

Matematika 1

1. Navijači Tomislav, Krešimir i Stjepan sinoć su se tužni vratili iz Arlingtona gdje su gledali kako Hrvatska gubi od Engleske. Ulaznice su bili kupili od preprodavača Mije i Đure, koji su im prije mjesec dana ulaznice naplatili svakom po 1000 €.

U međuvremenu su Mijo i Đuro shvatili da im preprodaja preslabo ide pa su spustili cijene ulaznica. Kad su usporedili prodaju u dva tjedna prije i poslije sniženja uočili su da su prodali 12 puta više ulaznica, a pritom ostvarili dvostruko veći prihod.

Želeći zadržati mušterije, jutros su poslali mail Tomislavu, Krešimiru i Stjepanu da su im zabunom naplatili previše. Budući je Mijo trenutno u Torontu zbog utakmice s Panamom, ponudio im je da se sastanu s Đurom koji će im vratiti razliku novaca. Oni pristaju i nalaze se s Đurom, kojemu je Mijo dao stvarni iznos razlike u cijeni. Đuro pak nije tako pošten kao Mijo pa je kad se našao s Tomislavom, Krešimirom i Stjepanom dao je svakom po 100 €, a sebi zadržao ostatak.

- (a) Ako s N € označimo cijenu triju ulaznica nakon opisanog sniženja, a s P € razliku do plaćenih 3000 € koju je Mijo dao Đuri, izračunajte N i P .
- (b) S obzirom na poznato, Tomislav, Krešimir i Stjepan su karte ukupno platili 2700 €, a Đuro je zadržao ostatak od $P - 300$ €, što ukupno čini $P + 2400$ €. Je li to jednako 3000 €? Ako da, dokažite, ako ne, objasnite gdje je nestao dio novaca odnosno odakle se stvorio višak.

Rješenje.

(a) Neka su po cijeni 1000 € Mijo i Đuro prodali n ulaznica. Dakle, ostvarili su prihod od $1000n$ €. Nakon sniženja za $p\%$ ostvarili su prihod $2000n$ €, pri čemu su prodali $12n$ ulaznica po cijeni $p\%$ 1000 €. Dakle,

$$2000n = 12n \cdot p\% \cdot 1000 \Rightarrow 1 = 6 \cdot p\%,$$

dakle cijena je bila snižena za $p\% = \frac{1}{6}$. To znači da je nova cijena triju ulaznica $N = \frac{5}{6} \cdot 3000 = 2500$ €, odnosno Mijo je Đuri dao 500 €.

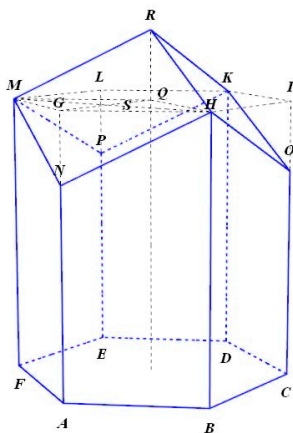
(b) Đuro je stoga sebi zadržao 200 € pa je stoga ukupan iznos onog što su platili Tomislav, Krešimir i Stjepan te što je zadržao Đuro 2900 €, dakle fali 100 € do 3000 €. Gdje je tih 100 €? Ovaj zbroj 2900 € niti je zbroj troškova niti je zbroj prihoda—pomiješano je što se s čime zbraja. Stvarna raspodjela novca iz perspektivne kase Mije i Đure je: Primili su 3000 €, od čega je 2500 € stvarni iznos ulaznica, 200 € je završilo u Đurinom džepu, a 300 € je

vraćeno Tomislavu, Krešimiru i Stjepan. Alternativno, iz perspektive Tomislava, Krešimira i Stjepana, oni su platili 2700 € i imaju 300 €, opet ukupno 3000 €. Raspodjela nekog iznosa novca, ovdje 3000 €, se može pratiti samo kao zbroj imovine i obveza pojedinog subjekta u transakcijama!

5. Ruđer Josip Bošković je u sklopu *Philosophiae recentioris versibus traditae libri decem* (1755. – 1792.) objavio matematički opis stanice pčelinjeg saća pod naslovom *De apium cellulis*. Kao što je dobro i od davnina poznato, pčelinja saća u presjeku imaju oblik pravilnog šesterokuta. To su još antički grčki matematičari objasnili razlozima ekonomije, odnosno štednje voska: Od svih pravilnih likova kojima se može popločati ravnina, pravilni šesterokut za zadani opseg ima najveću površinu. U 17. st. je uočeno da dok sa svakim od horizontalnih susjeda stanice saća dijele po jednu od svojih šest ploha, koje im gledano sprijeda daju oblik pravilnih šesterokuta, njihove stražnje strane nisu ravne, nego su zatvorene s po tri romba. U prvoj polovici 18. st. je francuski prirodoslovac René Réaumur formulisao pretpostavku da bi razlog tomu mogao biti u tome da se zadani volumen obuhvati najmanjom površinom, što bi bilo u skladu s pretpostavkom da pčele grade saća maksimalno štedeći vosak. Tako je 1740. formulisao matematički zadatak:

Zatvoriti vrh pravilne šesterostrane prizme krovom koji se sastoji od tri sukladna romba tako da se dobije tijelo zadanog volumena i minimalnog oplošja.

Bošković je taj problem riješio 1755., koristeći skicu kao na slici dolje (uočite da je na toj skici $GHIKLM$ pravilni šesterokut $\odot$ sa središtem Q i S središte romba $MNHR$ koje leži u ravnini od $\odot$), i dokazao da su kutovi u traženim rombima (zaokruženo na sekunde) $10928'16,39''$ i $7031'43,61''$. Poznato je i da su stanice saća relativno duboke pa je uvijek $a < 2b$. Dokažite da je Bošković dobio točno rješenje Réaumurovog problema!



Rješenje.

Prvo, osnovica stanice je otvorena (to je onaj šesterokut kojeg vidimo u presjeku pčelinjeg saća), dakle oplošje koje treba minimizirati je zbroj 6 površina jednog od sukladnih pobočnih trapeza plus 3 površine pojedinog od rombova. Neka je duljina stranice baze $ABCDEF$ označena s a , visina koju bi imala šesterostrana prizma $ABCDEFGHJKLM$ (dakle, prizma koja prolazi trima višima od šest donjih vrhova romba) neka je b . Odredit ćemo koliko su spuštjeni vrhovi N , O i P , tj. iznos $x = |GN|$.

Budući da je $\square$ pravilan, udaljenosti $|QH|$ i $|MQ|$ su jednake udaljenostima $|MG|$ i $|GH|$, dakle je $MGHQ$ romb. Stoga piramide $MGHN$ i $MHQR$ imaju jednaki volumen, a isti ima i piramida $MGHR$. Stoga je volumen piramide $MGHQR$ jednak zbroju volumena piramida $MGHN$ i $MHQR$. Iz razloga simetrije analogna tvrdnja vrijedi i za piramide pri vrhovima O i L , pa je neovisno o obliku rombova $RMNH$, $RHOK$ i $RKPM$ volumen stanice jednak volumenu kojeg dobijemo ako stanica završava šesterokutom $GHIKLM$. Drugim riječima, neovisno o obliku rombova, volumen stanice biti će isti kao da je oblika pravilne šesterostrane prizme, pa je tvrdnja o fiksnom volumenu ekvivalentna fiksiranju iznosa a i b .

Površina svakog pobočnog trapeza je $a \cdot \frac{b+(b-x)}{2} = ab - \frac{1}{2}ax$.

Površina romba $MNHR$ je pola umnoška dijagonala, dakle $\frac{1}{2}|MH| |NR| = \frac{1}{2}|AC| \cdot 2|SN| = a\sqrt{3}|SN| = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{|SG|^2 + |GN|^2} = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4} + x^2} = a \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{4} + 3x^2}$.

Stoga je oplošje dano formulom

$$O = O(x) = 6 \cdot (ab - \frac{1}{2}ax) + 3 \cdot a \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{4} + 3x^2} = 6ab - 3ax + 3a\sqrt{3x^2 + \frac{3}{4}a^2}, \quad 0 < x < b$$

Funkcija je elementarna i derivabilna na $\langle 0, b \rangle$ pa su točke ekstrema među stacionarnim točkama:

$$O'(x) = -3a + 3a \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + \frac{3}{4}a^2}} \cdot 6x$$

pa je jedina stacionarna točka $x_0 = a\frac{\sqrt{2}}{4} < b$. Sad se lako provjeri da je to točka lokalnog minimuma i da O pada za $0 < x < x_0$ i raste za $x_0 < x < b$ pa se radi o globalnom minimumu.

Budući da je $|RN| = 2|SN|$, slijedi da je $|RN|^2 = 4|SN|^2 = 12x^2 = 3a^2/2 = |MH|^2/2$. Ako je $\alpha = \angle RNH$, slijedi da je $\operatorname{tg} \alpha = |SH|/|SN| = |MH|/|RN| = \sqrt{2}$. Stoga je $\angle MNH \approx 10928'16,39''$, a $\angle NHR \approx 7031'43,61''$.

Matematika 2

Linearan operator simetrije $\hat{A} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ s obzirom na neku bazu $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ zadanu parametrima $a = 2 \text{ cm}$, $b = \sqrt{2} \text{ cm}$, $c = \sqrt{3} \text{ cm}$, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\gamma = 45^\circ$ ima matricu

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ -8 & -5 & -4 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (8 bodova) Je li $\hat{A}$ centralna simetrija, zrcaljenje, rotacija ili rotoinverzija? Argumentirajte! Zatim odredite element simetrije od $\hat{A}$ (centar ako je centralna simetrija, zrcalnu ravninu ako je zrcaljenje, os ako je rotacija ili rotoinverzija). Opis (koordinate odnosno jednačba/e) elementa simetrije se mora odnositi na bazu $\mathcal{B}$.

(b) (12 bodova)

- Ako je $\hat{A}$ centralna simetrija, odredite kamo $\hat{A}$ preslikava jedan vektor normale mrežnih ravnina smjera (111).
- Ako je $\hat{A}$ rotacija ili rotoinverzija, odredite kamo $\hat{A}$ preslikava jedan nenul-vektor (po vlastitom odabiru) okomit na os rotacije odnosno rotoinverzije.
- Ako je $\hat{A}$ zrcaljenje, odredite kamo $\hat{A}$ preslikava jedan vektor normale mrežnih ravnina istog smjera kao što je ravnina zrcaljenja.

Rješenje.

(a) $\hat{A}$ očito nije centralna simetrija jer ona s obzirom na sve baze ima matricu $-I_3$. Determinanta matrice A je

$$\left| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ -8 & -5 & -4 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 7 & 4 & 2 \\ -8 & -5 & -4 \\ -4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \dots = -1,$$

dakle $\hat{A}$ nije rotacija. Trag od A iznosi 1 pa ako je $\hat{A}$ rotoinverzija s kutem ϕ mora vrijediti $-2 \cos \phi - 1 = 1$, tj. $\cos \phi = -1$, dakle ako se radi o rotoinverziji, to je rotoinverzija reda 2. No, rotoinverzija reda 2 je isto što i zrcaljenje s obzirom na ravninu okomitu na os. Dakle, preostaje potvrditi da se radi o zrcaljenju, tj. da su i 1 i -1 svojstvene vrijednosti.¹ Budući da je $\det(\frac{1}{3}B) =$

¹Ako tko prvo ide to provjeriti, nema potrebe za prethodnim argumentima jer samo zrcaljenja imaju i -1 i 1 za svojstvene vrijednosti.

$\frac{1}{27} \det B$ za svaku 3×3 -matricu B i da je $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$ i A oblika $A = \frac{1}{3}B$, račun s razlomcima možemo izbjeći koristeći $k_A(\lambda) = \frac{1}{27} \det(B - 3\lambda)$ pa najlakše (najbrže) provjerimo jesu li $\lambda = \pm 1$ svojstvene vrijednosti od A tako da ih uvrstimo u $k_A(\lambda)$ i vidimo dobijemo li nulu, tj. provjerimo da je

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -8 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot (-2) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 4 & 2 \\ -8 & -2 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

(prva je nula jer ima jednake retke, a druga jer je prvi redak zbroj drugog i trećeg). Dakle, $\hat{A}$ je zrcaljenje prostora s obzirom na neku ravninu kroz ishodište (ako ravnina ne ide kroz ishodište, zrcaljenje nije linearan operator).

Zrcalna ravnina mora biti ravnina kroz ishodište koja je svojstveni potprostor svojstvene vrijednosti 1, a njega dobijemo rješavanjem sustava

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

(iskoristili smo već elementarne transformacije koje smo već iskoristili pri računanju determinante), tj. $2x + 2y + z = 0$. Stoga imamo dvoparametarsko rješenje (što je i očekivano jer je svojstvena vrijednost 1 kod zrcaljenja degenerirana): $x = t$, $y = s$, $z = -2t - 2s$, $t, s \in \mathbb{R}$, što su ujedno i parametarske jednažbe tražene zrcalne ravnine.

(c) Iz parametarskih jednadžbi ravnine vidimo da su dva linearno nezavisna vektora u toj ravnini $[1, 0, -2]$ i $[0, 1, -2]$ pa je vektor normale smjera mrežnih ravnina paralelnih s tom ravninom je bilo koji vektor istog smjera kao

$$[1, 0, -2] \times [0, 1, -2] = V \begin{vmatrix} \vec{a}^* & \vec{b}^* & \vec{c}^* \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = V[2, 2, 1]^*,$$

dakle možemo uzeti $\vec{n} = [2, 2, -1]^*$. No, ovo su koordinate s obzirom na recipročnu bazu. Stoga trebamo koordinate vektora $\vec{a}^*$, $\vec{b}^*$, $\vec{c}^*$ recipročne baze s obzirom na polaznu direktnu bazu. Budući da se to traženje koordinate svodi na množenje izraza oblika $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ skalarno redom s $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, račun se ubrzava ako izračunamo metrički tenzor baze $\mathcal{B}$:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kad tražimo kooordinate od $\vec{a}^*$ množenjem skalarom redom s $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ redom dobijemo 1, 0, 0; kad tražimo kooordinate od $\vec{b}^*$ množenjem skalarom redom s $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ redom dobijemo 0, 1, 0; kad tražimo kooordinate od $\vec{c}^*$ množenjem skalarom redom s $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ redom dobijemo 0, 0, 1. Dakle, koordinate vektora recipročne baze dobit ćemo kao stupce inverzne matrice od M :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{3}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_3 & | & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ & & -\frac{3}{2} & 2 & 1 \\ & & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dakle, $\vec{n} = [2, 2, -1]^* = 2\vec{a}^* + 2\vec{b}^* - \vec{c}^* = 2\left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -1\right] + 2\left[-\frac{3}{2}, 2, 1\right] - [-1, 1, 1] = [1, 0, -1]$ te je tražena slika $\hat{A}\vec{n}$ tog vektora

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ -8 & -5 & -4 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} [5, -4, -5].$$