BOOTSTRAP

STATISTIČKI PRAKTIKUM 2

8

Bootstrap metode su neparametarske metode ponovnog uzorkovanja. Mogu se koristiti za testiranje hipoteza, ali češće se koriste za procjenu pouzdanosti modela i procedura dobivenih drugim (parametarskim) metodama. Mogu se koristiti i za analizu standardnih procjena u parametarskim modelima.

Odlike:

- brza i jednostavna procjena
- bez pretpostavki na tip modela (ako je model nepoznat ili kompleksan)
- ne oslanja se na asimptotske rezultate

Osnovna ideja

Neka je $x_1, \ldots, x_n$ realizacija slučajnog uzorka $X_1, \ldots, X_n$ iz distribucije F. Promatrajmo parametar θ iz distribucije F i njegov procjenitelj $\hat{\theta} = S(X_1, \ldots, X_n)$. Zanima nas distribucija tog procjenitelja (npr. zbog pouzdanih intervala ili testiranja).

Kada bi F bila poznata, mogli bismo odrediti uzoračku distribuciju od $\hat{\theta}$ opetovanim uzorkovanjem iz F (Monte Carlo metoda).

Ako F nije poznata (ili imamo samo djelomične informacije, npr. poznato je samo da podaci dolaze iz normalne razdiobe), umjesto iz F uzorkujemo iz procijenjene distribucije $\hat{F}$ dobivene na temelju realizacije $x_1, \ldots, x_n$ (*uzoračka funkcija distribucije*). Osnovna ideja je da realizacije sadrže sve dostupne informacije o distribuciji F i stoga očekujemo da će ponovno uzorkovanje iz tog uzorka dati uzorak koji odgovara uzorkovanju iz distribucije F.

Parametarski i neparametarski bootstrap

Dva (najčešće korištena) načina za procjenu distribucije F iz koje dolazi uzorak:

1. (**Neparametarski bootstrap**) F procjenjujemo empirijskom distribucijom $\hat{F}$ koja svakom x_j pridružuje vjerojatnost $\frac{1}{n}$.
2. (**Parametarski bootstrap**) Ako je poznata klasa distribucija (model) F_φ iz koje dolazi uzorak (npr. normalni) i ona ovisi o parametru φ, F procjenjujemo s $F_{\hat{\varphi}}$, gdje je $\hat{\varphi}$ procjenitelj za φ (npr. MLE - procjenitelj metodom maksimalne vjerodostojnosti).

Algoritam

1. Napraviti uzorak $x_1^*, \ldots, x_n^*$ duljine n iz F (ako je poznata) ili procijenjene distribucije $\hat{F}$,
2. izračunati realizaciju procjenitelja za θ s obzirom na taj uzorak

$$\hat{\theta}^* = S(x_1^*, \ldots, x_k^*),$$

3. ponoviti korake 1. i 2. B puta - tako dobijemo procjene

$$\hat{\theta}_1^*, \ldots, \hat{\theta}_B^*,$$

4. pomoću ovih procjena Monte Carlo metodom (ZVB) dobiti bootstrap procjenu parametra θ: θ_{boot}, ili razdiobe procjenitelja $\hat{\theta}$.

Procjena varijance i funkcije distribucije od $\hat{\theta}$

1. (*Bootstrap procjenitelj varijance statistike* $\hat{\theta}$)

$$v_{\text{boot}} = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\left(\hat{\theta}_b^* - \frac{1}{B}\sum_{r=1}^{B}\hat{\theta}_r^*\right)^2.$$

2. (*Bootstrap procjenitelj funkcije distribucije statistike* $\hat{\theta}$)
   Ako sa $\hat{G}(t) = \hat{\mathbb{P}}(\hat{\theta} \leq t)$ označimo funkciju distribucije od $\hat{\theta}$, imamo:

$$\hat{G}_{\text{boot}}(t) = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\mathbb{1}_{\{\hat{\theta}_b^* \leq t\}}.$$

Zadatak 1

Neka je $X_1, ..., X_n$ uzorak iz normalne razdiobe $N(\mu, \sigma^2)$. Poznato je da je

$$H = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Provjerite ovu tvrdnju Monte Carlo simulacijom za $n = 100$, $\mu = 1$ i $\sigma^2 = 4$. Broj simulacija $B = 50$.

Uzorkovanje iz empirijske distribucije $\hat{F}$

Želimo uzorak $x_1^*, \ldots, x_k^*$ duljine $k \leq n$ iz $\hat{F}$.
Kako $\hat{F}$ svakom x_j iz početne realizacije daje vjerojatnost $\frac{1}{n}$, trebamo uzeti poduzorak duljine k iz skupa podataka $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (eng. *resampling*, ponovljeno uzorkovanje).
Ako je $k = n$, moramo dozvoliti ponavljanja u uzorku.

1. uzorkujemo $i_1, \ldots, i_k$ iz uniformne distribucije na $\{1, \ldots, n\}$,
2. definiramo $x_j^* = x_{i_j}$.

Na temelju tog uzorka možemo odrediti realizaciju bootstrap procjenitelja za θ i procijeniti mu distribuciju

$$\hat{\theta}^* = S(X_1^*, \ldots, X_k^*),$$

$$\hat{\mathbb{P}}(\hat{\theta} \in A) = \mathbb{P}^*(\hat{\theta}^* \in A),$$

gdje potonju distribuciju možemo dobiti Monte Carlo metodama iz $\hat{F}$.

Zadatak 2

U datoteci `sample.txt` dan je uzorak duljine 1000 iz nepoznate razdiobe s konačnom varijancom. Bootstrap metodom provjerite da ta razdioba zadovoljava centralni granični teorem.

Možete koristiti naredbu
`sample(x, size, replace = FALSE, prob = NULL)`.

Greške pri procjeni

Postoje dva izvora greške:

- zamjena F sa $\hat{F}$
- procjena distribucije od $\hat{\theta}$ Monte Carlo simulacijama iz $\hat{F}$

Na prvu grešku ne možemo puno utjecati, ali druga greška se može proizvoljno smanjiti, relativno na prvu, i to odabirom većeg broja uzoraka u MC simulaciji.

Pouzdani intervali za θ

Postoji nekoliko mogućih pristupa za bootstrap procjenu pouzdanih intervala

1. normalna aproksimacija
2. osnovni bootstrap
3. studentizirani bootstrap
4. percentile
5. BC (*bias-corrected*)

Normalna aproksimacija

Pretpostavimo da je

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta - b(F)}{\sigma(F)} \sim N(0,1),$$

gdje je $b(F) = \mathbb{E}(\hat{\theta}|F) - \theta$ i $\sigma^2(F) = Var(\hat{\theta}|F)$.
Korištenjem bootstrap metode procijenimo nepoznate $b(F)$ i $\sigma(F)$

$$b(\hat{F}) = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B}\theta_j^* - \theta(\hat{F})$$

$$\sigma^2(\hat{F}) = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B}(\theta_j^* - \bar{\theta}^*)^2,$$

gdje je B broj MC simulacija iz $\hat{F}$, θ_j^* procjenitelj za θ u j-toj simulaciji, $\theta(\hat{F})$ procjena parametra θ na temelju $\hat{F}$, a $\bar{\theta}^* = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B}\theta_j^*$ aritmetička sredina dobivenih procjena.

Osnovni i percentile bootstrap

Pretpostavimo da su kvantili distribucije od $\hat{\theta} - \theta$ približno jednaki kvantilima distribucije od $\bar{\theta}^* - \theta(\hat{F})$, pa je pogodan pouzdani interval za θ

$$\left[2\theta(\hat{F}) - \theta^*_{((B+1)(1-\alpha/2))}, 2\theta(\hat{F}) - \theta^*_{((B+1)\alpha/2)}\right].$$

Druga mogućnost je da za pouzdani interval uzmemo

$$\left[\theta^*_{((B+1)\alpha/2)}, \theta^*_{((B+1)(1-\alpha/2))}\right].$$

Bootstrap u R-u

```
> install.packages("boot")
> library(boot)

# simulacija uzoraka
> boot
function (data, statistic, R, sim = "ordinary", ...)

# pouzdani intervali
> boot.ci
function (boot.out, conf = 0.95, type = "all", ...)
```

Primjer

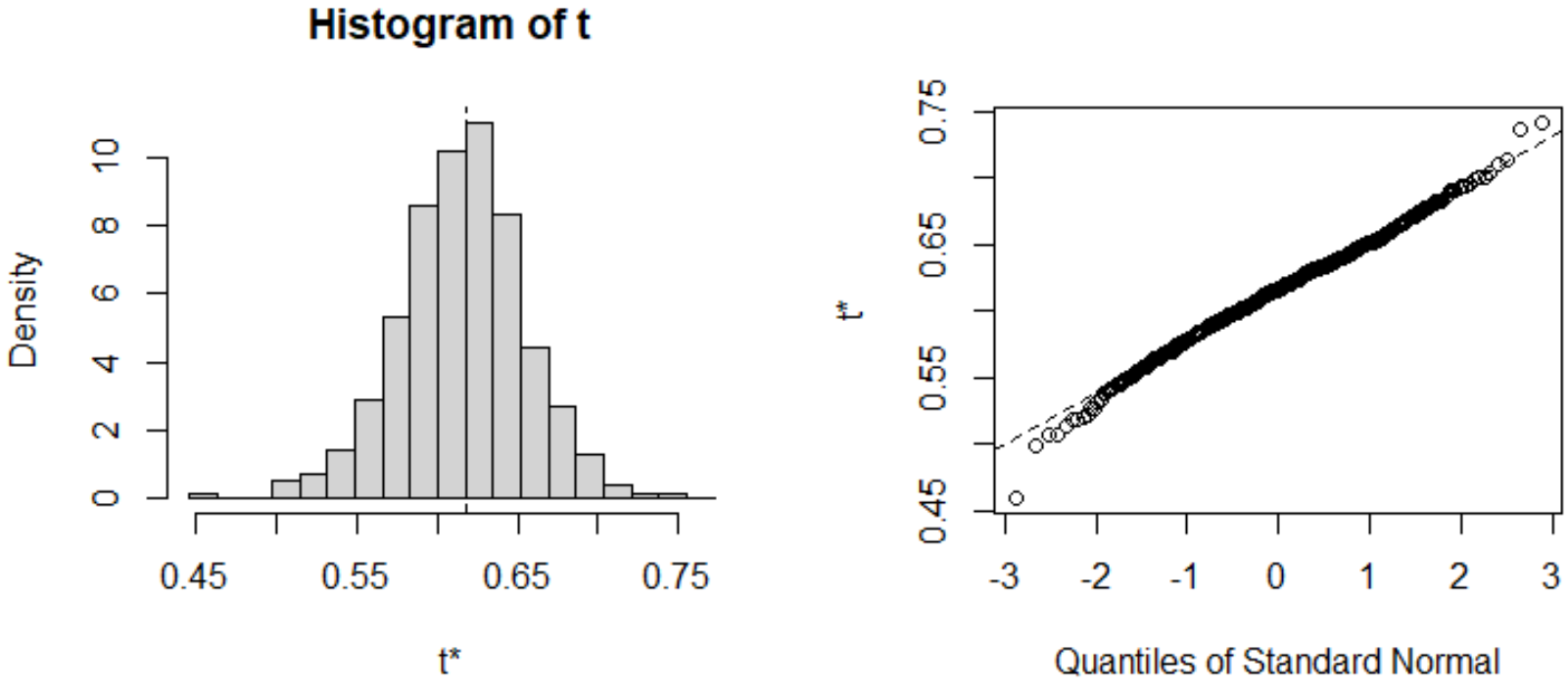
U datoteci `bodovi.txt` nalaze se bodovi 200 ispitanika iz provjere pismenosti i matematičkog dijela testa. Odredite 90% pouzdani interval za koeficijent korelacije uspjeha u tim područjima.

$\theta = \rho(write, math)$, $\hat{\theta} = cor(write, math)$

```
> bodovi = read.table("bodovi.txt", header=T)
> cor(bodovi$write, bodovi$math)
[1] 0.6174493
> korelacija = function(podaci, i)
{
 return(cor(bodovi[i,"write"],bodovi[i,"math"]))
}
> boot.out = boot(bodovi, statistic=korelacija, R=500)
```

```
> boot.out

ORDINARY NONPARAMETRIC BOOTSTRAP

Call:
boot(data = bodovi, statistic = korelacija, R = 500)

Bootstrap Statistics :
original        bias    std. error
t1* 0.6174493 -0.002173778  0.03869131

> names(boot.out)
[1] "t0"        "t"         "R"         "data"
[5] "seed"      "statistic" "sim"       "call"
[9] "stype"     "strata"    "weights"
```

```
> plot(boot.out)
```



```
> boot.ci(boot.out, conf=0.90)
BOOTSTRAP CONFIDENCE INTERVAL CALCULATIONS
Based on 500 bootstrap replicates

CALL :
boot.ci(boot.out = boot.out, conf = 0.9)

Intervals :
Level      Normal              Basic
90%   ( 0.5560,  0.6833 )   ( 0.5567,  0.6847 )

Level     Percentile            BCa
90%   ( 0.5502,  0.6782 )   ( 0.5506,  0.6791 )
Calculations and Intervals on Original Scale
Warning message:
In boot.ci(boot.out, conf = 0.9) :
bootstrap variances needed for studentized intervals
```

Zadatak

Simulirajte uzorak duljine 1000 iz standardne normalne razdiobe. Bez pretpostavki na distribuciju iz koje podaci dolaze procijenite 95% pouzdani interval za očekivanje i medijan populacije.

(a) Koristite bootstrap procedure implementirane u `R`-u.

(b) Izračunajte normalni i *percentile* pouzdani interval koristeći bootstrap uzorak koji je generirala gotova naredba, ali konstrukciju pouzdanog intervala napravite sami.

(c) Cijelu proceduru za normalni i *percentile* pouzdani interval provedite sami.