

Matematika 1

1. Jedan poznati planimetrijski rezultat nosi ime Napoleonov teorem, jer je početkom 20. stoljeća pripisan znamenitom francuskom državniku i vojskovođi Napoleonu Bonaparte, za kog je poznato da je imao interes za matematiku. Je li teorem stvarno otkrio Napoleon nije poznato. Napoleonov teorem glasi:

Ako je dan bilo kakav trokut i nad njegovim stranicama konstruiramo jednakostranične trokute, onda su težišta ta tri jednakostranična trokuta vrhovi novog jednakostraničnog trokuta.

Dokažite Napoleonov teorem!

Rješenje. Dva od više mogućih dokaza mogu se naći na web-stranici <https://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon.shtml>.

5. Direktna baza prostora zadana je parametrima $a = b = 2,00$ cm, $c = 5,00$ cm, $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

- (a) (5 bodova) Izračunajte $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{a}^* \cdot \vec{b}^* \times \vec{c}^*$, $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{a})$ i $(\vec{a} \times \vec{c}) \times \vec{b}^*$.
- (b) (10 bodova) Izračunajte površinu paralelograma kojeg zatvaraju vektori $\vec{v} = [1, -1, 3]$ i $\vec{w} = [0, -2, 1]^*$.
- (c) (5 bodova) Izračunajte međumrežni razmak ravnina smjera $(0\bar{2}1)$.

Rješenje.

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ je volumen jedinične ćelije koja je s obzirom na parametre baze uspravna prizma visine b s bazom koja je paralelogram stranica a i c između kojih je kut β , dake $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = V = a b c \sin \beta = 10\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

$\vec{a}^* \cdot \vec{b}^* \times \vec{c}^*$ je volumen jedinične ćelije u recipročnom prostoru, a to je $V^* = \frac{1}{V} = \frac{\sqrt{2}}{20} \text{ cm}^{-3}$.

$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{a}) = \vec{0}$ jer je $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ i $\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

$(\vec{a} \times \vec{c}) \times \vec{b}^* (\vec{a} \times \vec{c}) \times \vec{b}^* = (\vec{a} \times \vec{c}) \times \frac{1}{V} \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$ jer su $\vec{a} \times \vec{c}$ i $\frac{1}{V} \vec{c} \times \vec{a}$ koliearni.

(b) Površina je $P = v w \sin \varphi$, gdje je φ kut između $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Imamo:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}) = a^2 + b^2 + 9c^2 + 6ac \cos \beta = (233 + 30\sqrt{2}) \text{ cm}^2,$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 5,$$

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = (\vec{c}^* - 2\vec{b}^*) \cdot (\vec{c}^* - 2\vec{b}^*) = 4(b^*)^2 + (c^*)^2 - 4b^*c^* \cos \alpha^* =$$

(jer je $\alpha^* = \angle(\vec{b}^*, \vec{c}^*) = 90^\circ$ budući da je prema zadanim parametrima $\vec{b} \perp \vec{a}, \vec{c}$ pa je $\vec{b}^* = \frac{1}{V}\vec{c} \times \vec{a}$ istog smjera kao $\vec{b}$, na što je $\vec{c}^* = \frac{1}{V}\vec{a} \times \vec{b}$ okomit)

$$= 4 \left(\frac{ac \sin \beta}{V} \right)^2 + \left(\frac{ab \sin \gamma}{V} \right)^2 = \frac{4}{b^2} + \frac{1}{c^2 \sin^2 \beta} = \frac{51}{50} \text{ cm}^{-2}$$

pa je $v = \sqrt{233 + 30\sqrt{2}} \text{ cm} \approx 16,5959756 \text{ cm}$, $w = \sqrt{\frac{51}{50}} \text{ cm}^{-1} \approx 1,0095049 \text{ cm}^{-1}$ i $\cos \varphi = \frac{5}{vw} \approx 0,29830953$ te je $P = 16,0$.

(c) Prema temeljnom zakonu recipročne rešetke je $d_{0\bar{2}1} = \frac{1}{w} = 0,990 \text{ cm}$.

Matematika 2

5. Veličina Y mjerne jedinice $\ominus$ ovisi o veličini X mjerne jedinice $\ominus$ prema pravilu

$$Y(4 + A X^2) = B X,$$

gdje su A i B konstante. U četiri mjerenja dobiveni su redom sljedeći parovi $(X/\ominus, Y/\ominus)$:

$X/\ominus$	0,17	0,42	0,55	0,71
$Y/\ominus$	0,12	0,26	0,30	0,33

- (a) (6) Koristeći metodu najmanjih kvadrata odredite iznose A , B i C .
- (b) (4) Za tako dobivenu ovisnost Y o X odredite kvadratni polinom $Y = M(X)$ koji od svih kvadratnih polinoma najbolje aproksimira stvarnu ovisnost za X blizu 0.
- (c) (10) Pretpostavite da je polinom M iz prethodnog dijela zadatka gleda kao $M : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ te da je po periodičnosti proširen na $\mathbb{R}$. Odredite tri najznačajnija člana Fourierovog reda tako dobivene funkcije.

Rješenje.

(a) Potrebno je prvo linearizirati ovisnost, budući da podatke za koje znamo da nisu u afinoj ovisnosti nema smisla aproksimirati afinom funkcijom.

Jedna, nipošto jedina, moguća linearizacija je sljedeća: $Y(4 + A X^2) = B X$, je ekvivalentno s $\frac{1}{XY} = \frac{A}{4} \cdot \frac{1}{X^2} + \frac{B}{4}$. Uzmimo $y = \frac{\ominus \ominus}{XY}$, $x = \frac{\ominus^2}{X^2}$, $a = \frac{A \ominus^2}{4}$, $b = \frac{B \ominus}{4 \ominus}$. Time dobivamo tablicu

X	Y	x	y	x^2	xy
0,17	0,12	34,6021	49,0196	1197,3	1696,18
0,42	0,26	5,66893	9,15751	32,1368	51,9133
0,55	0,3	3,30579	6,06061	10,9282	20,0351
0,71	0,33	1,98373	4,26803	3,9352	8,46664
		45,5605	68,5058	1244,3	1776,6

iz koje je $a = 1.3735$ i $b = 1.4818$ pa je $A = 5.49 \ominus^{-2}$ i $B = 5.93 \ominus \ominus^{-1}$.

(b) Ovisnost Y o X je neparna, pa je kvadratni Maclaurinov polinom isto što i linearni. Dakle (do na mjerne jedinice), $M(X) = c X$. Pritom je $c = Y'(0) = \frac{B}{4} = 1.4825$. Dakle, $M(X) = 1.4825 X \ominus / \ominus$.

(c) M je neparna funkcija pa su svi koeficijenti $a_n = 0$. Za koeficijente b_n imamo $L = 1$, $\omega_n = n \pi$ pa su $s_n(t) = \sin(n \pi t)$ (uz $t = X/\ominus$), $n \in \mathbb{N}$ te je

$$b_n = \int_{-1}^1 M(t) \sin(n \pi t) dt = \dots = \frac{0.94 \cdot (-1)^{n-1}}{n},$$

kojima očito apsolutna vrijednost pada s n pa nije potrebno tražiti spektar amplituda: Tri najznačajnija člana su prva tri, tj.

$$0.94 \sin(\pi X/\odot) - 0.47 \sin(2\pi X/\odot) + 0.31 \sin(3\pi X/\odot).$$