Matematika 2 (5. 2. 2025.): riješen 5. zadatak

Zadatak. Spasioc je zaposlen pri jednom bazenu pravokutnog oblika, sa stranicama duljina 20 m i 50 m. U trenutku kad je stajao točno na rubu bazena, uz polovište dulje stranice, uočio je da se u kutu na suprotnoj strani od njega utapa jedna lijepa djevojka. Spasioc pliva brzinom 1,5 m/s, a trči brzinom 6 m/s. Odlučio je prvo zaplivati, a onda manje ili više trčati. Za skok u bazen treba mu 1 sekunda, a za izlazak iz bazena na tlo trebaju mu 3 sekunde. Kako će najbrže stići do utopljenice? Koliko će mu vremena trebati?

Rješenje. Postavimo Kartezijev koordinatni sustav (s jedinicom duljine m) tako da je utopljenica u ishodištu i tako da su dvije stranice bazena na pozitivnim dijelovima koordinatnih osi, recimo tako da je dulja stranica na y-osi. Tada je početna pozicija spasioca $S = (20, 25)$. On će prvo plivati do neke točke (x, y) na rubu bazena, pri čemu će to očito biti smisleno samo ako je $x = 0$ ili $y = 0$. Time će preći udaljenost $d_1 = \sqrt{(20-x)^2 + (25-y)^2}$ u vremenu $t_1 = d_1/1{,}5$ sekundi. Nakon tog će trčati prema ishodištu duž ruba bazena, čime će preći udaljenost $d_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ u vremenu $t_2 = d_2/6$ sekundi. Dakle, potrebno je minimizirati funkciju

$$T(x, y) = 4 + \frac{2}{3}\sqrt{(20-x)^2 + (25-y)^2} + \frac{1}{6}\sqrt{x^2 + y^2}$$

uz uvjet da je ili $x = 0$ ili $y = 0$ i to na domeni $[0, 20] \times [0, 25]$ (očito nema smisla da pliva prema poziciji s $y > 25$).

Ako je $x = 0$, minimiziramo funkciju

$$t_y(y) = 4 + \frac{2}{3}\sqrt{400 + (25-y)^2} + \frac{y}{6}$$

na segmentu $[0, 25]$. Kritične točke te funkcije su 0, 25 i stacionarna točka $25 - 4\sqrt{\frac{5}{3}}$. Uvrstimo li ih u funkciju t_y dobit ćemo iznose $4 + 10\sqrt{41}/3 \approx 25{,}3437$, $4 + 35/2 = 21{,}5$ i $4 + 25/6 + 10\sqrt{5/3} \approx 21{,}0766$, dakle ako spasioc spasioc pliva prema kraćoj stranici bazena uz čiji vrh se utapa djevojka, najbrže (u ca. 21,08 sekundi) će stići ako pliva prema točki $(0, 25 - 4\sqrt{53}) \approx (0, 19.836)$.

Ako je $y = 0$, minimiziramo funkciju

$$t_x(x) = 4 + \frac{2}{3}\sqrt{625 + (20-x)^2} + \frac{x}{6}$$

na segmentu $[0, 20]$. Kritične točke te funkcije su 0, 20 i stacionarna točka $20 - 5\sqrt{\frac{5}{3}}$. Uvrstimo li ih u funkciju t_x dobit ćemo iznose $4 + 10\sqrt{41}/3 \approx 25{,}34$, 24 i $4 + 10/3 + 25\sqrt{5/12} \approx 23{,}47$, što su sve dulja vremena od onog dobivenog uz $x = 0$.

Dakle, spasioc će najbrže, za malo više od 21 sekunde, stići do utopljenice ako prvo pliva prema točki $(0, 19.836)$ na nasuprotnoj strani bazena (koja je za $4\sqrt{5/3} \approx 5{,}16$ metara u odnosu na njegovu početnu poziciju pomaknuta ulijevo odnosno udesno prema utopljenici), a onda od te točke otrči do utopljenice.