MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 23. studenog 2021.

Zadatak 1.

(a) (4 boda) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \arcsin\left(\operatorname{ctg}\left(x^2\right)\right) - \log_{256-x^4}\left(x^4 + 2x^2 - 3\right).$$

Napomena: nije potrebno naći presjek izračunatih uvjeta.

(b) (2 boda) Postoji li elementarna funkcija (ili kompozicija elementarnih funkcija, ili linearna kombinacija kompozicja elementarnih funkcija) čija je prirodna domena $\mathbb{R} \setminus (2021\mathbb{Z} \cup \{\sqrt{2}, \pi\})$?

Rješenje.

(a) Vrijedi da je $x \in \mathcal{D}(f)$ onda i samo onda kada su zadovoljeni svi od dolje navedenih uvjeta:

(i) $\operatorname{ctg}(x^2) \in [-1, 1]$ jer je domena arkusa sinusa $[-1, 1]$,

(ii) $x^2 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ jer je domena kotangensa $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

(iii) $256 - x^4 > 0$ jer baza logaritma mora biti veća od 0,

(iv) $256 - x^4 \neq 1$ jer baza logaritma ne smije biti 0,

(v) $x^4 + 2x^2 - 3 > 0$ jer argument logaritma mora biti veći od 0.

Promotrimo ove uvjete jedan po jedan i odredimo za koje x-eve su oni ispunjeni.

(i) Označimo $y = x^2$ te odredimo sve y za koje je $-1 \leq \operatorname{ctg}(y) \leq 1$. Restringirajmo se prvo samo na interval periodičnosti $(0, \pi)$ funkcije ctg. Za $y \in (0, \pi)$ vrijedi

$$-1 \leq \operatorname{ctg} y \leq 1 \iff y \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

Proširivanjem po periodičnosti, za $y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$-1 \leq \operatorname{ctg} y \leq 1 \iff y \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right]$$

Kako je $y \geq 0$, vrijedi da

$$\begin{aligned} y \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right] &\iff x^2 \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right] \\ &\iff x^2 \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right], \end{aligned}$$

a to je ispunjeno onda i samo onda kada je

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \left[-\sqrt{\frac{3\pi}{4} + k\pi}, -\sqrt{\frac{\pi}{4} + k\pi}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{\pi}{4} + k\pi}, \sqrt{\frac{3\pi}{4} + k\pi}\right].$$

(ii) $x^2 \neq k\pi \iff x \neq \pm\sqrt{k\pi}$ za $k \in \mathbb{Z}$. Vidimo da uvjet (i) implicira uvjet (ii), pa ovaj možemo zanemariti.

(iii) $256 - x^4 > 0 \iff x^4 < 256 \iff x \in (-4, 4)$.

(iv) $256 - x^4 \neq 1 \iff x^4 \neq 255 \iff x \neq \pm\sqrt[4]{255}$.

(v) Zamjenom $y = x^2$ dobivamo $x^4 + 2x^2 - 3 > 0 \iff y^2 + 2y - 3 > 0 \iff (y-1)(y+3) > 0$ što daje $y \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$. Kako je $y \geq 0$, dovoljno je promatrati $y \in (1, +\infty)$ što je ekvivalentno s $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

(b) Primijetimo kako funkcija $x \mapsto \sin x$ ima nultočke $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Stoga, nultočke funkcije $x \mapsto \sin(\pi x)$ su $\mathbb{Z}$. Konačno, nultočke funkcije $x \mapsto \sin(\frac{x\pi}{2021})$ su $2021\mathbb{Z}$. Dakle, funkcija s traženom prirodnom domenom jest

$$f(x) = \frac{1}{\sin(\frac{x\pi}{2021})} + \frac{1}{(x-\sqrt{2})(x-\pi)}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 23. studenog 2021.

Zadatak 2. (7 bodova) Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadana je formulom

$$f(x) = \sin^2 x + 1.$$

Odredite $f\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left\langle \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]\right)$, pokažite da je

$$f|_{\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left\langle\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]} : \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left\langle \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right] \to f\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left\langle \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]\right)$$

bijekcija te odredite $\left(f|_{\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left\langle\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]}\right)^{-1}$.

Rješenje. Definiramo funkcije

$$g_1 : \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left\langle \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[-1, -\frac{1}{2}\right\rangle, \quad g_1(x) = \sin x,$$
$$g_2 : \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[-1, -\frac{1}{2}\right\rangle \to [1, 2], \quad g_2(x) = x^2 + 1$$

koje su bijekcije. Zaista, s grafa lako vidimo da je

$$g_1|_{\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} : \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

strogo rastuća bijekcija, a

$$g_1|_{\left\langle\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]} : \left\langle \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \left[-1, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

je strogo padajuća bijekcija. Iz disjunktnosti njihovih slika slijedi da je g_1 bijekcija. Slično,

$$g_2|_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \left[1, \frac{5}{4}\right]$$

je strogo rastuća bijekcija, a

$$g_2|_{\left[-1,-\frac{1}{2}\right\rangle} : \left[-1, -\frac{1}{2}\right\rangle \to \left\langle \frac{5}{4}, 2\right]$$

je strogo padajuća bijekcija. Iz disjunktnosti njihovih slika slijedi da je g_2 bijekcija.
Zaključujemo da je $f\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left\langle \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]\right) = [1, 2]$ te da je

$$f|_{\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left\langle\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]} = g_2 \circ g_1 : \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left\langle \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right] \to [1, 2]$$

bijekcija kao kompozicija bijekcija. Prema formuli za inverz kompozicije, imamo

$$\left(f|_{\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left\langle\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]}\right)^{-1} = g_1^{-1} \circ g_2^{-1}.$$

Odredimo inverze komponentnih funkcija. Nađimo prvo

$$g_2^{-1} : [1, 2] \to \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[-1, -\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Imamo

$$x^2+1=y \iff x=\pm\sqrt{y-1}.$$

Za $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ biramo predznak $+$ (tada je $y\in\left[1,\frac{5}{4}\right]$), a za $x\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right\rangle$ biramo predznak $-$ (tada je $y\in\left\langle\frac{5}{4},2\right]$). Zaključujemo

$$g_2(y)=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & \text{ako je } y\in\left[1,\frac{5}{4}\right],\\ -\sqrt{y-1}, & \text{ako je } y\in\left\langle\frac{5}{4},2\right].\end{cases}$$

Preostaje naći

$$g_1^{-1}:\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[-1,-\frac{1}{2}\right\rangle\to\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left\langle\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right].$$

Ako je $y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, tada tražimo jedinstveni $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ takav da $\sin x=y$. Zbog $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, jasno je da je $x=\arcsin y$. Ako je pak $y\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right\rangle$, tada tražimo jedinstveni $x\in\left\langle\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]$ takav da $\sin x=y$. Imamo

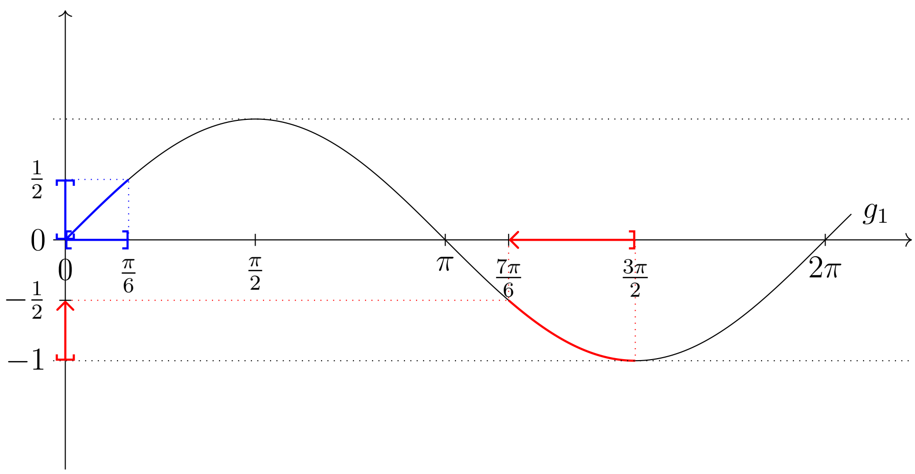
$$y=\sin x=-\sin(\underbrace{x-\pi}_{\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]})\iff \arcsin(-y)=x-\pi\iff x=\pi+\arcsin(-y).$$

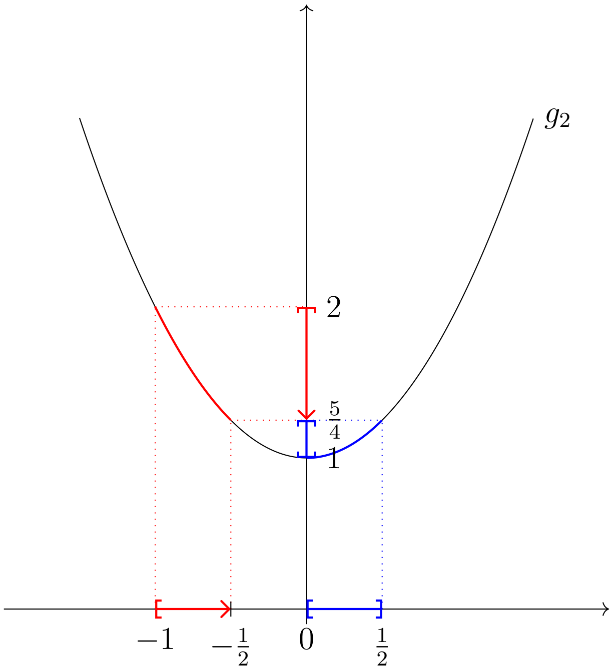
Zaključujemo

$$g_1^{-1}(y)=\begin{cases}\arcsin y, & \text{ako je } y\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ \pi+\arcsin(-y), & \text{ako je } y\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right\rangle.\end{cases}$$

Konačno za $y\in[1,2]$ imamo

$$\begin{aligned}\left(f|_{\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left\langle\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]}\right)^{-1}(y)&=g_1^{-1}(g_2^{-1}(y))\\ &=g_1^{-1}(g_2^{-1}(y))\\ &=\begin{cases}g_1^{-1}(\overbrace{\sqrt{y-1}}^{\in\left[0,\frac{1}{2}\right]}), & \text{ako je } y\in\left[1,\frac{5}{4}\right],\\ g_1^{-1}(\underbrace{-\sqrt{y-1}}_{\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right\rangle}), & \text{ako je } y\in\left\langle\frac{5}{4},2\right].\end{cases}\\ &=\begin{cases}\arcsin(\sqrt{y-1}), & \text{ako je } y\in\left[1,\frac{5}{4}\right],\\ \pi+\arcsin(\sqrt{y-1}), & \text{ako je } y\in\left\langle\frac{5}{4},2\right].\end{cases}\end{aligned}$$





g_2
2
$\frac{5}{4}$
1
-1
$-\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 23. studenog 2021.

Zadatak 3.

(a) (3 boda) Dana je funkcija f pravilom pridruživanja

$$f(x) = 2021^{\lfloor \frac{\cos x - 1}{2 + \cos x} \rfloor + 1}.$$

Odredite $\mathcal{R}(f)$.

(b) (3 boda) Neka su h i g dvije funkcije dane pravilima pridruživanja

$$h(x) = 4^x - 2^{x+1} + 1$$

i

$$g(x) = 2 \arcsin x.$$

Odredite najveći skup I takav da kompozicija $g \circ h|_I$ bude dobro definirana.

Rješenje.

(a) Uočimo da je $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$, pa je $\mathcal{R}(f) = f(\mathbf{R})$. Za funkciju f vrijedi $f = h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$, gdje su $h_1, h_3, h_4 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ i $h_2 \colon \mathbf{R} \backslash \{-2\} \to \mathbf{R}$ funkcije za koje vrijedi

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \cos x, \\ h_2(x) &= \frac{x-1}{2+x}, \\ h_3(x) &= \lfloor x \rfloor + 1, \\ h_4(x) &= 2021^x. \end{aligned}$$

Sada je $\mathcal{R}(f) = f(\mathbf{R}) = h_4(h_3(h_2(h_1(\mathbf{R})))) = h_4(h_3(h_2([-1,1]))) = h_4(h_3([-2,0])) = h_4(\{-1,0,1\}) = \{2021^{-1}, 1, 2021\}$.

(b) Da bi kompozicija $g \circ h|_I$ bila dobro definirana mora vrijediti $\mathcal{R}(h|_I) \subseteq \mathcal{D}(g)$. Kako je $\mathcal{D}(g) = [-1,1]$, to onda slijedi da mora vrijediti $I \subseteq h^{-1}([-1,1])$. Odredimo $h^{-1}([-1,1])$. Za funkciju h vrijedi $h = h_2 \circ h_1$, gdje su $h_1, h_2 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcije za koje vrijedi

$$\begin{aligned} h_1(x) &= 2^x, \\ h_2(x) &= (x-1)^2. \end{aligned}$$

Sada je

$$h^{-1}([-1,1]) = h_1^{-1}(h_2^{-1}([-1,1])) = h_1^{-1}([0,2]) = \langle -\infty, 1].$$

Dakle, najveći skup I za koji je tražena kompozicija dobro definirana je interval $\langle -\infty, 1]$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 23. studenog 2021.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Je li funkcija

$$f(x) = \sin\frac{x}{3} + \cos 4x$$

periodična? Obrazložite.

(b) (2 boda) Odredite sva rješenja jednadžbe

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{\pi}\text{arctg } x = 1$$

(c) (2 boda) Postoji li surjekcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$f^2(x) - f(x) > \frac{1}{4}\cos x, \text{ za svaki } x?$$

Rješenje.

(a) Funkcija $\sin\frac{x}{3}$ ima period $2\pi/\frac{1}{3} = 6\pi$, a funkcija $\cos 4x$ ima period $\frac{\pi}{2}$. Kako je $6\pi = 12 \cdot \frac{\pi}{2}$, to je 6π period funkcije f, pa je ona periodična.

(b) Vidimo da je jedno rješenje $x = 1$. Kako su $\frac{3}{4}x$ i $\frac{1}{\pi}\text{arctg } x$ strogo rastuće funkcije, to je i f, kao njihov zbroj, strogo rastuća funkcija, pa je $x = 1$ jedino rješenje.

(c)

$$(f(x) - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = f^2(x) - f(x) > \frac{1}{4}\cos x.$$

Kako je f surjekcija, postoji x_0 takav da je $f(x_0) = \frac{1}{2}$. Sada imamo

$$-\frac{1}{4} = f^2(x_0) - f(x_0) > \frac{1}{4}\cos x_0 \geq -\frac{1}{4}.$$

Dakle, takva funkcija ne može postojati.