Fourierovi redovi i primjene

Prvi kolokvij, 10. 5. 2017.

1. *(2+2+2=6 bodova)* Ispitajte konvergira li niz funkcija $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ zadan sa

$$f_n\colon \big[0,\tfrac{\pi}{2}\big] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = n \sin^n x \cos^2 x$$

   (a) g.s. na $\big[0,\frac{\pi}{2}\big]$, (b) uniformno na $\big[0,\frac{\pi}{2}\big]$, (c) u $\mathrm{L}^1\big(\big[0,\frac{\pi}{2}\big]\big)$.

2. *(3+3=6 bodova)*

   (a) Za fiksirani parametar $\alpha \in \langle 0,\pi\rangle$ razvijte funkciju $f = \mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}$, tj. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } |x| \le \alpha, \\ 0 & \text{za } \alpha < |x| \le \pi, \end{cases}$ u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi,\pi]$.

   (b) Za svaki $\alpha \in \langle 0,\pi\rangle$ izračunajte $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$.

3. *(3+3=6 bodova)*

   (a) Dokažite da za svaki (1-periodični kompleksni eksponencijalni) trigonometrijski polinom $g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ postoji trigonometrijski polinom $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ takav da vrijedi $f * f = g$.

   (b) Nađite neki 1-periodični trigonometrijski polinom $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takav da je $(f*f)(x) = \sin(2\pi x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. (Primijetite da od f tražimo da poprima samo realne vrijednosti.)

4. *(3+3=6 bodova)*

   (a) Dokažite da za svaku 1-periodičnu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ klase C^2 vrijedi nejednakost

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \le \Big(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2} \Big(\int_0^1 |f''(x)|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

   (b) Nađite sve 1-periodične funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ klase C^2 za koje se u nejednakosti iz (a) dijela zadatka postiže baš jednakost.

5. *(3+3=6 bodova)* Za svaki $N \in \mathbb{N}$ izračunajte integrale

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \Big(\frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}\Big)^2 dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \Big(\frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}\Big)^4 dx$.

   Rezultati trebaju biti iskazani kao elementarne funkcije u varijabli N.

6.* *(6 dodatnih bodova)* Neka je $f\colon \mathbb{T} \to [0,+\infty\rangle$ izmjeriva funkcija takva da je $\int_{\mathbb{T}} f(x)dx > 0$. Dokažite da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je funkcija $\underbrace{f * f * \cdots * f}_{k \text{ puta se pojavljuje } f}$ strogo pozitivna u svakoj točki od $\mathbb{T}$.

Vjekoslav Kovač i *Mario Stipčić*

Fourierovi redovi i primjene

Rješenja prvog kolokvija, 10. 5. 2017.

1. (a) DA. Za svaki $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \cos^2 x \lim_{n\to\infty} n \sin^n x = 0,$$

jer uz supstituciju $a = \frac{1}{\sin x} \in \langle 1, +\infty\rangle$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} n \sin^n x = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{a^t} = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a^t \ln a} = 0,$$

dok u točkama $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{2}$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} f_n\big(\tfrac{\pi}{2}\big) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Vidimo da niz $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ po točkama (pa posebno i g.s.) konvergira prema nul-funkciji.

(b) NE. Iz (a) dijela zadatka znamo da je nul-funkcija jedini kandidat za limes. Trebamo ocijeniti

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x\in[0,\pi/2]} |f_n(x)| = \max_{x\in[0,\pi/2]} f_n(x),$$

a za to moramo maksimizirati funkciju f_n na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Zbog

$$f_n'(x) = n \sin^{n-1} x \cos^2 x \left(n \cos^2 x - 2 \sin^2 x\right)$$

vidimo da su kandidati za točke ekstrema $x = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{n}{2}}$ i rubovi intervala $x = 0, \frac{\pi}{2}$. Zato imamo

$$\|f_n\|_\infty = f_n\big(\operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{n}{2}}\big) = n\Big(\frac{n/2}{1+n/2}\Big)^{n/2} \frac{1}{1+n/2} = 2\Big(1 - \frac{1}{n/2+1}\Big)^{n/2+1}.$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = 2 \lim_{t\to+\infty} \Big(1 - \frac{1}{t}\Big)^t = \frac{2}{e} \neq 0,$$

zaključujemo da niz $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ne konvergira uniformno prema nul-funkciji.

(c) DA. Iz (a) dijela zadatka znamo da je nul-funkcija jedini kandidat za limes. Pomoću nejednakosti $1 + s \le e^s$ za svaki $s \in \mathbb{R}$ i računa iz (b) dijela zadatka možemo ocijeniti

$$\|f_n\|_\infty \le 2\big(e^{-\frac{1}{n/2+1}}\big)^{n/2+1} = \frac{2}{e}.$$

Zato je niz $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ dominiran konstantnom (pa i integrabilnom) funkcijom $g(x) \equiv \frac{2}{e}$. Preciznije, $|f_n(x)| \le g(x)$ za svake $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ te je $\int_{[0,\pi/2]} g(x)dx = \frac{\pi}{e} < +\infty$ pa Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji i točkovna konvergencija iz (a) dijela daju

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi/2]} f_n(x)dx \overset{\text{LTDK}}{=} \int_{[0,\pi/2]} \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\, dx \overset{\text{(a)}}{=} \int_{[0,\pi/2]} 0\, dx = 0.$$

Napomena: Dio (c) se u teoriji može svesti na integrale koje znamo izračunati rekurzivno:

$$\int_0^{\pi/2} n \sin^n x \cos^2 x \, dx = n \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx}_{I_n} - n \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \, dx}_{I_{n+2}}.$$

Ipak, tada moramo pripaziti da **ne** rastavimo:

$$\lim_{n\to\infty} nI_n - \lim_{n\to\infty} nI_{n+2},$$

jer ćemo dobiti neodređeni izraz $(+\infty) - (+\infty)$.

2. (a) Fourierovi koeficijenti su:

$$a_0 = \frac{2\alpha}{\pi}, \quad a_n = \frac{2\sin n\alpha}{n\pi} \text{ za } n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 0 \text{ za } n \in \mathbb{N}$$

pa razvoj u Fourierov red glasi

$$f(x) \sim \frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} \cos nx.$$

(b) Plancherelova formula postaje

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{2\alpha}{\pi}\Big)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2\sin n\alpha}{n\pi}\Big)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{[-\alpha,\alpha]} 1dx,$$

tj.

$$\frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{2\alpha}{\pi},$$

odakle proizlazi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}\Big(\frac{2\alpha}{\pi} - \frac{2\alpha^2}{\pi^2}\Big) = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}.$$

3. (a) Neka je $g(x) = \sum_{n=-N}^{N} \beta_n e^{2\pi i n x}$ za neki $N \in \mathbb{C}$ i neke koeficijente $\beta_n \in \mathbb{C}$. Za svaki indeks $n \in \{-N, \dots, N\}$ uzmimo kompleksni broj $\alpha_n \in \mathbb{C}$ takav da je $\alpha_n^2 = \beta_n$, čiju egzistenciju je lako opravdati iz trigonometrijskog (tj. polarnog) prikaza kompleksnog broja. Definirajmo

$$f(x) := \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e^{2\pi i n x},$$

tako da za $|n| \le N$ vrijedi

$$(f * f)\widehat{\ }(n) = \widehat{f}(n)^2 = \alpha_n^2 = \beta_n = \widehat{g}(n),$$

dok za $|n| > N$ imamo

$$(f * f)\widehat{\ }(n) = \widehat{f}(n)^2 = 0 = \widehat{g}(n).$$

Po teoremu jedinstvenosti slijedi da doista imamo $f * f = g$ g.s., a kako je riječ o neprekidnim funkcijama, imamo baš pravu jednakost.

(b) *Odgovor*: $f(x) = \cos(2\pi x) + \sin(2\pi x)$ ili $f(x) = -\cos(2\pi x) - \sin(2\pi x)$.
U ovom slučaju je

$$\sin(2\pi x) = \frac{e^{2\pi i x} - e^{-2\pi i x}}{2i} = \frac{i}{2}e^{-2\pi i x} - \frac{i}{2}e^{2\pi i x}$$

pa imamo $N = 1$ i

$$\beta_{-1} = \frac{i}{2} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = -\frac{i}{2} = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

te možemo uzeti

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4} i} = \frac{1+i}{2}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4} i} = \frac{1-i}{2}.$$

Funkcija f konstruirana u (a) dijelu zadatka postaje

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+i}{2} e^{-2\pi i x} + \frac{1-i}{2} e^{2\pi i x} \\ &= \frac{1+i}{2} (\cos(2\pi x) - i \sin(2\pi x)) + \frac{1-i}{2} (\cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)) \\ &= \cos(2\pi x) + \sin(2\pi x). \end{aligned}$$

Primijetite da samo imali po dvije mogućnosti za α_{-1}, α_1 i jedino smo morali pripaziti da konačna funkcija f doista ispadne realna.

4. (a) Primijetimo da su funkcije f, f', f'' neprekidne (pa su i kvadratno integrabilne) te se nejednakost iz zadatka može zapisati

$$\|f'\|_2^2 \leq \|f\|_2 \|f''\|_2.$$

Parcijalnom integracijom smo bili pokazali da za svaki $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi $\widehat{f'}(n) = 2\pi i n \widehat{f}(n)$, a dvostrukom primjenom iste formule dobivamo još i $\widehat{f''}(n) = (2\pi i n)^2 \widehat{f}(n)$. Zato pomoću tri primjene Plancherelove formule i jedne Cauchy-Schwarzove nejednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} \|f'\|_2^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |2\pi n|^2 \big|\widehat{f}(n)\big|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \big|\widehat{f}(n)\big| \cdot |2\pi n|^2 \big|\widehat{f}(n)\big| \\ &\leq \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \big|\widehat{f}(n)\big|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |2\pi n|^4 \big|\widehat{f}(n)\big|^2\Big)^{1/2} = \|f\|_2 \|f''\|_2. \end{aligned}$$

(b) *Odgovor*: To su funkcije oblika

$$f(x) = \alpha e^{-2\pi i m x} + \beta e^{2\pi i m x} \text{ za neki } m \in \mathbb{Z} \text{ i neke } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Ekvivalentno, prelaskom iz eksponencijalne baze u trigonometrijsku, to su funkcije oblika

$$f(x) = \gamma \cos(2\pi m x) + \delta \sin(2\pi m x) \text{ za neki } m \in \mathbb{N}_0 \text{ i neke } \gamma, \delta \in \mathbb{C}.$$

Naime, jednakost se postiže ako i samo ako stoji jednakost u gornjoj primjeni Cauchy-Schwarzove nejednakosti, a to je ako i samo ako su vektori

$$\big(|\widehat{f}(n)|\big)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ i } \big(|2\pi n|^2 |\widehat{f}(n)|\big)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ iz } \ell^2(\mathbb{Z})$$

proporcionalni. Označimo $S := \{n \in \mathbb{Z} : \widehat{f}(n) \neq 0\}$, tako da zapravo ispitujemo kada su proporcionalni vektori

$$\big(1\big)_{n \in S} \text{ i } \big(n^2\big)_{n \in S} \text{ iz } \ell^2(S).$$

(Pritom smatramo da za $S = \emptyset$ trivijalno imamo proporcionalnost.) To je pak istina samo u slučajevima:

$$\text{ili} \quad S = \emptyset \quad \text{ili} \quad S = \{0\} \quad \text{ili} \quad \emptyset \neq S \subseteq \{-m, m\} \text{ za neki } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Nadalje, funkcija $f - \sum_{n \in S} \widehat{f}(n) e_n$ ima sve Fourierove koeficijente jednake 0 pa po teoremu jedinstvenosti ona mora g.s. biti jednaka nul-funkciji. Zbog neprekidnosti je ona baš identički jednaka nul-funkciji, tj. $f = \sum_{n\in S} \widehat{f}(n) e_n$. U svakom slučaju od S vidimo da f mora biti gornjeg oblika, a očigledno imamo i obrat.

Napomena: Alternativno se zadatak može riješiti i bez Fourierove analize. Za dio (a) možemo iskoristiti parcijalnu integraciju,

$$\int_0^1 f'(x)\overline{f'(x)}dx = \underbrace{f'(x)\overline{f(x)}\Big|_{x=0}^{x=1}}_{=0 \text{ radi 1-per.}} - \int_0^1 \overline{f(x)} f''(x)dx,$$

i potom naprosto primijeniti Cauchy-Schwarzovu nejednakost. Potom se u svrhu (b) dijela analizira kada u gornjem argumentu vrijedi jednakost, što nas vodi na običnu diferencijalnu jednadžbu $f''(x) = cf(x)$ za neki parametar $c \in \mathbb{R}$. Nju se rješava u familiji 1-periodičnih funkcija.

5. (a) Prisjetimo se Dirichletove jezgre,

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n x} = \frac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin \pi x} \qquad \text{za } x \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle \setminus \{0\},$$

dok je $\lim_{x\to 0} D_N(x) = 2N+1 = D_N(0)$. Radi toga i π-periodičnosti integral iz zadatka nije nepravi i možemo ga zapisati

$$\begin{aligned} I_N &:= \int_0^{\pi} \Big(\frac{\sin(2N+1)t}{\sin t}\Big)^2 dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\frac{\sin(2N+1)t}{\sin t}\Big)^2 dt \\ &= \begin{bmatrix} t = \pi x \\ dt = \pi dx \end{bmatrix} = \pi \int_{-1/2}^{1/2} \Big(\frac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin \pi x}\Big)^2 dx = \pi \|D_N\|_2^2 \end{aligned}$$

pa Plancherelova formula daje

$$I_N = \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{D_N}(n)|^2 = \pi \sum_{n=-N}^{N} 1 = (2N+1)\pi.$$

(b) Analognim računom dobivamo da je integral iz zadatka ovog puta jednak

$$J_N := \int_0^{\pi} \Big(\frac{\sin(2N+1)t}{\sin t}\Big)^4 dt = \pi \int_{\mathbb{T}} D_N(x)^4 dx = \pi \|D_N^2\|_2^2.$$

Fourierove koeficijente trigonometrijskog polinoma D_N^2 vidimo iz

$$\begin{aligned} D_N(x)^2 &= \Big(\sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n x}\Big)^2 = \sum_{-N\le n_1,n_2\le N} e^{2\pi i (n_1+n_2)x} \\ &= \sum_{n=-2N}^{2N} \Big(\sum_{\substack{-N\le n_1,n_2\le N \\ n_1+n_2=n}} 1\Big) e^{2\pi i n x} \end{aligned}$$

i oni su (redom za $n = -2N, \ldots, 2N$) jednaki:

$$1, 2, \ldots, 2N, 2N+1, 2N, \ldots, 2, 1.$$

Zato Plancherelova formula daje

$$\begin{aligned} J_N &= \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{D_N^2}(n)|^2 = \pi\Big(\sum_{k=1}^{2N+1} k^2 + \sum_{k=1}^{2N} k^2\Big) \\ &= \pi\Big(\frac{(2N+1)(2N+2)(4N+3)}{6} + \frac{2N(2N+1)(4N+1)}{6}\Big) \\ &= \frac{\pi}{3}(2N+1)(8N^2+8N+3). \end{aligned}$$

Napomena: Dat ćemo i alternativno rješenje ovog zadatka (u duhu funkcija izvodnica) koje funkcionira za bilo koju potenciju Dirichletove jezgre, no mi ćemo radi jednostavnosti ostati na četvrtoj potenciji, kao u (b) dijelu zadatka.

Dizanjem $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n x}$ na četvrtu potenciju i grupiranjem dobivamo $D_N^4 = \sum_n c_n e_n$, a trebali bismo naći koeficijent c_0 uz slobodni član $e_0 \equiv 1$ i tada je $J_N = \pi c_0$. Supstitucijom $z = e^{2\pi i x}$ vidimo da je c_0 koeficijent uz slobodni član u izrazu

$$\Big(\sum_{n=-N}^{N} z^n\Big)^4,$$

dok množenjem sa z^{4N} zaključujemo da je c_0 zapravo koeficijent uz z^{4N} polinoma

$$P(z) := \Big(\sum_{n=0}^{2N} z^n\Big)^4.$$

Varijabla z sada može poprimiti bilo koju kompleksnu vrijednost pa za $|z| < 1$ korištenjem formule za parcijalnu sumu geometrijskog reda i binomni razvoj (s općenitim realnim eksponentom) dobivamo

$$\begin{aligned} P(z) &= \Big(\frac{1-z^{2N+1}}{1-z}\Big)^4 = \big(1-z^{2N+1}\big)^4 (1-z)^{-4} = \big(1-z^{2N+1}\big)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-4}{k} (-1)^k z^k \\ &= \frac{1}{6}\big(1 - 4z^{2N+1} + 6z^{4N+2} - 4z^{6N+3} + z^{8N+4}\big) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)(k+3) z^k, \end{aligned}$$

jer je

$$\binom{-4}{k} = \frac{(-4)(-5)\cdots(-k-3)}{k!} = \frac{(-1)^k (k+1)(k+2)(k+3)}{6}.$$

Sada je lako očitati koeficijent od $P(z)$ uz z^{4N}, uzimajući u obzir redom indekse $k = 4N$ i $k = 2N-1$ iz drugog faktora,

$$c_0 = \frac{1}{6}\Big(1\cdot(4N+1)(4N+2)(4N+3) + (-4)\cdot 2N(2N+1)(2N+2)\Big),$$

tako da je

$$\begin{aligned} J_N = \pi c_0 &= \frac{\pi}{3}(2N+1)\big((4N+1)(4N+3) - 4N(2N+2)\big) \\ &= \frac{\pi}{3}(2N+1)(8N^2+8N+3). \end{aligned}$$

6. U ovom zadatku nam je praktično torus $\mathbb{T}$ u smislu prostora mjere identificirati s $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ uz Lebesgueovu mjeru, a binarna operacija se nasljeđuje iz $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (tj. to je zbrajanje modulo 1). Najprije tvrdimo da postoje $\varepsilon > 0$ i kompakt $K \subseteq \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ takvi da je $\lambda(K) > 0$ i $f \geq \varepsilon \mathbb{1}_K$. Naime, vrijedi $\lambda(\{f > 0\}) > 0$, jer bi $f \geq 0$ i $\lambda(\{f > 0\}) = 0$ značilo $f = 0$ g.s. pa bismo imali $\int_{\mathbb{T}} f d\lambda = 0$, što je protivno pretpostavci. Nadalje, zbog neprekidnosti mjere odozdo slijedi

$$\lim_{m\to\infty} \lambda\big(\{f \geq \tfrac{1}{m}\}\big) = \lambda\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} \{f \geq \tfrac{1}{m}\}\Big) = \lambda(\{f > 0\}) > 0$$

pa postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\lambda\big(\{f \geq \frac{1}{m}\}\big) > 0$. Stavimo $\varepsilon := \frac{1}{m}$ i $A := \left\{f \geq \frac{1}{m}\right\}$ te za $n \in \mathbb{N}$ označimo $A_n := A \cap \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right]$. Opet zbog neprekidnosti mjere odozdo slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lambda\big(A \cap \left\langle -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle\big) = \lambda(A) > 0$$

pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\lambda(A_n) > 0$. Radi regularnosti Lebesgueove mjere iznutra postoji kompakt $K \subseteq A_n$ takav da je još uvijek $\lambda(K) > 0$. Primijetimo da je $K \subseteq A_n \subseteq \left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}, \frac{1}{2}-\frac{1}{4n}\right] \subseteq \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ i da za svaki $x \in K \subseteq A$ vrijedi $f(x) \geq \frac{1}{m} = \varepsilon$. Sada iz

$$\underbrace{f * f * \cdots * f}_{k \text{ puta se pojavljuje } f} \geq \varepsilon^k \underbrace{\mathbb{1}_K * \mathbb{1}_K * \cdots * \mathbb{1}_K}_{k \text{ puta se pojavljuje } \mathbb{1}_K}$$

vidimo da je dovoljno pokazati da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je k-terostruka konvolucija $\mathbb{1}_K * \mathbb{1}_K * \cdots * \mathbb{1}_K$ strogo pozitivna na cijelom $\mathbb{T}$.

Po regularnosti Lebesgueove mjere izvana postoji otvoreni skup U, obzirom na euklidsku topologiju od $\mathbb{R}$, takav da je $K \subseteq U \subseteq \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ i $\lambda(U) < \lambda(K) + \underbrace{\frac{1}{2}\lambda(K)}_{>0} = \frac{3}{2}\lambda(K)$. Svaki otvoreni podskup od $\mathbb{R}$ je prebrojiva unija disjunktnih otvorenih intervala pa prikažimo U na taj način: $U = \bigcup_j I_j$. Nadalje, stavimo $K_j := K \cap I_j$. Tvrdimo da postoji indeks j takav da je $\lambda(K_j) > \frac{2}{3}\lambda(I_j)$. Naime, u protivnom bismo imali

$$\lambda(K) = \sum_j \lambda(K_j) \leq \sum_j \frac{2}{3}\lambda(I_j) = \frac{2}{3}\lambda(U),$$

što je u kontradikciji s $\lambda(U) < \frac{3}{2}\lambda(K)$. Za taj indeks j promotrimo interval $I_j = \langle t - 5\delta, t + 5\delta\rangle \subseteq \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$, tj. t je polovište intervala I_j, a $\delta > 0$ je desetina njegove duljine. Primijetimo da za svaki $x \in \langle 2t - \delta, 2t + \delta\rangle$ (uz operacije modulo 1) vrijedi

$$x - K_j \subseteq \langle 2t - \delta, 2t + \delta\rangle - \langle t - 5\delta, t + 5\delta\rangle = \langle t - 6\delta, t + 6\delta\rangle$$

pa je

$$\begin{aligned}\lambda((x - K_j) \cap K_j) &= \lambda(x - K_j) + \lambda(K_j) - \lambda((x - K_j) \cup K_j) \\ &\geq 2\lambda(K_j) - \lambda(\langle t - 6\delta, t + 6\delta\rangle) \geq 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10\delta - 12\delta = \frac{4}{3}\delta \geq \delta\end{aligned}$$

te posljedično

$$\begin{aligned}(\mathbb{1}_K * \mathbb{1}_K)(x) &\geq \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_{K_j}(x - y)\mathbb{1}_{K_j}(y)dy = \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_{x-K_j}(y)\mathbb{1}_{K_j}(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_{(x-K_j)\cap K_j}(y)dy = \lambda((x - K_j) \cap K_j) \geq \delta.\end{aligned}$$

Dakle, ako stavimo $J := \langle 2t-\delta, 2t+\delta\rangle$, tada je $\mathbb{1}_K * \mathbb{1}_K \geq \delta \mathbb{1}_J$. Odavde imamo

$$\underbrace{\mathbb{1}_K * \mathbb{1}_K * \cdots * \mathbb{1}_K}_{2k \text{ puta se pojavljuje } \mathbb{1}_K} \geq \delta^{2k} \underbrace{\mathbb{1}_J * \mathbb{1}_J * \cdots * \mathbb{1}_J}_{k \text{ puta se pojavljuje } \mathbb{1}_J}$$

pa je dovoljno pokazati da za svaki otvoreni interval $J \subseteq \mathbb{T}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je k-terostruka konvolucija $\mathbb{1}_J * \mathbb{1}_J * \cdots * \mathbb{1}_J$ strogo pozitivna na cijelom $\mathbb{T}$.

Konačno, za dokaz posljednje tvrdnje krećemo od ocjene

$$\mathbb{1}_{\langle s-\eta, s+\eta\rangle} * \mathbb{1}_{\langle s-\eta, s+\eta\rangle} \geq \tfrac{\eta}{2} \mathbb{1}_{\langle 2s-(3/2)\eta, 2s+(3/2)\eta\rangle}$$

(pri čemu se opet zbrajanje promatra modulo 1), koja proizlazi iz toga što za $x \in \big\langle 2s - \frac{3}{2}\eta, 2s + \frac{3}{2}\eta\big\rangle$ imamo

$$\big(\mathbb{1}_{\langle s-\eta, s+\eta\rangle} * \mathbb{1}_{\langle s-\eta, s+\eta\rangle}\big)(x) = \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_{\langle s-\eta, s+\eta\rangle}(x-y) \mathbb{1}_{\langle s-\eta, s+\eta\rangle}(y) dy$$
$$= \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_{x-\langle s-\eta, s+\eta\rangle}(y) \mathbb{1}_{\langle s-\eta, s+\eta\rangle}(y) dy = \lambda\Big(\langle \underbrace{x-s-\eta}_{<s+\eta/2}, \underbrace{x-s+\eta}_{>s-\eta/2}\rangle \cap \langle s-\eta, s+\eta\rangle\Big) \geq \frac{\eta}{2}.$$

Njenom k-terostrukom primjenom dobivamo

$$\underbrace{\mathbb{1}_{\langle s-\eta, s+\eta\rangle} * \cdots * \mathbb{1}_{\langle s-\eta, s+\eta\rangle}}_{2^k \text{ puta se pojavljuje } \mathbb{1}_K} \geq \tfrac{\eta}{2} \cdot \tfrac{3\eta}{2^2} \cdot \tfrac{3^2\eta}{2^3} \cdots \tfrac{3^{k-1}\eta}{2^k} \cdot \mathbb{1}_{\langle 2^k s-(3/2)^k\eta, 2^k s+(3/2)^k\eta\rangle}.$$

Ako je $\big(\frac{3}{2}\big)^k \eta > \frac{1}{2}$, tada interval $\big\langle 2^k s - \big(\frac{3}{2}\big)^k \eta, 2^k s + \big(\frac{3}{2}\big)^k \eta\big\rangle$ (uz operacije $+$ i $-$ modulo 1) prekriva cijeli torus $\mathbb{T}$.