

Moderno razrješenje paradoksa dihotomije

Magdalena Pleša

Zenon iz Eleje (oko 5. stoljeća pr. Kr., točnije 490. – 430. pr. Kr.) poznat je po svojim paradoksima kretanja koje mu Aristotel pripisuje. U svojim paradoksima Zenon je pokušao pokazati da su kretanje i promjena nemogući, preciznije da beskonačne djeljivosti prostora, odnosno vremena daju rezultat nemogućnosti kretanja koji je paradoksalni. Argumenti koje je Zenon predstavio predstavljaju velik izazov u povijesti filozofije i matematike te dovode u pitanje osnovne pojmove prostora, vremena i beskonačnosti. Najpoznatiji Zenonovi paradoksi su paradoks Ahileja i kornjače i paradoks dihotomije, koji problematizira mogućnost kretanja.

Paradoks dihotomije temelji se na ideji beskonačne djeljivosti prostora i vremena. Tvrdnja ovog paradoksa je da bi neko tijelo stiglo iz neke točke A u točku B , ono najprije mora prijeći polovicu puta, a nakon toga ponovno polovicu preostalog puta, zatim polovicu preostale četvrtine i tako unedogled tijelo prelazi polovicu preostalog puta. Zenon zapravo tvrdi da se put može podijeliti na beskonačan broj sve manjih dijelova, no kako ih postoji beskonačno zaključuje kako tijelo ne može ni započeti kretanje. Odnosno, tijelo bi moralo prijeći beskonačno mnogo segmenata, što je nemoguće. U paradoksu dihotomije Zenona je mučila razlika između parcijalne sume i geometrijskog reda koji se danas može matematički izraziti kao zbroj, ako je ukupna udaljenost jednaka 1.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Kako je Zenon ovaj zbroj smatrao beskonačnom, zaključio je da i ukupno vrijeme ili put bi trebali biti beskonačni. Ovaj paradoks ukazuje kako je u antičko doba problematiku stvaralo razumijevanje beskonačnosti te nije postojala teorija koja bi objasnila da i beskonačan broj koraka može dati konačan rezultat. Suvremena analiza smatra da Zenonov argument je proizašao iz pretpostavke da upravo beskonačan broj dijelova nužno daje beskonačnu veličinu. Današnji razvoj matematike, posebno proučavanje limesa i teorije beskonačnih nizova omogućava rješavanje ovog paradoksa. U slučaju paradoksa dihotomije imamo niz oblika:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum \frac{1}{2^n} = 1$$

Zapravo, promatramo geometrijski niz čiji zbroj teži u 1, čime se pokazuje da iako postoji beskonačno mnogo podjela, zbroj može biti konačan. Ovo razumijevanje počiva na pojmu limesa te je važno naglasiti da podjela kretanja na beskonačno mnogo koraka je matematički model, a ne fizička stvarnost. Paradoks dihotomije pokazuje kako intuitivno razmišljanje može dovesti do pogrešnih zaključaka kada se suočimo s pojmom beskonačnosti. Tvrdnjom da beskonačan broj koraka može imati konačno rješenje je paradoks razriješen u matematičkom smislu, ali i dalje ostaje kao važan filozofski izazov gdje se podsjeća na granice ljudske intuicije i na važnost preciznog znanstvenog mišljenja.

Reference:

1. Adolf Grunbaum, Modern Science and Refutation of the Paradoxes of Zeno, *The Scientific Monthly* 81, no. 5 (1955), <http://www.jstor.org/stable/22052>
2. Franka Miriam Brückler, Kratka povijest redova, (2025), <https://hrcak.srce.hr/file/497360>
3. Giorgio T. Bagni, Infinite series from history to mathematics education