

Matematika 1

1. Jedan poznati matematičarski trik odvija se na sljedeći način:

Matematičar Vidoviti Mujo poziva jednog dobrovoljca da sudjeluje u triku. Javila se Fata. Fata izlazi pred ploču, a Mujo joj daje kedu i zamoli da mu čvrsto zaveže tamni neprozirni šal oko očiju da ne bi vidio što Fata piše na ploči. Pita Mujo Fata: "Bona, Fato, znadeš li ti zbrajat i oduzimati bez kalkulatora?". Odvratila Fata: „Da šta zbrajat i oduzimati, znam i množiti. Al' dijeliti, jok!" Nakon toga kaže Mujo Fati: „Odaberi troznamenkasti broj kojemu prva i zadnja znamenka nisu jednake i zapiši ga.“ Zapiše Fata broj. Kaže Mujo dalje: „Obrni svom broju redoslijed znamenki, recimo ako si zapisala 123 zapiši 321.“ Kaže Fata: „Jesam Mujo, što ću sad?". Mujo odvratila: „Sad imaš dva broja. Oduzmi manjeg od većeg i reci mi kad si izračunala.“ Izračuna Fata i kaže Muji „Gotovo!“. Nastavlja Mujo: „Ako si dobila broj s manje od dvije znamenke, napiši mu ispred nulu ili nule tako da bude troznamenkast.“ Fata reče: „Aha“. Naposljetku će Mujo: „Sad tom broju opet obrni znamenke. Nakon toga zbroji zadnja dva broja koja si napisala.“ Javi se Fata da je gotova, pa će joj Mujo: „Jesi sama izabrala svoj broj? Jesam te ja ičim nagovarao da izabereš određeni broj? Jesam li mogao znati koji si broj izabrala? E, nisam, ali zato znam koji si rezultat dobila na kraju: 1089.“ Fata će: „Bolan Mujo, kako pogodi?"

Vaš zadatak je da Fati (a i Muji, ako on to već ne zna) objasnite kako i zašto je Mujo pogodio konačni rezultat!

Rješenje. Ako Fata primjerice krene od 781, onda će računati: $781 - 187 = 594$, $594 + 495 = 1089$. Mujo može pogoditi rezultat jer je taj uvijek 1089. Zašto?

Fata na početku bira broj $(abc) = 100a + 10b + c$ sa znamenkama $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 9\}$, pri čemu $a \neq c$ (to osigurava da u oduzimanju ne dobije nulu). Obrnuti broj je onda $(cba) = 100c + 10b + a$. Uzmimo da je $a > c$ (inače samo zamijenimo uloge prvog i drugog broja). U prvom koraku oduzimanje onda daje

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100(a - c) + c - a.$$

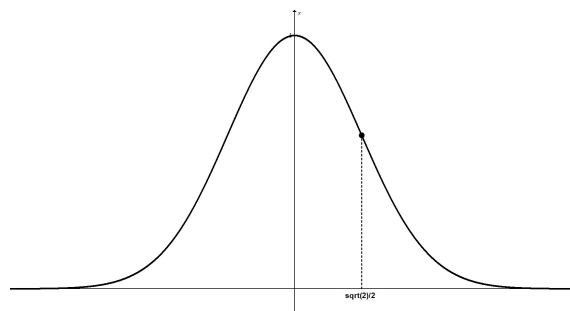
Budući je $a > c$, znači da oduzimanje na mjestu jedinice prenosi znamenku na mjesto desetica (posuđuje se desetka da bi se izvelo oduzimanje na zadnjem mjestu), a ta pak prenosi znamenku i na mjesto stotica (npr., $672 - 276 = 396 = 100(6 - 2 - 1) + 90 + (10 + 2 - 6)$). Dakle, dobit ćemo broj kojem je prva znamenka $a - c - 1$ (zbog Mujinih uputa, ako je ovo 0 svejedno ju Fata ispisuje), druga je 9, a treća je $10 + c - a$: broj $100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)$.

Obrtanje poretka znamenki tog broja daje $100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$, što u konačnom zbroju daje

$$100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a) + 100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1) = 1089.$$

5. S $p[H]$ označavamo suprotni dekadski logaritam (množinske) koncentracije H^+ iona u otopini, podijeljene s mol/L. Tijekom nekog eksperimenta je u svakom trenutku brzina promjene $p[H]$ bila proporcionalna proteklom vremenu, početna koncentracija H^+ iona je bila 10^{-4} mol/L i $p[H]$ je nakon sat vremena iznosio 6. Podrazumijevamo da su svi iznosi u ovom zadatku egzaktni i da se zanemaruje efekt autoionizacije.

- (a) (3) Odredite vrijeme T potrebno da otopina postane neutralna, tj. da $p[H]$ postane 7.
- (b) (10) Izračunajte prosječni $p[H]$ i prosječnu brzinu promjene $p[H]$ u vremenskom rasponu od početka eksperimenta do trenutke T .
- (c) (7) U kojem trenutku τ se postiže prosječni $p[H]$ iz (b) dijela zadatka? Postiže li se u istom trenutku i prosječna koncentracija H^+ -iona za isti vremenski interval? Argumentirajte (nije potrebno precizno računati odgovarajuće iznose)! Kao poznat možete koristiti sljedeći graf funkcije $f(x) = \exp(-x^2)$:



Rješenje. Da ne pišemo mjerne jedinice kroz račun, stavimo $f(t) = -p[H](t/h)$ i $g(t) = c_{H^+}(t/h)/(\text{mol/L})$. Prvo iz uvjeta na brzinu promjene $p[H]$ imamo da je $f'(t) = k t$ za neku konstantu k , dakle je $f(t) = \frac{k}{2}t^2 + C$. Početni uvjet nam daje $f(0) = 4$, dakle je $C = 4$. Drugi uvjet nam daje $f(1) = 6$, dakle $6 = \frac{k}{2} + 4$, odnosno $k = 4$:

$$f(t) = 4t^2 + 4, \quad t \geq 0.$$

Znamo i da je $f(t) = -\log g(t)$, dakle je ($10^x = e^{x \ln 10}$)

$$g(t) = 10^{-f(t)} = 10^{-4} \exp(-4t^2 \ln 10), \quad t \geq 0.$$

(a) $f(T) = 7 \Leftrightarrow 4T^2 + 4 = 7$, dakle je $T = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sati.

(b) Prosječni $p[H]$ u vremenskom intervalu $0 \leq t \leq T$ je

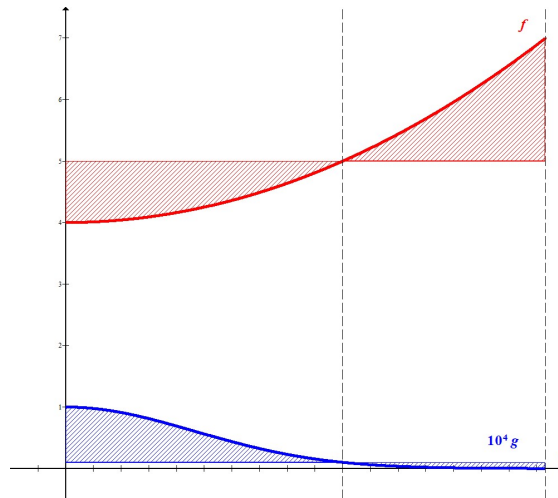
$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T (4 + 4t^2) dt = \dots = 5.$$

Prosječna brzina $v = \frac{dp[H]}{dt}$ promjene $p[H]$ je, zbog inverznosti integriranja i deriviranja, jednaka $\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dp[H]}{dt} dt = \frac{p[H]_T - p[H]_0}{T}$, tj.

$$\bar{v} = \frac{7 - 4}{\sqrt{3}/2} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

(recipročnih sati).

(c) Prosječni $p[H]$ iznosa 5 se postiže nakon τ takvog da je $f(\tau) = 5$, dakle nakon $\tau = \frac{1}{2}$ sata. No, prosječna koncentracija Hk iona za $0 \leq t \leq T$ neće se postići u istom trenutku. Pojednostavljeni, ne sasvim precizni, argument je u tome što kvadratne funkcije i logaritamske nisu proporcionalne niti se razlikuju samo za konstanta. Precizniji argument dobijemo skiciranjem grafova od f i $10^4 g$ (skaliranje zavisne ne mijenja iznos nezavisne varijable za koji se postiže prosječna vrijednost) u istom koordinatnom sustavu. Graf funkcije g , tj. do na mjerne jedinice ovisnosti koncentracije H^+ -iona o vremenu, lako dobijemo transformacijama grafa danog uz zadatak. Ako u istom koordinatnom sustavu skiciramo i parabolu $y = f(t)$ i označimo $\tau = \frac{1}{2}$ na t -osi, postaje očito da se odgovarajuće površine (vidi skriptu) ispod i iznad pravca $y = g(\tau)$ u rasponu $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ za f izjednače (to i jest smisao prosječne vrijednosti), ali za g ne (nego za bitno manji t , dakle bitno ranije).



Matematika 2

5. U dva spojena spremnika se u svakom trenutku t nalaze vodene otopine neke soli. Otopine se stalno miješaju te se može pretpostaviti da su u svakom trenutku homogene. Početi od nekog trenutka, u kojem oba spremnika sadrže isti volumen otopine, u prvi spremnik se počinje ulijevati čista voda brzinom 2 L/min, a iz njega se u drugi spremnik izlijeva otopina brzinom 3 L/min. Počevši od istog trenutka, iz drugog spremnika se u prvi otopina prelijeva brzinom 1 L/min, a iz njega se otopina izlijeva izvan sustava brzinom od 2 L/min.

- (a) (12) Postavite sustav običnih diferencijalnih jednadžbi za ovisnosti masa soli u oba spremnika o vremenu i skicirajte njegov fazni dijagram. Sustav ne trebate rješavati i u skladu s time nije potrebno određivati dijelove ravnine koje odgovaraju različitim kombinacijama predznaka konstantni integriranja u općem rješenju.
- (b) (4) Temeljem faznog dijagrama argumentirajte hoće li se mase soli u (ni)jednom ili oba spremnika s vremenom približavati nuli ili neograničeno povećavati.
- (c) (4) Na skici faznog dijagrama istaknite trajektorije koje odgovaraju početnim uvjetima kad drugi od spremnika na početku sadrži čistu vodu!

Rješenje.

(a) Neka su $x(t)$ i $y(t)$ mase soli (u kg) u prvom odnosno drugom spremniku u trenutku t . S obzirom na brzine ulijevanja i izlijevanja očito su volumeni otopina u oba spremnika konstantni. U svakoj minuti u prvi spremnik izvana ulazi 0 kg soli brzinom 2 L/min i iz drugog spremnika $y(t)$ kg soli brzinom 1 L/min, a izlijeva se $x(t)$ kg soli brzinom 3 L/min. Dakle:

$$\dot{x} = -3x + y.$$

U svakoj minuti u drugi spremnik iz prvog ulazi $x(t)$ kg soli brzinom 3 L/min, a iz njega se izlijeva $y(t)$ kg soli brzinom 1 L/min u prvi spremnik i još $y(t)$ kg soli brzinom 2 L/min. Dakle:

$$\dot{y} = 3x - 3y.$$

Ovo je homogeni sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi s matricom

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Njen karakteristični polinom je $(-3-\lambda)^2-3 = \lambda^2+6\lambda+6$ pa su joj svojstvene vrijednosti $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3}$. Uočimo da su obje negativne. Jedan svojstveni vektor za $\lambda_1 = -3 - \sqrt{3}$ je $v_1 = (-1, \sqrt{3})$, a jedan svojstveni vektor za $\lambda_2 = -3 + \sqrt{3}$ je $v_2 = (1, \sqrt{3})$. Budući da su obje svojstvene vrijednosti negativne i jer prema općoj strukturi rješenja homogenih sustava linearnih diferencijalnih jednadžbi znamo da su $x(t)$ i $y(t)$ linearne kombinacije od $\exp(\lambda_1 t)$ i $\exp(\lambda_2 t)$, zaključujemo da su sve trajektorije orijentirane prema ishodištu. Pritom su sve one oko ishodišta tangencijalne na pravac p_2 koji odgovara drugom svojstvenom vektoru (jer je λ_2 bliži 0 od λ_1), a drugi pravac im je asimptota (kad $t \rightarrow -\infty$ zbog orijentacije prema ishodištu).

(b) Budući da su sve trajektorije orijentirane prema ishodištu, znači da se s vremenom obje mase približavaju nuli.

(c) Ako je $y(0) = 0$, onda da bi problem imao smisla mora biti $x(0) > 0$, dakle se na ovo odnose isključivo trajektorije ispod p_2 koje sijeku x -os (kad „zavrnu” prema asimptoti).