Fourierovi redovi i primjene

Domaća zadaća, 9. 5. 2025.

Za samostalno rješavanje do 23. 5. 2025. (do kraja dana). Dozvoljeno je međusobno diskutiranje i korištenje svih materijala, ali rješenja morate napisati samostalno i potpuno. Rješenja predajte nastavniku, ili osobno ili emailom (uslikana). Bodovi će biti normalizirani na 20% ili 50% ocjene, što kasnije bude u boljem interesu pojedinog studenta.

1. *(20 bodova)* Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n}(n+k)} = \int_0^{1/2} e^{(1/4-t^2)x} \mathrm{d}t.$$

   Konvergira li gornji red funkcija u varijabli x uniformno na intervalu $[-2,2]$? A konvergira li u $\mathrm{L}^2([-2,2])$?

2. *(10+10 bodova)*

   (a) Razvijte funkciju zadanu formulom $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$.

   (b) Dokažite $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{64}$.

3. *(20 bodova)* Pronađite (uz dokaz) sve 2π-periodične funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klase C^1 koje zadovoljavaju običnu diferencijalnu jednadžbu

$$f'(x) = f\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big)$$

   za svaki $x \in \mathbb{R}$.

4. *(20 bodova)* Za $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ označimo $f^{*k} := \underbrace{f * f * \cdots * f}_{k \text{ puta se pojavljuje } f}$. Ako postoje $n \in \mathbb{N}$ i $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f^{*k} = 0,$$

   dokažite da f mora biti 1-periodični trigonometrijski polinom.

5. *(5+15 bodova)*

   (a) Reći ćemo da funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava *Zygmundov uvjet* reda $\nu > 0$ u točki $t \in \mathbb{R}$ ako postoje $C \in [0, +\infty\rangle$ i $a > 0$ takvi da za svaki $h \in [-a, a]$ vrijedi

$$\big|f(t-h) - 2f(t) + f(t+h)\big| \leq C|h|^{\nu}. \tag{1}$$

   Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Ako u točki $t \in \mathbb{R}$ funkcija f zadovoljava Zygmundov uvjet nekog reda $\nu > 0$, dokažite da tada Fourierov red funkcije f konvergira u točki t prema $f(t)$.

   (b) Reći ćemo da funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava *uniformni Zygmundov uvjet* reda $\nu > 0$ ako postoji $C \in [0, +\infty\rangle$ takva da za svake $t, h \in \mathbb{R}$ vrijedi formula (1). Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f\big|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Ako funkcija f zadovoljava uniformni Zygmundov uvjet nekog reda $\nu > 2$, dokažite da ona mora biti konstanta.

Vjekoslav Kovač

Fourierovi redovi i primjene

Rješenja domaće zadaće od 9. 5. 2025.

1. Iz razvoja eksponencijalne funkcije u red potencija dobivamo

$$e^{(1/4-t^2)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/4-t^2)^n x^n}{n!}$$

za $t, x \in \mathbb{R}$. Za fiksirani x posljednji red funkcija u varijabli t uniformno konvergira na $[0, 1/2]$, naprosto jer je

$$\left|\frac{(1/4-t^2)^n x^n}{n!}\right| \leq \frac{|x|^n}{n!}$$

i red brojeva $\sum_n |x|^n/n!$ je konvergentan. Zato se može integrirati član-po-član:

$$\int_0^{1/2} e^{(1/4-t^2)x} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^n \mathrm{d}t.$$

Integral na desnoj strani je

$$\int_0^{1/2} \left(1/4 - t^2\right)^n \mathrm{d}t = \left[t = \frac{1}{2}\sin\theta\right] = \frac{1}{2^{2n+1}} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta \mathrm{d}\theta.$$

Korištenjem parcijalne integracije lako se induktivno dokazuje formula

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2^{2n+1} n!(n+1)!}{(2n+2)!}$$

pa konačno imamo

$$\int_0^{1/2} e^{(1/4-t^2)x} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)\cdots(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+1)\cdots(2n)}.$$

Red potencija po x svakako uniformno konvergira na $[-2, 2]$, naprosto jer je

$$\left|\frac{x^{n-1}}{\prod_{k=1}^n (n+k)}\right| \leq \frac{2^n}{n^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

za $n \geq 3$, a geometrijski red $\sum_n (2/3)^n$ je konvergentan. Posljedično, naravno, red potencija konvergira i u $\mathrm{L}^2([-2, 2])$.

Zanimljivost. Erdősa i Grahama je zanimalo je li broj

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{k=1}^n (n+k)} = 0.59229653646932657566\ldots$$

iracionalan. Čini se da je to i dalje otvoren problem.

2. (a) Fourierovi koeficijenti se izračunaju kao:

$$a_n = 0 \text{ za } n \in \mathbb{N}_0$$

i

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\frac{x}{2}\sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi(2n-1)}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{2}{\pi(2n+1)}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \\ &= \frac{2}{\pi(2n-1)}(-\cos n\pi) - \frac{2}{\pi(2n+1)}\cos n\pi = \frac{(-1)^{n-1}8n}{\pi(2n-1)(2n+1)} \text{ za } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zato razvoj u Fourierov red glasi

$$f(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(2n-1)(2n+1)} \sin nx.$$

(b) Imamo

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos x}{2} \, \mathrm{d}x = 1$$

pa Plancherelova formula

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

daje

$$\frac{8^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = 1,$$

odakle proizlazi traženi identitet.

3. *Odgovor.* Funkcije oblika

$$f(x) = A \cos x + B \sin x$$

za proizvoljne koeficijente $A, B \in \mathbb{R}$.

Naime, ako standardno a_n, b_n označavaju Fourierove koeficijente od f, tada su Fourierovi koeficijenti od f' dani s

$$a_n(f') = n b_n \text{ za } n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n(f') = -n a_n \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, Fourierovi koeficijenti od g definirane s $g(x) = f(x + \pi/2)$ su

$$a_n(g) = \big(\cos \frac{n\pi}{2}\big) a_n + \big(\sin \frac{n\pi}{2}\big) b_n \text{ za } n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n(g) = \big(-\sin \frac{n\pi}{2}\big) a_n + \big(\cos \frac{n\pi}{2}\big) b_n \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Po teoremu jedinstvenosti imamo $f' = g$ ako i samo ako vrijedi

$$a_n(f') = a_n(g) \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}_0, \quad b_n(f') = b_n(g) \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Jednakost za $n = 0$ vodi na $a_0 = 0$, dok za $n \geq 2$ jednakosti

$$\begin{cases} \big(\cos \frac{n\pi}{2}\big) a_n + \big(\sin \frac{n\pi}{2} - n\big) b_n & = 0 \\ \big(n - \sin \frac{n\pi}{2}\big) a_n + \big(\cos \frac{n\pi}{2}\big) b_n & = 0 \end{cases}$$

vode na $a_n = b_n = 0$, radi toga što je

$$\det \begin{bmatrix} \cos \frac{n\pi}{2} & \sin \frac{n\pi}{2} - n \\ n - \sin \frac{n\pi}{2} & \cos \frac{n\pi}{2} \end{bmatrix} = \big(\cos \frac{n\pi}{2}\big)^2 + \big(\underbrace{n - \sin \frac{n\pi}{2}}_{>0}\big)^2 \neq 0.$$

Konačno, za $n = 1$ ne dobijemo nikakav netrivijalan uvjet. Dakle,

$$f(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

za proizvoljne $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ su sva rješenja od $f' = g$.

Napomena. Dovoljno je samo tražiti da je f derivabilna, jer iz diferencijalne jednadžbe odmah slijedi da f' mora biti neprekidna.

Alternativno rješenje (koje ne koristi Fourierovu analizu). Odmah se vidi da je f čak klase C^∞ te da je

$$f^{(n)}(x) = f\Big(x + \frac{n\pi}{2}\Big)$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Posebno je, radi 2π-periodičnosti:

$$f^{(4)}(x) = f(x + 2\pi) = f(x).$$

Rješavanjem te diferencijalne jednadžbe (s karakterističnom jednadžbom $\lambda^4 - 1 = 0$) dobivamo

$$f(x) = Ae^x + Be^{-x} + Ce^{ix} + De^{-ix}.$$

Kako je f omeđena na $\mathbb{R}$, imamo

$$A = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 0$$

te

$$B = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{e^{-x}} = 0.$$

Preostaje da $f(x)$ mora biti linearna kombinacija od e^{ix} i e^{-ix}, tj. linearna kommbinacija od $\cos x$ i $\sin x$, a lako se provjeri da takve funkcije jesu rješenje.

4. Uzimanjem Fourierovih koeficijenata te korištenjem linearnosti i svojstva $(\widehat{f * g})(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$, zaključujemo da za svaki $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \widehat{f}(n)^k = 0.$$

Dakle, svi su brojevi $\widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, kompleksne nultočke polinoma $P(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k z^k$. Kako P ima samo konačno mnogo nultočaka, a Riemann–Lebesgueova lemma daje $\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$, mora postojati $N \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\widehat{f}(n) = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}$, $|n| > N$. Tada je, po teoremu jedinstvenosti,

$$f = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e_n$$

pa je f doista trigonometrijski polinom.

5. (a) Imamo

$$\int_{[0,a]} \frac{|f(t-x) - 2f(t) + f(t+x)|}{x} dx \le \int_{[0,a]} \frac{Cx^\nu}{x} dx = \int_{[0,a]} Cx^{\nu-1} dx = \frac{Ca^\nu}{\nu} < +\infty.$$

Zato je

$$x \mapsto \frac{f(t-x) - 2f(t) + f(t+x)}{x}$$

u $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([0,a])$ pa možemo primijeniti Dinijev kriterij.

(b) Definiramo li $g(x) := f(2\pi x)$, dobit ćemo funkciju iz $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ takvu da i dalje vrijedi

$$|g(x-h) - 2g(x) + g(x+h)| \le C|h|^\nu$$

za $\nu > 2$, za neku konstantu $C > 0$ i za svake $x \in \mathbb{T}$ i $y \in [-1/2, 1/2]$. Za bilo koji $m \in \mathbb{Z}$ pomnožimo posljednju jednakost s $e^{-2\pi imx}$ te integrirajmo po $x \in \mathbb{T}$. Dobit ćemo, na lijevoj strani,

$$e^{-2\pi imh} \underbrace{\int_{\mathbb{T}} g(x-h)e^{-2\pi im(x-h)}dx}_{\widehat{g}(m)} - 2 \underbrace{\int_{\mathbb{T}} g(x)e^{-2\pi imx}dx}_{\widehat{g}(m)} + e^{2\pi imh} \underbrace{\int_{\mathbb{T}} g(x+h)e^{-2\pi im(x+h)}dx}_{\widehat{g}(m)},$$

tj.

$$\big|(\cos(2\pi mh) - 1)\,\widehat{g}(m)\big| \leq C|h|^{\nu}.$$

Možemo podijeliti posljednju nejednakost s h^2

$$\Big|\frac{\cos(2\pi mh) - 1}{h^2}\,\widehat{g}(m)\Big| \leq C|h|^{\nu-2}$$

i pustiti limes kada $h \to 0$ koristeći $\nu > 2$:

$$\big| - 4m^2\pi^2\widehat{g}(m)\big| \leq 0.$$

Zaključujemo $\widehat{g}(m) = 0$ čim je $m \neq 0$ pa, po teoremu jedinstvenosti, g mora biti identički jednaka konstanti $\widehat{g}(0)e_0$. Zato je i f konstantna funkcija.

Alternativno rješenje (koje ne koristi Fourierovu analizu). Fiksirajmo $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ te definirajmo $h = y/n$. Vrijedi identitet

$$\sum_{k=-n+1}^{n-1} (n-|k|)\big(f(x+(k-1)h) - 2f(x+kh) + f(x+(k+1)h)\big) = f(x-y) - 2f(x) + f(x+y). \quad (2)$$

Za dokaz od (2) označimo $z^+ := \max\{z, 0\}$ te lijevu stranu zapišimo kao

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \big((n-|k+1|)^+ - 2(n-|k|)^+ + (n-|k-1|)^+\big)\; f(x+kh).$$

Diskutiranje slučajeva lako daje

$$(n-|k+1|)^+ - 2(n-|k|)^+ + (n-|k-1|)^+ = \begin{cases} -2 & \text{za } k = 0, \\ 1 & \text{za } k = -n \text{ ili } k = n, \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

što znači da je cijeli izraz upravo $f(x-nh) - 2f(x) + f(x+nh)$, a to smo i trebali.

Sada korištenjem uvjeta (1) lijevu stranu od (2) ocjenjujemo po apsolutnoj vrijednosti sa

$$\sum_{k=-n+1}^{n-1} (n-|k|)Ch^{\nu} = Cn^2h^{\nu} = Cn^2(y/n)^{\nu} = Cn^{2-\nu}y^{\nu}.$$

Puštanjem na limes kada $n \to \infty$ taj izraz, radi $\nu > 2$, konvergira u 0 pa iz (2) slijedi

$$f(x-y) - 2f(x) + f(x+y) = 0$$

za svake $x \in \mathbb{R}$ i $y > 0$. Odavde se lako vidi da $\tilde{f}$ definirana s $\tilde{f}(x) := f(x) - f(0)$ zadovoljava Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu

$$\tilde{f}(a+b) = \tilde{f}(a) + \tilde{f}(b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Kako je ona i izmjeriva, mora biti linearna, a radi periodičnosti mora biti konstantno jednaka 0. Radi toga je f konstantna funkcija.