Fourierovi redovi i primjene

Kolokvij, 9. 6. 2025.

Za samostalno rješavanje do 23. 6. 2025. (do kraja dana). Dozvoljeno je međusobno diskutiranje i korištenje svih materijala, ali rješenja morate napisati samostalno i potpuno. Rješenja predajte nastavniku emailom (npr. uslikana). Ovaj kolokvij može nadomjestiti pismeni ispit (tj. do 80% ocjene).

1. *(8+6+6 bodova)*

   (a) Razvijte u trigonometrijski Fourierov red funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanu formulom $f(x) = \sin(x/3)$ za $x \in [-\pi, \pi\rangle$ i proširenu na $\mathbb{R}$ po 2π-periodičnosti.

   (b) U kojim sve točkama od $\mathbb{R}$ Fourierov red funkcije f konvergira? U kojima od njih konvergira baš prema funkciji f?

   (c) Izračunajte $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big(\frac{1}{9k+2}+\frac{1}{9k+4}+\frac{1}{9k+5}+\frac{1}{9k+7}\Big)$.

2. *(15+5 bodova)*

   (a) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna 2π-periodična funkcija takva da je $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ i čiji Fourierovi koeficijenti zadovoljavaju

   $$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$
   $$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

   Dokažite da trigonometrijski Fourierov red od f konvergira prema f u svakoj točki of $\mathbb{R}$.

   (b) Dokažite da postoji funkcija f sa svim svojstvima iz (a) dijela zadatka koja nije identički jednaka 0.

3. *(4+8+8 bodova)* Za $n \in \mathbb{Z}$ standardno označavamo $e_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $e_n(x) := e^{2\pi i n x}$.

   (a) Pokažite da za svaki parametar $0 < \alpha < 1$ red $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e_{2^k}$ uniformno konvergira prema nekoj 1-periodičnoj neprekidnoj funkciji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

   (b) Dokažite da za funkciju f iz (a) dijela zadatka i svake $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

   $$|f(x) - f(y)| \leq 2\pi|x-y| + 2^{-\alpha}|f(2x) - f(2y)|.$$

   (c) Dokažite da funkcija f iz (a) dijela zadatka u svakoj točki domene zadovoljava Hölderov uvjet reda α.

4. *(10+10 bodova)* Neka je $p \in \mathbb{N}$.

   (a) Dokažite da red $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^p$ konvergira u smislu Abela.

   (b) Dokažite da red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^p$ ne konvergira u smislu Cesàra.

5. *(10+10 bodova)*

   (a) Ako $K := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$ označava standardnu jediničnu kuglu u $\mathbb{R}^3$, dokažite da je Fourierova transformacija njezine karakteristične funkcije dana formulom

   $$\widehat{\mathbb{1}}_K(\xi) = -\frac{1}{\pi}\frac{\cos 2\pi|\xi|}{|\xi|^2} + \frac{1}{2\pi^2}\frac{\sin 2\pi|\xi|}{|\xi|^3}$$

   za svaki $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\xi \neq (0,0,0)$.

(b) Dokažite da broj cjelobrojnih točaka unutar kugle

$$K_R := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq R\}$$

oko ishodišta radijusa $R > 0$ ima asimptotiku, za svaki $\varepsilon > 0$,

$$\operatorname{card}(K_R \cap \mathbb{Z}^3) = \frac{4\pi}{3} R^3 + O(R^{3/2+\varepsilon}) \quad \text{kada } R \to \infty.$$

Vjekoslav Kovač