

Matematika 1

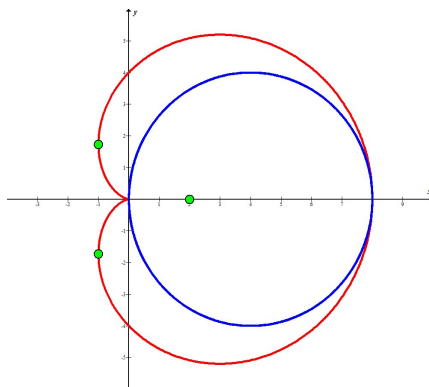
1. Zamislite da imate kuglu veličine Sunca, a oko njenog ekvatora čvrsto je nataknut čelični prsten. Ako bi se duljini (opsegu) tog prstena dodao 1 m te se tako prsten posvud jednako odmakne od kugle, hoćete li između prstena i kugle moći provući igraću kartu? Svoju ruku? Nogometnu loptu? Perilicu rublja? Kako se promijeni Vaš odgovor ako na početku nemate kuglu stvarne veličine Sunca, nego veličine I. Kožarićevog prizemljenog Sunca u Bogovićevoj ulici u Zagrebu (koje je malo više od projektnog čovjeka)?

Rješenje. Neka je d promjer kugle. Njezin opseg, dakle opseg prstena je $d\pi$. Ako d produljimo za 1 m, novi opseg je $(d + 1\text{ m})\pi$. To je opseg nove, zamišljene kugle koja ima polumjer $\frac{(d+1\text{ m})\pi}{2\pi} = \frac{d}{2} + \frac{1}{2}\text{ m}$. Dakle, odmak novog prstena od kugle je razlika polumjera, tj. $\frac{d}{2} + \frac{1}{2}\text{ m} - \frac{d}{2} = \frac{1}{2}\text{ m}$, tj. odmak je isti neovisno o veličini polazne kugle i između prstena i kugle se može provući bilo šta, uključivo navedenih objekata, što je tanje od pola metra.

5. Uz pretpostavku da se polarna os podudara s pozitivnim dijelom realne osi (i da se ishodište polarnog koordinatnog sustava podudara s ishodištem kompleksne ravnine):

- (a) (2) Skicirajte skup A svih kompleksnih brojeva z koji zadovoljavaju uvjet $|z - 4| = 4$.
- (b) (8) Skicirajte krivulju B (kardioidu) kojoj je jednačba $r = 4 + 4 \cos \varphi$.
- (c) (3) U kompleksnoj ravnini skicirajte $\sqrt[3]{w}$ gdje je w zbroj svih kompleksnih brojeva koji su istovremeno i u skupu A i u skupu B .
- (d) (7) Precizno dokažite da su brojevi w koje ste uzeli u (c) dijelu zadatka stvarno jedini brojevi koji su istovremeno u skupu A i skupu B .

Rješenje.



(a, plavo na slici) Jednadžba $|z - 4| = 4$ opisuje skup svih kompleksnih brojeva koji su od broja 4 udaljeni za 4, dakle je A kružnica polumjera 4 sa središtem u točki $(4, 0) = 4 + 0i$ kompleksne ravnine.

(b, crveno na slici) Budući da je $r(\varphi)$ periodična i parna ovisnost s periodom 2π , kardioida je zatvorena krivulja, simetrična s obzirom na pravac na kojem leži polarna os, pa ju je dovoljno skicirati u dijelu ravnine iznad tog pravca, dakle za $0 \leq \varphi \leq \pi$. Budući da je $\cos(\varphi) \in [-1, 1]$, to je $r(\varphi) \in [0, 8]$ pa imamo točke krivulje za svaki φ i sve se nalaze unutar kružnice polumjera 8 oko ishodišta. Za $\varphi = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$ redom dobivamo $r = 8, 4 + 2\sqrt{3} \approx 7,46, 4 + 2\sqrt{2} \approx 6,83, 6, 4, 2, 4 - 2\sqrt{2} \approx 1,17, 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,54, 0$.

(c, zeleno) Sa slike je vidljivo da jedine zajedničke točke $z_1 = 0$ i $z_2 = 8$, dakle je $w = 8$ te treba skicirati tri vrha jednakostraničnog trokuta sa središtem u ishodištu kojem je jedan vrh u točki $z = 2$, dakle $z = 2$ i $z = 2 \exp(\pm i\pi/3)$.

(d) Jednadžba polazne kružnice nakon prijelaza u polarne koordinate ($x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$) je $r = 8 \cos \varphi$. Stoga presjek te dvije krivulje dobijemo izjednačavanjem r -ova: $8 \cos \varphi = 4 + 4 \cos \varphi$ kao jedino rješenje u $[-\pi, \pi]$ ima $\varphi = \pi$ za koji imamo točku $z = 8$. Dodatno, u polarnim koordinatama treba provjeriti je li možda i ishodište na obje krivulje (jer ono ima koordinate $r = 0$ s bilo kojim φ). U ovom slučaju to vrijedi pa su stvarno $z = 8$ i $z = 0$ jedini brojevi koji su i u A i u B .

Matematika 2

5. Za novi model satelita projektantica Kasiopeja treba osmisлити polukuglasti senzor promjera točno 8 cm i na njegovoj površini označiti točku (ili točke) na kojima će pri ulasku u atmosferu temperatura biti maksimalna. Pritom su joj kolege eksperimentalci rekli da su utvrdili da se za polukuglaste senzore ovisnost temperature o poziciji točke može dobro aproksimirati funkcijom $\Theta(x, y, z) = (300 + 20(x^2 + y^2) - 10z^2)^\circ\text{C}$, uz pretpostavku da je središte polukugle ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava i da joj baza leži u (x, y) -ravnini. Pomozite Kasiopeji da odredi traženu točku (tražene točke). Koliko iznosi odgovarajuća maksimalna temperatura?

Rješenje. Podrazumijevamo da je jedinica duljine cm i jedinica temperature $^\circ\text{C}$, pa ćemo izostaviti mjerne jedinice iz računa. Uzmimo da je koordinatni sustav postavljen tako da je vrh polukugle na pozitivnom dijelu z -osi. Površina polukugle se sastoji od dva dijela: polusfere $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ sa $z \geq 0$ te kruga (baze polukugle) koji u (x, y) -ravnini ima jednadžbu $x^2 + y^2 \leq 16$.

Za točke u (x, y) -ravnini je $z = 0$ pa je $\Theta(x, y, z) = 300 + 20(x^2 + y^2)$, dakle što se baze polukugle tiče, najveće vrijednosti temperature postižu se za maksimalni $x^2 + y^2$, tj. na rubnoj kružnici i tamo temperatura iznosi $(300 + 20 \cdot 16)^\circ\text{C} = 620^\circ\text{C}$.

Što se polusfere tiče, zgodnije je prijeći na sferne koordinate r, φ, θ te uz uvrštavanje uvjeta $r = 4$ (jer gledamo samo polusferu) ovisnost temperature o poziciji postaje

$$\begin{aligned}\Theta(x, y, z) &= 300 + 20 \cdot ((4 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta)^2 + (4 \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta)^2) - 10(4 \cdot \cos\vartheta)^2 = \\ &= 300 + 20 \cdot 16 \cdot \sin^2\vartheta - 10 \cdot 16 \cdot \cos^2\vartheta = 300 + 320 \sin^2\vartheta - 160 \cos^2\vartheta = 180 + 480 \sin^2\vartheta.\end{aligned}$$

Dakle, treba maksimizirati $f(\vartheta) = 180 + 480 \sin^2\vartheta$ na $0 \leq \vartheta \leq 90^\circ$: $f'(\vartheta) = 480 \sin(2\vartheta)$ pa su kritične točke $0, 45^\circ$ i 90° . Od njih je najveća vrijednost od f postignuta za $\vartheta = 90^\circ$. Dakle, Θ postiže maksimalnu vrijednost za sve točke s $r = 4$ (na polusferi) za koje je $\vartheta = 90^\circ$ (koje su u (x, y) -ravnini), odnosno opet na onoj polukružnici.

Dakle, Kasiopeja treba označiti kružnicu u kojoj se spajaju baza i polusfera, a na njoj će pri ulasku u atmosferu temperatura biti 620°C .