Fourierovi redovi i primjene

Prvi kolokvij, 10. 5. 2019.

1. *(2+2+2=6 bodova)* Ispitajte konvergira li niz funkcija $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ zadan sa

$$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = e^{-nx^2}$$

   (a) g.s. na $\mathbb{R}$, (b) uniformno na $\mathbb{R}$, (c) u $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

2. *(3+3=6 bodova)*

   (a) Razvijte funkciju zadanu formulom $f(x) = x|x|$ u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$.

   (b) Izračunajte: $\displaystyle\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ neparan}}} \frac{1}{n^2}\Big(1 - \frac{2}{\pi n}\Big)^2 \Big(1 + \frac{2}{\pi n}\Big)^2.$

3. *(3+3=6 bodova)*

   (a) Ako je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ takva da je $f * f$ g.s. jednaka nekoj konstantnoj funkciji, dokažite da je f također g.s. jednaka nekoj konstantnoj funkciji.

   (b) Ako je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ takva da je $\int_{\mathbb{T}}(f * f)(x)dx = 0$, dokažite da je tada $\int_{\mathbb{T}} f(x)dx = 0$.

4. *(6 bodova)* Izračunajte

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin 7x \sin 9x}{\sin x \sin 3x} dx.$$

5. *(6 bodova)* Neka $D_N \colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, $D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n x}$ označava 1-periodičnu Dirichletovu jezgru. Dokažite da postoje konstante $c, C \in \langle 0, \infty\rangle$ takve da za svaki $p \in [2, \infty\rangle$ i svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$cN^{1-\frac{1}{p}} \le \|D_N\|_p \le CN^{1-\frac{1}{p}}.$$

6.* *(3+3=6 dodatnih bodova)*

   (a) Neka je $p \in [1, \infty\rangle$. Dokažite da za svaku $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(x + \frac{k}{n}\Big) = \int_{\mathbb{T}} f(x)\, dx \tag{1}$$

   uz konvergenciju po normi $\|\cdot\|_p$.

   Napomena: Posebni slučaj $p = 2$ bio je obrađen na nastavi kao zadatak 1.4.11. Taj posebni slučaj smije se koristiti bez dokaza, a neće se bodovati ako ga ipak raspišete.

   (b) Pokažite da postoji $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ takva da skup svih točaka $x \in \mathbb{T}$ za koje vrijedi (1) (kao konvergencija niza brojeva) ima mjeru 0.

Vjekoslav Kovač

Fourierovi redovi i primjene

Rješenja prvog kolokvija, 10. 5. 2019.

1. (a) DA. Za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ radi $e^{-x^2} < 1$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (e^{-x^2})^n = 0,$$

dok u točki $x = 0$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Dakle niz $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira po točkama pa posebno i g.s.

(b) NE. Limes po točkama dobiven u (a) dijelu zadatka je funkcija

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \neq 0, \\ 1 & \text{za } x = 0, \end{cases}$$

a ona nije neprekidna. Kada bi konvergencija bila uniformna, tada bi, obzirom da su funkcije f_n neprekidne, limes f također bio neprekidna funkcija, a ona to nije. Zaključujemo da konvergencija nije uniformna.

(c) DA. Iz (a) dijela zadatka znamo da je nul-funkcija jedini kandidat za limes (do na jednakost g.s.).

$$\|f_n - 0\|_1 = \|f_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2} dx = [t = \sqrt{n}x] = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

U gornjem zaključivanju ne trebamo znati pravu vrijednost integrala $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt$ (koja je $\sqrt{\pi}$), već samo da je on konačan. To se pak vidi iz

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = 2\int_{[0,1]} e^{-t^2} dt + 2\int_{[1,+\infty\rangle} e^{-t^2} dt \leq 2\int_{[0,1]} 1 dt + 2\int_{[1,+\infty\rangle} e^{-t} dt = 2 + 2e^{-1} < +\infty.$$

2. (a) Fourierovi koeficijenti su:

$$a_n = 0 \text{ za } n \in \mathbb{N}_0, \quad b_n = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi^2 n^2 - 4) - 4}{\pi n^3} \text{ za } n \in \mathbb{N}$$

pa razvoj u Fourierov red glasi

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2\pi^2 n^2 - 4) - 4}{\pi n^3} \sin nx = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ neparan}}} \frac{2\pi^2 n^2 - 8}{\pi n^3} \sin nx + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ paran}}} \frac{-2\pi}{n} \sin nx.$$

(b) Plancherelova formula postaje

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ neparan}}} \left(\frac{2\pi^2 n^2 - 8}{\pi n^3}\right)^2 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ paran}}} \left(\frac{-2\pi}{n}\right)^2 = \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} x^4 dx,$$

tj.

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ neparan}}} \frac{(\pi n - 2)^2(\pi n + 2)^2}{n^6} + \pi^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\pi^2/6} = \frac{2\pi^4}{5},$$

odnosno

$$4\pi^2 \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n \text{ neparan}}} \frac{1}{n^2}\Big(1-\frac{2}{\pi n}\Big)^2\Big(1+\frac{2}{\pi n}\Big)^2 + \frac{\pi^4}{6} = \frac{2\pi^4}{5}.$$

Odavde je

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n \text{ neparan}}} \frac{1}{n^2}\Big(1-\frac{2}{\pi n}\Big)^2\Big(1+\frac{2}{\pi n}\Big)^2 = \frac{7\pi^2}{120}.$$

3. (a) Fourierovi koeficijenti od $f*f$ su $\widehat{f}(n)^2$; $n\in\mathbb{Z}$. Ako pretpostavimo da je $f*f$ g.s. jednaka konstanti, tada su svi njezini Fourierovi koeficijenti osim nultog jednaki 0, tj. $\widehat{f}(n)^2=0$ za svaki $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Slijedi $\widehat{f}(n)=0$ za svaki $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ pa po teoremu jedinstvenosti imamo $f=\widehat{f}(0)$ g.s.

   (b) Ako pak imamo $\int_{\mathbb{T}}(f*f)(x)dx=0$, tada zapravo znamo da je nulti Fourierov koeficijent od $f*f$ jednak 0, tj. $\widehat{f}(0)^2=0$. Odatle je $\widehat{f}(0)=0$, što je upravo $\int_{\mathbb{T}} f(x)dx=0$.

4. Prisjetimo se da se Dirichletova jezgra $D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi inx}$ može zapisati

$$D_N(x) = \frac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin \pi x}$$

   za svaki $x\in[-1/2,1/2\rangle\setminus\{0\}$. Zato integral iz zadatka možemo prepoznati kao

$$\int_0^{\pi} D_3\Big(\frac{x}{\pi}\Big)D_1\Big(\frac{3x}{\pi}\Big)dx = \Big[t=\frac{x}{\pi}\Big] = \pi\int_0^1 D_3(t)D_1(3t)dt.$$

   Na posljednji integral se pak može gledati kao na skalarni produkt funkcija

$$D_3(t) = e^{2\pi i(-3)t}+e^{2\pi i(-2)t}+e^{2\pi i(-1)t}+e^{2\pi i0t}+e^{2\pi i1t}+e^{2\pi i2t}+e^{2\pi i3t}$$

   i

$$D_1(3t) = e^{2\pi i(-3)t}+e^{2\pi i0t}+e^{2\pi i3t}.$$

   Po Parsevalovoj formuli rezultat zadatka je

$$\pi(1\cdot 1+0+0+1\cdot 1+0+0+1\cdot 1) = 3\pi.$$

5. Najprije riješimo posebne slučajeve zadatka za $p=2$ i $p=4$, jer će se svi ostali slučajevi svesti na njih.

   Za $p=2$ po Plancherelovoj formuli imamo jednakost

$$\|D_N\|_2 = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{D_N}(n)|^2\Big)^{1/2} = (2N+1)^{1/2},$$

   odakle je

$$N^{1/2} \le \|D_N\|_2 \le 2N^{1/2}. \tag{2}$$

   Za $p=4$ najprije računamo

$$\begin{aligned} D_N(x)^2 = {} & 1\cdot e^{2\pi i(-2N)x} + 2\cdot e^{2\pi i(-2N+1)x} + \cdots + (2N)\cdot e^{2\pi i(-1)x} + (2N+1)\cdot e^{2\pi i0x} \\ & + (2N)\cdot e^{2\pi i1x} + \cdots + 1\cdot e^{2\pi i(2N)x} \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}\|D_N\|_4 = \|D_N^2\|_2^{1/2} &= \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{D_N^2}(n)|^2\Big)^{1/4} \\ &= \Big(1^2+2^2+\cdots+(2N)^2+(2N+1)^2+(2N)^2+\cdots+1^2\Big)^{1/4} \\ &= \Big(\frac{1}{3}(2N+1)(8N^2+8N+3)\Big)^{1/4},\end{aligned}$$

odakle imamo

$$N^{3/4} \leq \|D_N\|_4 \leq 3N^{3/4}. \tag{3}$$

Neka je sada $p \in \langle 2,4\rangle$. Gornju ogradu dobijemo iz Hölderove nejednakosti (za konjugirane eksponente $\frac{2}{4-p}$ i $\frac{2}{p-2}$) te (2) i (3):

$$\begin{aligned}\|D_N\|_p &= \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^p dx\Big)^{1/p} = \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^{4-p}|D_N(x)|^{2p-4} dx\Big)^{1/p} \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{T}} (|D_N(x)|^{4-p})^{\frac{2}{4-p}} dx\Big)^{\frac{1}{p}\frac{4-p}{2}} \Big(\int_{\mathbb{T}} (|D_N(x)|^{2p-4})^{\frac{2}{p-2}} dx\Big)^{\frac{1}{p}\frac{p-2}{2}} \\ &= \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^2 dx\Big)^{\frac{4-p}{2p}} \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^4 dx\Big)^{\frac{p-2}{2p}} \\ &= \|D_N\|_2^{\frac{4}{p}-1}\|D_N\|_4^{2-\frac{4}{p}} \overset{(2),(3)}{\leq} (2N^{1/2})^{\frac{4}{p}-1}(3N^{3/4})^{2-\frac{4}{p}} \leq 3N^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Za donju ogradu koristimo trivijalnu ogradu $|D_N(x)| \leq 2N+1 \leq 3N$ u računu:

$$N^3 \leq \|D_N\|_4^4 = \int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^4 dx \leq (3N)^{4-p} \int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^p dx = 9N^{4-p}\|D_N\|_p^p,$$

koji povlači

$$\|D_N\|_p \geq \frac{1}{3} N^{1-\frac{1}{p}}.$$

Neka je konačno $p \in \langle 4,\infty\rangle$. Za donju ogradu koristimo Hölderovu nejednakost (za konjugirane eksponente $\frac{p-2}{p-4}$ i $\frac{p-2}{2}$) te (3) i (2):

$$\begin{aligned}N^{3/4} \overset{(3)}{\leq} \|D_N\|_4 &= \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^4 dx\Big)^{1/4} = \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^{\frac{2(p-4)}{p-2}} |D_N(x)|^{\frac{2p}{p-2}} dx\Big)^{1/4} \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{T}} (|D_N(x)|^{\frac{2(p-4)}{p-2}})^{\frac{p-2}{p-4}} dx\Big)^{\frac{1}{4}\frac{p-4}{p-2}} \Big(\int_{\mathbb{T}} (|D_N(x)|^{\frac{2p}{p-2}})^{\frac{p-2}{2}} dx\Big)^{\frac{1}{4}\frac{2}{p-2}} \\ &= \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^2 dx\Big)^{\frac{p-4}{4(p-2)}} \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{2(p-2)}} \\ &= \|D_N\|_2^{\frac{p-4}{2(p-2)}} \|D_N\|_p^{\frac{p}{2(p-2)}} \overset{(2)}{\leq} 2^{\frac{p-4}{2(p-2)}} N^{\frac{p-4}{4(p-2)}} \|D_N\|_p^{\frac{p}{2(p-2)}} \leq N^{\frac{p-4}{4(p-2)}} \big(2\|D_N\|_p\big)^{\frac{p}{2(p-2)}},\end{aligned}$$

što implicira

$$\|D_N\|_p \geq \frac{1}{2} N^{1-\frac{1}{p}}.$$

Za gornju ogradu treba jedino zapisati, korištenjem $|D_N(x)| \leq 2N+1 \leq 3N$,

$$\|D_N\|_p^p = \int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^p dx \leq (3N)^{p-4} \int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^4 dx = (3N)^{p-4}\|D_N\|_4^4 \overset{(3)}{\leq} (3N)^{p-4}3^4N^3 = 3^pN^{p-1},$$

odakle je

$$\|D_N\|_p \leq 3N^{1-\frac{1}{p}}.$$

Sve u svemu, jednakosti iz zadatka vrijede za sve navedene vrijednosti od p i to uz $c = \frac{1}{3}$ i $C = 3$.

6. Označimo

$$(R_n f)(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(x + \frac{k}{n}\Big).$$

Funkcije $R_n f$ ima smisla zvati "varijabilnim Riemannovim sumama" integrala $\int_{\mathbb{T}} f(x)dx$.

(a) Uzmimo bilo koju $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ i proizvoljni $\varepsilon > 0$. Zbog gustoće od $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ u $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ postoji $g \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ takva da je $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Kako je g uniformno neprekidna, postoji $\delta > 0$ takav da

$$|x - y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Uzmimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $1/n_0 < \delta$. Tada za $n \geq n_0$ i svaki $x \in \mathbb{T}$ imamo

$$\Big|(R_n g)(x) - \int_{\mathbb{T}} g(y)dy\Big| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[x+k/n, x+(k+1)/n\rangle} \Big|g\Big(x + \frac{k}{n}\Big) - g(y)\Big|dy < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{n} = \frac{\varepsilon}{3}$$

pa je posebno

$$\Big\|R_n g - \int_{\mathbb{T}} g\Big\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Osim toga, za $n \geq n_0$ po nejednakosti trokuta za p-normu imamo

$$\|R_n f - R_n g\|_p \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\int_{\mathbb{T}}\Big|f\Big(x + \frac{k}{n}\Big) - g\Big(x + \frac{k}{n}\Big)\Big|^p dx\Big)^{1/p} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|f - g\|_p = \|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Konačno,

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x) - g(x)|dx = \|f - g\|_1 \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sve u svemu, za $n \geq n_0$ vrijedi

$$\Big\|R_n f - \int_{\mathbb{T}} f\Big\|_p \leq \|R_n f - R_n g\|_p + \Big\|R_n g - \int_{\mathbb{T}} g\Big\|_p + \Big|\int_{\mathbb{T}} g - \int_{\mathbb{T}} f\Big| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

(b) Uz identifikaciju $\mathbb{T} \equiv \big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big\rangle$ definirajmo $f(x) := |x|^{-\frac{3}{4}}$. To je funkcija u prostoru $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ jer imamo

$$\int_{-1/2}^{1/2} |x|^{-\frac{3}{4}}dx \overset{\text{LTMK}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\int_{\varepsilon}^{1/2} x^{-\frac{3}{4}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 8x^{\frac{1}{4}}\Big|_{x=\varepsilon}^{x=1/2} = \frac{8}{\sqrt[4]{2}} < +\infty.$$

Trebat ćemo sljedeću lemu. Ona je poznati rezultat iz diofantskih aproksimacija.

Lema. Za iracionalni broj x postoji beskonačno mnogo parova $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ takvih da je $\big|x - \frac{m}{n}\big| < \frac{1}{n^2}$.

Dokaz leme. Za svaki $N \in \mathbb{N}$ promotrimo $N + 1$ brojeva $nx \bmod 1 \in [0, 1\rangle$ za $n = 0, 1, \ldots, N$. Po Dirichletovom principu neka dva od njih udaljena su za manje od $1/N$; neka su to brojevi

$$n_1 x \bmod 1 = n_1 x - m_1, \quad n_2 x \bmod 1 = n_2 x - m_2$$

za neke $0 \leq n_1 < n_2 \leq N$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Imamo

$$\frac{1}{N} > |(n_2 x - m_2) - (n_1 x - m_1)| = |(n_2 - n_1)x - (m_2 - m_1)|$$

pa smo, uz $m := m_2 - m_1$, $n := n_2 - n_1$ dobili

$$\Big| x - \frac{m}{n} \Big| = \frac{|nx - m|}{n} < \frac{1}{nN} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ovaj postupak ponavljamo tako da svaki idući put biramo N takav da je $1/N$ manji od svih razlika $|x - m/n|$ iz prethodnih koraka konstrukcije. ■

Vratimo se na zadatak. Za svaki iracionalni broj $x \in \big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big\rangle$ radi leme postoje prirodni brojevi $2 \leq n_1(x) < n_2(x) < \cdots$ takvi da za svaki $k \in \mathbb{Z}$ postoji $m_k(x) \in \mathbb{Z}$ sa svojstvom

$$\Big| x - \frac{m_k(x)}{n_k(x)} \Big| < \frac{1}{n_k(x)^2}.$$

Tada je

$$f\Big(x - \frac{m_k(x)}{n_k(x)}\Big) \geq f\Big(\frac{1}{n_k(x)^2}\Big) = n_k(x)^{\frac{3}{2}}$$

pa imamo

$$(R_{n_k(x)} f)(x) \geq n_k(x)^{\frac{1}{2}}.$$

Odavde je

$$\lim_{n \to \infty} (R_{n_k(x)} f)(x) = +\infty$$

pa zaključujemo da (1) ne vrijedi ni za koji iracionalni broj x. Dakle, (1) može vrijediti samo u racionalnim brojevima x, a skup takvih ima mjeru 0.

Napomena. Rudin je 1964. našao primjer ograničene funkcije za koju (1) vrijedi samo na skupu mjere 0. S druge strane, Jessen je još 1934. pokazao da za svaku $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ konvergencija (1) na svakom podnizu određenom indeksima $n_1 | n_2 | n_3 | \cdots$ vrijedi za gotovo svaki $x \in \mathbb{T}$.