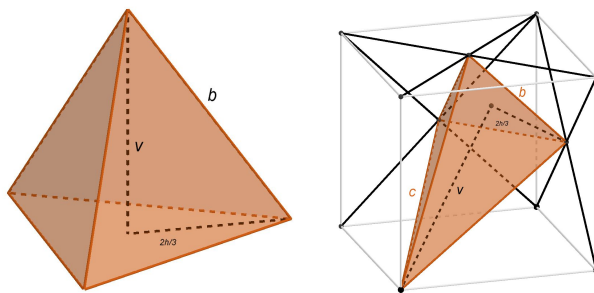


## Matematika 1 (4. 2. 2026.): 1. i 5. zadatak

**Zadatak 1.** Drvodjelja iz dviju drvenih kocki čiji bridovi su duljine  $a$  izrezuje tros-trane piramide. Iz jedne kocke izrezat će pravilni tetraedar čiji bridovi su dijagonale strana (ploha) kocke, a vrhovi su mu četiri od osam vrhova kocke. Iz druge kocke će izrezati piramidu takvu da je njezin vrh u jednom vrhu  $A$  kocke, a vrhovi baze te piramide su u središtima triju strana (ploha) kocke koje ne sadrže vrh  $A$ . Po volji izračunajte ili omjer volumena ili omjer oplošja tih dviju piramida.

**Rješenje.** U izračunima se očito pojavljuju jednakokranični i jednakokračni trokuti, njihove visine i površine, pa ako ne znamo napamet, prvo treba (koristeći Pitagorin poučak) izvesti formule:

- Jednakokranični trokut sa stranicom duljinu  $x$  ima visinu duljine  $h = x \frac{\sqrt{3}}{2}$  i površinu  $P = x^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ ;
- jednakokračni trokut s osnovicom duljine  $x$  i krakovima duljine  $y$  ima visinu na osnovicu duljine  $h = \frac{1}{2} \sqrt{4y^2 - x^2}$  i površinu  $P = \frac{x}{4} \sqrt{4y^2 - x^2}$ .



Omjer oplošja:

Bridovi pravilnog tetraedra izrezanog iz kocke imaju duljine  $b = a\sqrt{2}$  (jer su to dijagonale strana kocke). Dakle, baza mu je jednakokranični trokut površine  $B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$ . Stoga mu je oplošje  $4B_1$ , tj.

$$A_1 = 2\sqrt{3}a^2.$$

Za drugu piramidu imamo (vidi sliku gore desno) da joj je baza jednakokranični trokut s bridom duljine  $b$ , a pobočke su joj jednakokračni trokuti s osnovicom duljine  $b$  i krakovima duljine  $c$ . S obzirom na pozicije vrhova baze u odnosu na kocku vidimo

da je  $b = a\frac{\sqrt{2}}{2}$  pa je površina baze  $B_2 = a^2\frac{\sqrt{3}}{8}$ . Krakovi pobočki su pak hipotenuze pravokutnih trokuta s katetama  $a$  i  $a\frac{\sqrt{2}}{2}$  pa je  $c = a\sqrt{\frac{3}{2}}$ . Stoga su površine pobočki  $P_2 = a\frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{6a^2 - \frac{a^2}{2}} = a^2\frac{\sqrt{11}}{8}$ , odnosno oplošje druge piramide je  $A_2 = B_2 + 3P_2$ :

$$A_2 = a^2 \frac{3\sqrt{11} + \sqrt{3}}{8}.$$

Dakle omjer oplošja je:

$$A_1 : A_2 = 16\sqrt{3} : (3\sqrt{11} + \sqrt{3}).$$

Omjer volumena:

Visina pravilnog tetraedra prolazi kroz jedan njegov vrh i težište nasuprotne strane, a ono težišnicu (koja je za jednakostranični trokut isto što i njegova visina) dijeli u omjeru 2 : 1 pa je (vidi sliku na prethodnoj strani gore lijevo) visina pravilnog tetraedra  $v = \sqrt{b^2 - \frac{4}{9}h^2} = \sqrt{b^2 - \frac{12}{36}b^2} = b\frac{\sqrt{6}}{3} = a\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Stoga mu je volumen

$$V_1 = \frac{1}{3}v B_1 = \frac{a^3}{3}.$$

Za drugu piramidu imamo (vidi sliku na prethodnoj strani gore desno) da joj je baza jednakostranični trokut s bridom duljine  $b$ , a pobočke su joj jednakokračni trokuti s osnovicom duljine  $b$  i krakovima duljine  $c$ . S obzirom na pozicije vrhova baze u odnosu na kocku vidimo da je  $b = a\frac{\sqrt{2}}{2}$  pa je površina baze  $B_2 = a^2\frac{\sqrt{3}}{8}$ . Budući da je baza jednakostranična, visina  $v$  ove piramide iz vrha  $A$  prolazi kroz težište baze koje težišnicu duljine  $h = a\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\frac{\sqrt{6}}{4}$  dijeli u omjeru 2 : 1 pa je po Pitagorinom poučku  $v = \sqrt{\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$ . Stoga je volumen druge piramide

$$V_2 = \frac{1}{3}B_2v = \frac{1}{12}a^3.$$

Dakle, omjer volumena je

$$V_1 : V_2 = \frac{1}{3} : \frac{1}{12} = 4 : 1.$$

**Zadatak 5.** Iako su ranija istraživanja ukazivala da volumen  $V$  u ovisnosti o vremenu  $t$  pada eksponencijalno, istraživanje grupe znanstvenika sa Sveučilišta u Bremenu, Njemačka, su pokazala da se ne radi o jednostavnom eksponencijalnom procesu. Prema njihovom radu *The Apollonian decay of beer foam bubble size distribution and the lattices of Young diagrams and their correlated mixing functions* objavljenom 2006. u časopisu *Discrete Dynamics in Nature and Society*, ovisnost  $V$  o  $t$  dobro je opisana formulom

$$\frac{V(t)}{\text{mL}} = \exp\left(a - bt - ct^2\sqrt{t}\right),$$

gdje su  $a$ ,  $b$  i  $c$  pozitivne konstante (ovisne o temperaturi, vrsti pive i čaši u koju je utočena). Također, uočili su da za neke vrste pive, primjerice *Beck's Pils*, se  $V(t)$  do nekog trenutka  $t_1$  može dobro aproksimirati s funkcijom oblika  $V_1(t) = \exp(a_1 - b_1 t)$ , a nakon nekog trenutka  $t_2 > t_1$  s  $V_2(t) = \exp(a_2 - c_2 t^2\sqrt{t})$  (s pozitivnim konstantama  $a_1, a_2, b_1, c_2$ ). Pritom su za eksperiment s 20 mL pive *Beck's Pils* (u čaši od 100 mL i promjera 26 cm pri 24°C) dobili da je, do na mjerne jedinice,  $a = 3,64$ ,  $b = 4,34 \cdot 10^{-3}$ ,  $c = 6,66 \cdot 10^{-7}$ ,  $a_1 = 3,66$ ,  $b_1 = 5,40 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_2 = 3,02$ ,  $c_2 = 1,13 \cdot 10^{-6}$ .

1. (2) Za konstante  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  i  $c_2$  uz iznose napišite korektne mjerne jedinice.
2. (15) U istom koordinatnom sustavu nacrtajte grafove funkcija  $V$ ,  $V_1$  i  $V_2$  za *Beck's Pils* za  $0 \leq t \leq 400$  s. Pritom možete kao poznatu koristiti činjenicu (čiji dokaz bi bio dosta dug) da je graf funkcije  $V$  konveksan za sve pozitivne  $t$ .
3. (3) Temeljem tih grafova procijenite vremena  $t_1$  i  $t_2$ . Pritom obavezno  $t_1$  i  $t_2$  označite i na vašoj slici s grafovima!

### Rješenje.

(a) Konstante  $a$ ,  $a_1$  i  $a_2$  su „čisti“ brojevi. Konstante  $b$  i  $b_1$  imaju mjernu jedinicu  $s^{-1}$ . Konstante  $c$  i  $c_2$  imaju mjernu jedinicu  $s^{-5/2}$ .

(b) S obzirom na to da smo fiksirali mjerne jedinice, nastavljamo korištenje formula bez njih. Treba nacrtati grafove od

$$V(t) = \exp\left(3.64 - 4.34 \cdot 10^{-3}t - 6.66 \cdot 10^{-7}t^2\sqrt{t}\right),$$

$$V_1(t) = \exp\left(3.66 - 5.40 \cdot 10^{-3}t\right), \quad V_2(t) = \exp\left(3.02 - 1.13 \cdot 10^{-6}t^2\sqrt{t}\right).$$

Uočimo da je domena sve tri funkcije skup  $[0, +\infty)$ . Oznaka za os apscisa je  $t/s$ , a za os ordinata  $V/mL$ . S obzirom na kontekst, a i s obzirom na formule, očito je da je os apscisa horizontalna asimptota za sva tri grafa. Sjecišta grafova s  $V/mL$ -osi redom (za  $V$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ )  $\exp(3.64) = 38.1$ ,  $\exp(3.66) \approx 38.9$  i  $\exp(3.02) \approx 20.5$  (uzevši u obzir da su svi podaci s 3 značajne znamenke).

Najlakše je skicirati graf funkcije  $V_1$  jer se radi o transformiranoj padajućoj eksponencijalnoj funkciji:

$$V_1(t) = \exp(a_1) \exp(-b_1 t) = V_1(0) \exp(-b_1 t) = 38.9 \exp(-0.0054t),$$

tj. imamo padajuću konveksnu funkciju kroz točku  $(0, 38.9)$  s desnom horizontalnom asimptotom (crveno na slici dolje). Radi bolje usporedbe grafova u (c)-podzadatku, treba nam i „zadnja“ razmatrana vrijednost  $V_1(400s) = 4.49$ .

Ostaju još pitanja pada i rasta (s obzirom na kontekst, očekujemo da su sve tri funkcije padajuće) i konveksnosti i konkavnosti za funkcije  $V$  i  $V_2$ . Imamo:

$$V'(t) = \exp(a - bt - ct^2 \sqrt{t}) \cdot (-b - 2c) < 0 \quad \text{za sve } t > 0,$$

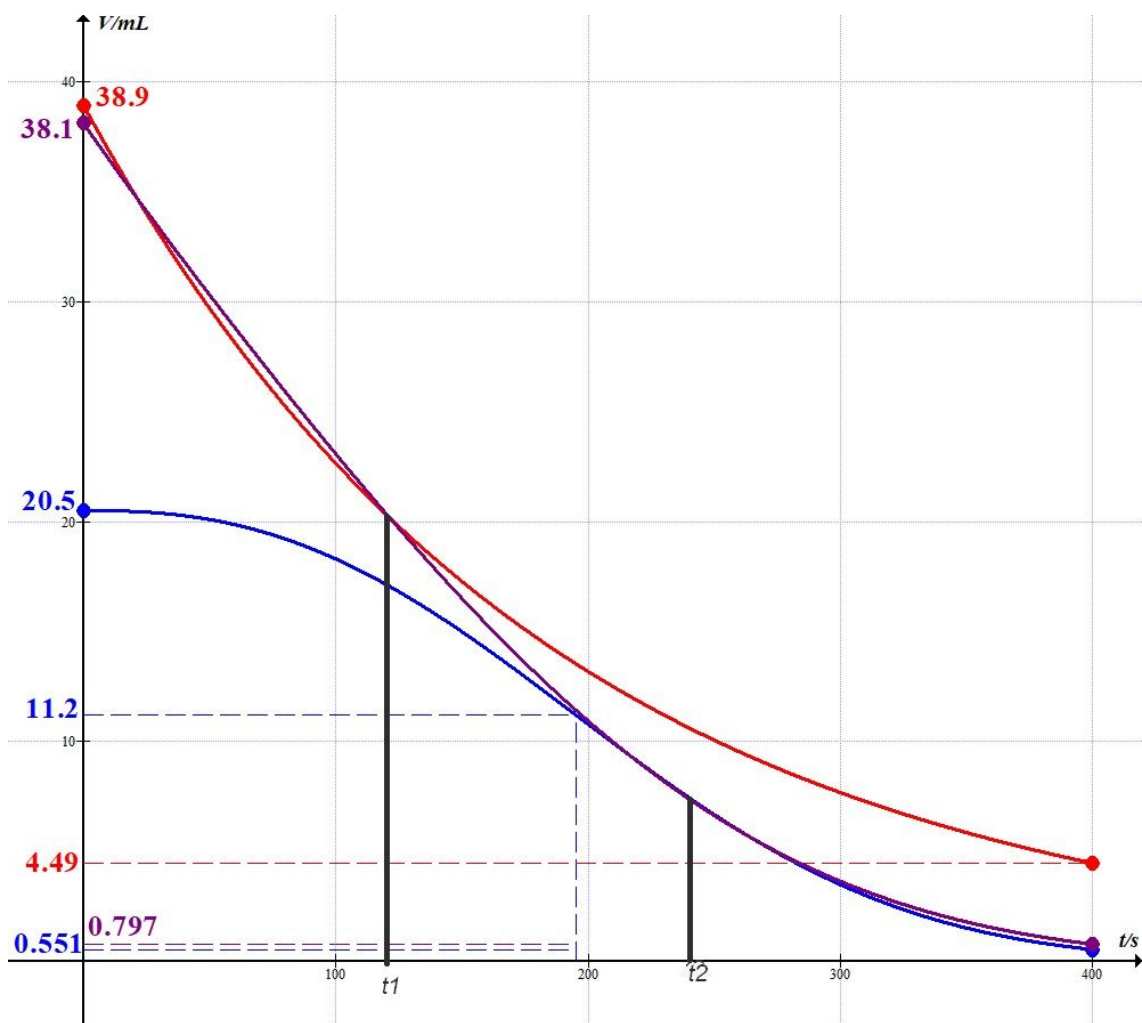
$$V_2'(t) = \exp(a_2 - c_2 t^2 \sqrt{t}) \cdot (-2c_2) < 0 \quad \text{za sve } t > 0,$$

dakle su stvarno i ove dvije funkcije padajuće. Nadalje, znamo da je  $V$  konveksna, pa možemo nacrtati i njezin graf: Padajući (ljubičasti) konveksni graf od točke  $(0, 38.1)$  do  $(400, V(400)) = (400, 0.797)$ . Naposljetku,

$$V_2''(t) = \frac{5c_2}{4} \exp(a_2 - c_2 t^2 \sqrt{t}) \cdot \sqrt{t} \cdot (5c_2 t^{5/2} - 3) = + \cdot (5c_2 t^{5/2} - 3),$$

pa je  $V_2''(t) < 0$  za  $t < \left(\frac{3}{5c_2}\right)^{2/5} = 195s$ , a  $V_2''(t) > 0$  za  $t > 195s$ , tj. funkcija prvo konkavno pada to točke infleksije  $(195, V_2(195)) = (195, 11.2)$ , a onda dalje konveksno pada, pri čemu nas zanima samo dio do  $(400, V_2(400)) = (400, 0.551)$  (plavi graf). (Svi grafovi su na sljedećoj stranici).

(c) Ovisno o preciznosti crtanja grafova u (b)-dijelu zadatka dobit ćete  $t_1 \approx 120s$  (točka nakon koje se crveni i ljubičasti graf jasno razdvajaju) i  $t_2 \approx 230s$  (točka prije koje su plavi i ljubičasti graf jasno razdvojeni).



## Matematika 2 (18. 2. 2026.): 5. zadatak

**Zadatak 5.** Tvrtka *Hik* među ostalim proizvodi krigle za pivo i uočila je da proizvodnja dobro prati teorijski model poznat kao Cobb-Douglasova funkcija: Ako ulože kapital od  $K$  € i  $L$  radnih sati svih osoba koje su radile u jednoj godini, godišnje će proizvesti  $N$  krigli piva, pri čemu je

$$N = c L^\alpha K^{1-\alpha}$$

za neke pozitivne konstante  $c$  i  $\alpha$ . Pritom svake godine u proizvodnju krigli ulažu točno 40 k€. Podaci tvrtke *Hik* o uloženim radnim satima i proizvedenim kriglama iz posljednje četiri godine su:

| Godina | $L$ | $N$  |
|--------|-----|------|
| 2022.  | 161 | 2400 |
| 2023.  | 146 | 1790 |
| 2024.  | 194 | 2310 |
| 2025.  | 196 | 2180 |

Koristeći metodu najmanjih kvadrata izračunajte iznose konstanti  $c$  i  $\alpha$  za proizvodnju krigli u tvrtci *Hik*. Koliko krigli piva će *Hik* proizvesti 2026. godine ako planira ponovno uložiti točno 40 k€ i ako se u proizvodnji krigli piva odradi ukupno 150 sati?

**Rješenje.** Logaritmiranjem Cobb-Douglasove funkcije dobivamo da je

$$\begin{aligned} \ln N &= \ln c + \alpha \ln L + (1 - \alpha) \ln K = \\ &= \alpha(\ln L - \ln K) + \ln c + \ln K = \alpha(\ln L - \ln 40000) + \ln c + \ln 40000. \end{aligned}$$

Stavimo  $y = \ln N$ ,  $x = \ln L - \ln 40000$ ,  $a = \alpha$  i  $b = \ln c + \ln 40000$ . Tada imamo tablicu

| $x$          | $y$         | $x^2$       | $x y$        |
|--------------|-------------|-------------|--------------|
| -5.515230368 | 7.783224016 | 30.41776601 | -42.92627346 |
| -5.613028111 | 7.489970899 | 31.50608458 | -42.04141721 |
| -5.328776574 | 7.745002804 | 28.39585978 | -41.27138951 |
| -5.318520074 | 7.687080156 | 28.28665578 | -40.88389012 |
| -21.77555513 | 30.70527787 | 118.6063661 | -167.1229703 |

Formule za metodu najmanjih kvadrata daju  $a = 0.528991388\dots = \alpha$  i  $b = 10.5566\dots$ , dakle  $c = 0.960757\dots$ . Uvrštavanje u Cobb-Douglasovu funkciju daje da 150 radnih sati u 2026. očekujemo proizvodnju  $N = 2001.506\dots$ , dakle 2001 kriglu.