3 boda) Neka je $(a_n)_n$ odozgo ograničen niz takav da je

$$a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da je niz $(a_n)_n$ konvergentan.

Rješenje.

(a) Neka je $a_n = -n + \sum_{k=1}^{n}(1+\sin(\frac{1}{k}))^{\pi}$ i $b_n = \ln n$. Budući da je niz (b_n) neograničen i strogo rastući, po Stolzovom teoremu dovoljno je odrediti limes $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, a za njega imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\sin(\frac{1}{n+1}))^{\pi} - 1}{\ln(n+1) - \ln n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\pi \ln(1+\sin(\frac{1}{n+1}))} - 1}{\ln(1+\frac{1}{n})} \\
&= \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{\pi \ln(1+\sin(\frac{1}{n+1}))} - 1}{\pi \ln(1+\sin(\frac{1}{n+1}))} \cdot \frac{\ln(1+\sin(\frac{1}{n+1}))}{\sin(\frac{1}{n+1})} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})} \cdot \frac{n}{n+1} \right) \\
&= \pi \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \\
&= \pi,
\end{aligned}$$

pri čemu pretposljednju jednakost dobivamo koristeći dobro poznate limese i odgovarajuće supstitucije koje teže u 0.

(b) Uočimo da, zbog danog uvjeta, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi i

$$a_{n+1} - \frac{1}{2^n} \geq a_n - \frac{1}{2^{n-1}},$$

odakle slijedi da je niz $\left(a_n - \frac{1}{2^{n-1}}\right)_n$ rastući. Nadalje, uočimo da je gornja međa niza $(a_n)_n$ ujedno i gornja međa niza $\left(a_n - \frac{1}{2^{n-1}}\right)_n$.

Iz zaključka da je niz $\left(a_n - \frac{1}{2^{n-1}}\right)_n$ rastući i odozgo ograničen slijedi da je i konvergentan, a budući da je i niz $(\frac{1}{2^{n-1}})_n$ konvergentan, slijedi da je konvergentan i niz dobiven njihovom sumom, odnosno $(a_n)_n$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 28. siječnja 2019.

Zadatak 3. (6 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{n^2+1}{2n^2+n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rješenje. Neka je, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{n^2+1}{2n^2+n}$, tada je

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n^2-3n-3}{n(n+1)(2n+1)(2n+3)},$$

odnosno $a_{n+1} > a_n$ ako i samo ako je $n^2 - 3n - 3 > 0$, što vrijedi ako i samo ako je $n \geq 4$. Dakle, za niz (a_n) vrijedi

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < \dots$$

Primijetimo da je

$$a_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} a_n, & \text{ako je } n \equiv 1 \pmod 4, \\ -a_n, & \text{ako je } n \equiv 3 \pmod 4, \\ 0, & \text{ako je } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Nadalje, vrijedi da je

$$a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{10}{21} \quad \text{i} \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

Kako je $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ zaključujemo da je

$$\sup S = \max S = a_1 = \frac{2}{3}.$$

Konačno, kako je $\frac{10}{21} < \frac{1}{2}$ i

$$\lim_{k \to +\infty} a_{4k+3} = \lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{2},$$

zaključujemo da je

$$\inf S = -\frac{1}{2}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 28. siječnja 2019.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Neka je zadana omeđena funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Postoji li

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\sin(f(x)+1)}{x^2+1}?$$

U slučaju potvrdnog odgovora, izračunajte taj limes.

(b) (4 boda) Odredite limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(\ln(1+\sin(\pi x)))}{x}.$$

Rješenje.

(a) Neka je $M > 0$ takav da vrijedi $|f(x)| \le M$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$0 \le \left| \frac{f(x)\sin(f(x)+1)}{x^2+1} \right| \le \frac{M}{x^2+1}, \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Kako je $\lim_{x\to+\infty} \frac{M}{x^2+1} = 0$, po teoremu o sendviču zaključujemo da postoji $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\sin(f(x)+1)}{x^2+1}$ i vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\sin(f(x)+1)}{x^2+1} = 0.$$

(b) Vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(\ln(1+\sin(\pi x)))}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos(\ln(1+\sin(\pi x)))}{x} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos(\ln(1+\sin(\pi x)))}{(\ln(1+\sin(\pi x)))^2} \left(\frac{\ln(1+\sin(\pi x))}{\sin(\pi x)} \right)^2 \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2 \pi^2 x \right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 1^2 \cdot 0 = 1.
\end{aligned}$$