MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2020.

Zadatak 1. Izračunajte limese:

(a) (4 boda)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2}\sqrt{\cos 3x}-1}{\ln(1+3x)\ln(1+3\arcsin x)},$$

(b) (2 boda)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\lfloor 4e^x \rfloor + 2}{\lfloor 5e^x \rfloor + 1}.$$

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2}\sqrt{\cos 3x}-1}{\ln(1+3x)\ln(1+3\arcsin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{3x^2}-1)\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos 3x}-1}{\ln(1+3x)\ln(1+3\arcsin x)}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos 3x}}{3}\cdot\frac{e^{3x^2}-1}{3x^2}\cdot\frac{3x}{\ln(1+3x)}\cdot\frac{3\arcsin x}{\ln(1+3\arcsin x)}\cdot\frac{x}{\arcsin x}+\\
&+\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x-1}{(3x)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos 3x}+1}\cdot\frac{3x}{\ln(1+3x)}\cdot\frac{3\arcsin x}{\ln(1+3\arcsin x)}\cdot\frac{x}{\arcsin x}\\
&= \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{12},
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili tablične limese i da vrijedi $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

(b) Kako za svaki realan broj x vrijedi $x-1 < \lfloor x \rfloor \le x$, imamo

$$4e^x + 1 \le \lfloor 4e^x \rfloor + 2 \le 4e^x + 2$$

i

$$5e^x \le \lfloor 5e^x \rfloor + 1 \le 5e^x + 1.$$

Dakle, vrijedi

$$\frac{4e^x+1}{5e^x+1} \le \frac{\lfloor 4e^x \rfloor + 2}{\lfloor 5e^x \rfloor + 1} \le \frac{4e^x+2}{5e^x}.$$

Kako je

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{4e^x+1}{5e^x+1} = \frac{4}{5} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{4e^x+2}{5e^x} = \frac{4}{5},$$

po teoremu o sendviču zaključujemo da traženi limes postoji i da je jednak

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\lfloor 4e^x \rfloor + 2}{\lfloor 5e^x \rfloor + 1} = \frac{4}{5}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2020.

Zadatak 2. (6 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$\left\{\frac{2e^nm^2+2e^nm-e^n-6m^2-6m+3}{e^nm^2+e^nm} : m,n\in\mathbb{N}\right\}\bigcup\left\{1+\frac{r}{s}+\frac{r^2}{2s^2} : r,s\in\mathbb{N}\text{ relativno prosti i } r<s\right\}.$$

Rješenje. Neka je S skup iz teksta zadatka i

$$A=\left\{1-\frac{3}{e^n} : n\in\mathbb{N}\right\},\quad B=\left\{2-\frac{1}{m(m+1)} : m\in\mathbb{N}\right\},$$
$$C=\left\{1+\frac{r}{s}+\frac{r^2}{2s^2} : r,s\in\mathbb{N}\text{ relativno prosti i } r<s\right\}.$$

Uočimo da je $S=A\cdot B\cup C$. Niz $(1-\frac{3}{e^n})_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući pa je $\inf A=1-\frac{3}{e}$ i $\sup A=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{3}{e^n})=1$.

Slično, niz $(2-\frac{1}{m(m+1)})_{m\in\mathbb{N}}$ je rastući pa je $\inf B=2-\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}$ i $\sup B=\lim_{m\to\infty}(2-\frac{1}{m(m+1)})=2$.

Sada možemo zaključiti da je

$$\sup A\cdot B=\max\{\sup A\cdot\sup B,\sup A\cdot\inf B,\inf A\cdot\sup B,\inf A\cdot\inf B\}=2$$

i

$$\inf A\cdot B=\min\{\sup A\cdot\sup B,\sup A\cdot\inf B,\inf A\cdot\sup B,\inf A\cdot\inf B\}=2-\frac{6}{e}.$$

Uočimo da je

$$\left\{\frac{r}{s} : r,s\in\mathbb{N}\text{ relativno prosti i } r<s\right\}=\mathbb{Q}\cap\langle 0,1\rangle.$$

Zbog toga možemo pisati

$$C=\{1+q+q^2/2 : q\in\mathbb{Q}\cap\langle 0,1\rangle\}.$$

Neka je $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja

$$f(x)=1+x+x^2/2.$$

Funkcija f je očito rastuća i neprekidna pa je

$$\sup C=\sup f(\mathbb{Q}\cap\langle 0,1\rangle)=f(\sup\mathbb{Q}\cap\langle 0,1\rangle)=f(1)=\frac{5}{2}.$$

Slično,

$$\inf C=\inf f(\mathbb{Q}\cap\langle 0,1\rangle)=f(\inf\mathbb{Q}\cap\langle 0,1\rangle)=f(0)=1.$$

Konačno, imamo da je

$$\sup S=\max\{\sup A\cdot B,\sup C\}=\frac{5}{2}$$

i

$$\inf S=\min\{\inf A\cdot B,\inf C\}=2-\frac{6}{e}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2020.

Zadatak 3.

(a) (4 boda) Odredite limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \cdots + \sqrt[\lfloor\sqrt{n}\rfloor]{n}}{n}.$$

(b) (3 boda) Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz pozitivnih realnih brojeva koji je neograničen i za koji vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ sa $f(n)$ označimo najmanji broj koji je veći od n, takav da je $a_{f(n)} - a_n > 1$. Dokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} (a_{f(n)} - a_n) = 1.$$

Rješenje.

(a) Ako je $a > 1$, tada je $x \mapsto a^x$ rastuća funkcija pa za $k \geq 3$ vrijedi: $\sqrt[k]{n} < \sqrt[3]{n}$. Prema tome, vrijedi

$$1 \leq \frac{n + \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \cdots + \sqrt[\lfloor\sqrt{n}\rfloor]{n}}{n} \leq \frac{n + \sqrt{n} + (\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 2)\sqrt[3]{n}}{n}.$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \sqrt{n} + (\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 2)\sqrt[3]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 2}{n^{2/3}}\right) = 1,$$

po teoremu o sendviču slijedi da je traženi limes jednak 1.

(b) Iz prvog uvjeta znamo da je $f(n)$ dobro definirano. Naime, kako je niz neograničen, za proizvoljan n postoji $m > n$ takav da je $a_m > a_n + 1$ pa onda postoji i najmanji takav koji je veći od n pa njega označimo sa $f(n)$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$. Po definiciji funkcije f znamo da je $a_{f(n)} - a_n > 1$. S druge strane, zbog toga što je $f(n)$ najmanji indeks takav da je $a_{f(n)} - a_n > 1$, vrijedi $a_{f(n)-1} - a_n \leq 1$ pa za $n \geq n_0$, zbog toga što je $f(n) - 1 \geq n \geq n_0$, vrijedi

$$a_{f(n)} - a_n = (a_{f(n)-1} - a_n) + (a_{f(n)} - a_{f(n)-1}) < 1 + \varepsilon.$$

Dakle, zaključujemo da za $n \geq n_0$ vrijedi

$$1 < a_{f(n)} - a_n < 1 + \varepsilon$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio prozivoljan, zaključujemo da je $\lim_{n\to\infty}(a_{f(n)} - a_n) = 1$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2020.

Zadatak 4. (6 bodova) Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz zadan s

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{2a_n}.$$

Dokažite da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i odredite mu limes.

Rješenje. Indukcijom se lako pokaže da je $a_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira i označimo $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Puštanjem limesa na rekurzivnu relaciju slijedi $2L^2 - L - 3 = 0$, odnosno $L = \frac{3}{2}$ ili $L = -1$. Zbog pozitivnosti članova niza limes ne može biti -1 pa je $L = \frac{3}{2}$.
Tvrdimo da zaista $a_n \to \frac{3}{2}$. Pokažimo indukcijom da je $a_n \in \left[\frac{5}{4}, 2\right]$ za sve $n \geq 2$. Zaista, imamo

$$a_2 = 2 \in \left[\frac{5}{4}, 2\right].$$

Pretpostavimo da za neki $n \geq 2$ imamo $a_n \in \left[\frac{5}{4}, 2\right]$. Sada je

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2a_n}$$

te imamo $\frac{1}{a_n} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right]$ pa je

$$\frac{5}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} \leq \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{a_n}}_{=a_{n+1}} \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{17}{10} \leq 2$$

odnosno $a_{n+1} \in \left[\frac{5}{4}, 2\right]$. Sada za svaki $n \geq 2$ imamo

$$\left|a_n - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{3}{2a_{n-1}} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2a_n} - 1\right| = \frac{1}{a_n}\left|\frac{3}{2} - a_{n-1}\right| \leq \frac{4}{5}\left|\frac{3}{2} - a_{n-1}\right|$$

pa iteriranjem slijedi

$$\left|a_n - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{4}{5}\left|a_{n-1} - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left|a_{n-2} - \frac{3}{2}\right| \leq \cdots \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}\left|a_2 - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Iz teorema o sendviču slijedi $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$.
Napomena. Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije monoton – njegovi članovi osciliraju oko limesa $\frac{3}{2}$ približavajući mu se sa svake strane. Ipak, monotonost se može iskoristiti za dokaz konvergencije. Naime, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$a_{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2a_{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2a_n}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{1 + \frac{3}{a_n}}. \tag{1}$$

Prvih nekoliko članova niza je jednako

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = \frac{5}{4}, \quad a_4 = \frac{17}{10}.$$

Imamo $a_1 < a_3$ te $a_2 > a_4$. Sada se indukcijom iz relacije (1) lako pokaže da je podniz $(a_{2n})_n$ padajuć, a podniz $(a_{2n-1})_n$ rastuć. Oba podniza se nalaze unutar $\left[\frac{5}{4}, 2\right]$ pa konvergiraju. Puštanjem limesa u relaciji (1) slijedi da je $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \frac{3}{2}$ pa zaključujemo i $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$.