

Matematika 1 (4. 2. 2026.): 1. i 5. zadatak

Zadatak 1. Tri radnika turske tvrtke Zaza İnşaat, Ali, Erdem i Murat, prihvatili su da za postavljanje željezničkih tračnica na dijelu trase između Koprivnice i mađarske granice budu plaćeni ukupno 3300,00 €. Da radi sam, Ali bi taj posao obavio za 600 sati. Da radi sam, Erdem bi za taj posao trebao 1000 sati više nego da Murat radi sam. Započeli su raditi zajedno, no tijekom rada Murat se razbolio nakon što je odradio 144 sata, čime je bilo obavljeno točno pola ukupnog posla. Nakon toga su Ali i Erdem nastavili i završili posao. Koliko vremena je bilo potrebno da posao za koji su angažirani bude završen? Ako je bilo dogovoreno da budu plaćeni po radnom učinku, tj. udjelu ukupnog posla kojeg je svaki od njih obavio, koliko je svaki od njih zaradio na ovom poslu?

Rješenje. Za pola posla Ali treba sam 300 sati, a Erdem 500 sati više nego Murat. Neka je s t_M označeno vrijeme (u satima) koje Muratu treba da sam obavi cijeli posao- Dakle, u jednom satu Ali od polovice posla obavi $1/300$, Murat $1/(t_M/2)$, a Erdem $1/(t_M/2 + 500)$. Pritom je ta polovica posla obavljena za 144 sata pa je

$$\frac{1}{300} + \frac{1}{t_M/2} + \frac{1}{t_M/2 + 500} = \frac{1}{144}.$$

Uz oznaku $x = t_M/2$ ovo je ekvivalentno kvadratnoj jednadžbi $156x^2 - 8400x + 2160000 = 0$, koja ima jedno negativno rješenje, a drugo rješenje (jedino smisleno) je 400. pa je $t_M/2 = 400$ sati, a Erdemu ako radi sam treba 900 sati za pola posla.

Označimo ukupno potrebno vrijeme (u satima) s T . Nakon prve polovice posla su kroz vrijeme $T - 144$ (sata) isto jednu polovicu posla obavili sami Ali i Erdem pa je kao gore

$$\frac{1}{300} + \frac{1}{900} = \frac{1}{T - 144}.$$

Iz toga dobivamo da je $T = 369$ sati, dakle ukupno vrijeme potrebno za završiti posao bilo 369 sati.

U 1 satu posla Ali obavi od sveukupnog posla $1/600$, Erdem $1/1800$, a Murat $1/800$. Ali i Erdem su radili po 369 sati, a Murat 144 sata pa je traženi omjer za raspodjelu zarade

$$\frac{369}{600} : \frac{144}{800} : \frac{369}{1800} = 4428 : 1296 : 1476 = 123 : 36 : 41.$$

Dakle, Ali je zaradio $\frac{123}{300} \cdot 3300 = 2029,50$ eura, Murat 594 eura, a Erdem 676,50 eura.

Zadatak 5. Zadana je baza prostora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ s parametrima $a = 10 \text{ mm}$, $b = c = 20 \text{ mm}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = \gamma = 90^\circ$. Izračunajte $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, $\vec{a}^* \cdot (\vec{b}^* \times \vec{c}^*)$, iznose sva tri vektora recipročne baze i kut između vektora $\vec{a}$ i vektora $\vec{a}^* - \vec{b}^* + \vec{c}^*$.

Rješenje. Uočimo prvo da je $\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{c}$. Po definiciji vektorskog produkta, $\vec{b} \times \vec{c} \perp \vec{b}, \vec{c}$, pa su $\vec{b} \times \vec{c}$ i $\vec{a}$ kolinearni odnosno $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{0}$.

Mješoviti produkt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ je volumen jedinične ćelije u direktnom prostoru, a prema zadanim parametrima baze to je uspravna prizma kojoj je visina a , a baza paralelogram sa stranicama b i c i kutom α , dakle joj je volumen $V = a b c \sin \alpha = 2000\sqrt{2} \text{ mm}^3 = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Mješoviti produkt $\vec{a}^* \cdot (\vec{b}^* \times \vec{c}^*)$ je volumen jedinične ćelije u recipročnom prostoru, a to je $V^* = \frac{1}{V} = \frac{\sqrt{2}}{4000} \text{ mm}^{-3}$.

Iznosi vektora recipročne baze su redom

$$\begin{aligned} |\vec{a}^*| &= \frac{b c \sin \alpha}{V} = \frac{1}{a} = \frac{1}{10} \text{ mm}^{-1}, \\ |\vec{b}^*| &= \frac{a c \sin \beta}{V} = \frac{1}{b \sin \alpha} = \frac{1}{10\sqrt{2}} \text{ mm}^{-1}, \\ |\vec{c}^*| &= \frac{a b \sin \beta}{V} = \frac{1}{c \sin \alpha} = \frac{1}{10\sqrt{2}} \text{ mm}^{-1}. \end{aligned}$$

Tražimo kut φ između $\vec{a} = [1, 0, 0]$ i $\vec{r}^* = [1, -1, 1]^*$. Po definiciji skalarnog produkta mora biti

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}^*}{|\vec{a}| |\vec{r}^*|}.$$

Znamo da je $|\vec{a}| = a = 200 \text{ mm}$ i da je $\vec{a} \cdot \vec{r}^* = [1, 0, 0] \cdot [1, -1, 1]^* = 1$. Dakle, još nam treba iznos vektora $\vec{r}^* = \vec{a}^* - \vec{b}^* + \vec{c}^*$. Iznos svakog vektora se dobije kao drugi korijen tog vektora pomnoženog skalarno samog sa sobom. Budući da smo već vidjeli da je $\vec{a}^*$ kolinearan s $\vec{a}$, po definiciji recipročne baze vidimo da je $\beta^* = \gamma^* = 90^\circ$. Skica položaja vektora daje $\alpha^* = 135^\circ$. Stoga imamo sljedeći račun:

$$\begin{aligned} \vec{r}^* \cdot \vec{r}^* &= (\vec{a}^* - \vec{b}^* + \vec{c}^*) \cdot (\vec{a}^* - \vec{b}^* + \vec{c}^*) = \vec{a}^* \cdot \vec{a}^* + \vec{b}^* \cdot \vec{b}^* + \vec{c}^* \cdot \vec{c}^* - 2\vec{b}^* \cdot \vec{c}^* = \\ &= |\vec{a}^*|^2 + |\vec{b}^*|^2 + |\vec{c}^*|^2 - 2|\vec{b}^*| |\vec{c}^*| \cos 135^\circ = \frac{4 + \sqrt{2}}{200} \text{ mm}^{-2} \end{aligned}$$

pa je $|\vec{r}^*| = 0.1645328776 \dots \text{ mm}^{-1}$. Stoga je $\varphi \approx 52^\circ 34' 15''$.

Matematika 2 (4. 2. 2026.): 5. zadatak

Zadatak 5. Dvije funkcije stanja X i Y definirane su s

$$X = \left(\frac{\partial Z}{\partial W} \right)_V, \quad Y = \left(\frac{\partial V}{\partial Z} \right)_W.$$

- (a) (2) Koje su varijable funkcije V ?
- (b) (4) Zapišite diferencijal dV preko diferencijala tih varijabli, tako da odgovarajuće koordinatne funkcije uz diferencijale varijabli budu funkcije od X i Y .
- (c) (4) Što možete reći o ovisnosti X o W pri konstantnom V ako biste znali da je Z konveksna funkcija od W kad je V konstantan?
- (d) (10) Pokažite da V zadovoljava sljedeću jednadžbu:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial W \partial Z} + X \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right)_W = 0.$$

Rješenje.

- (a) Iz definicije Y vidi se da su W i Z varijable funkcije V .
- (b) Treba dV zapisati preko dW i dZ . Budući da/ako je V funkcija stanja (nije pisalo da je i V funkcija stanja pa u ovom dijelu zadatka priznajem sve smislene račune!):

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial W} \right)_Z dW + \left(\frac{\partial V}{\partial Z} \right)_W dZ = \left(\frac{\partial V}{\partial W} \right)_Z dW + Y dZ.$$

Prema Eulerovom cikličkom pravilu je

$$-1 = \left(\frac{\partial V}{\partial W} \right)_Z \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial Z} \right)_V \cdot \left(\frac{\partial Z}{\partial V} \right)_W = \left(\frac{\partial V}{\partial W} \right)_Z \cdot \frac{1}{X} \cdot \frac{1}{Y}$$

pa je

$$dV = -X Y dW + Y dZ.$$

- (c) Ako je Z konveksna funkcija od W kad je V konstantan, znači da je

$$0 < \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial W^2} \right)_V = \left(\frac{\partial X}{\partial W} \right)_V$$

pa X mora pri konstantnom V biti rastuća funkcija od W .

- (d) Po definiciji Y , iz egzaktnosti diferencijala $dV = -X Y dW + Y dZ$ te po Schwarzovom teoremu imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial W \partial Z} &= \left(\frac{\partial Y}{\partial W} \right)_Z = \left(\frac{\partial(-X Y)}{\partial Z} \right)_W = -X \left(\frac{\partial Y}{\partial Z} \right)_W - Y \left(\frac{\partial X}{\partial Z} \right)_W \\ &= -X \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right)_W - Y \left(\frac{\partial}{\partial Z} \right)_W \left(\frac{\partial Z}{\partial W} \right)_V = -X \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right)_W - Y \left(\frac{\partial}{\partial W} \right)_V \left(\frac{\partial Z}{\partial Z} \right)_W = \\ &= -X \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right)_W - Y \left(\frac{\partial 1}{\partial W} \right)_V = -X \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right)_W \end{aligned}$$

pa vrijedi zadana jednakost.