Fourierovi redovi i primjene

Prvi kolokvij, 6. 5. 2021.

1. *(3+3+4=10 bodova)* Ispitajte konvergira li niz funkcija $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ zadan sa

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$$

(a) g.s. na $\mathbb{R}$, (b) uniformno na $\mathbb{R}$, (c) u $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

2. *(5+5=10 bodova)* Zadan je parametar $-\pi < a < \pi$.

(a) Razvijte "šatorastu" funkciju zadanu formulom $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\pi}{a+\pi} & \text{za } -\pi \le x \le a \\ \dfrac{x-\pi}{a-\pi} & \text{za } a < x \le \pi \end{cases}$

u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$.

(b) Uzimajući $a = 0$ izračunajte $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

Napomena. Traženu sumu možete izračunati i na neki drugi način, ali ne smijete bez dokaza iskoristiti gotove formule poput vrijednosti od $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

3. *(10 bodova)* Za svaki $N \in \mathbb{N}$ izračunajte $\displaystyle\int_0^{\pi} \Big(\frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}\Big)^3 dx$.

Napomena. Rezultat treba biti iskazan kao elementarna funkcija u varijabli N, bez znakova sume ili integrala.

4. *(10 bodova)* Za danu $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ definiramo niz $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ u $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ formulom $f_k := \underbrace{f * f * \cdots * f}_{k \text{ funkcija}}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako su g.s. jednaka neka dva uzastopna člana niza $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, dokažite da svi članovi tog niza moraju biti međusobno g.s. jednaki.

5. *(10 bodova)* Nađite sve 1-periodične omeđene izmjerive funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takve da za gotovo svaki par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Napomena. Nije dovoljno pogoditi sva rješenja, već svaku tvrdnju morate potkrijepiti dokazom. Nadalje, nije dozvoljeno koristiti dodatne pretpostavke na funkciju f, poput neprekidnosti i sl.

6.* *(10 dodatnih bodova)* Dokažite da je formulom

$$\|f\|_{\mathrm{U}^2} := \Big(\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{f(x+y)f(x+z)}f(x+y+z)\,dx\,dy\,dz\Big)^{1/4}$$

dobro definirana norma na prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ takva da za svaku $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ vrijedi

$$\|f\|_{\mathrm{U}^2} \le \|f\|_2.$$

i da za svaku $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ imamo

$$\|f\|_{\mathrm{U}^2} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{f}(n)\big|^4\Big)^{1/4}.$$

Vjekoslav Kovač

Fourierovi redovi i primjene

Rješenja prvog kolokvija, 6. 5. 2021.

1. (a) DA. Naime, za $x \neq 0$ zbog $x^2 + 1 > 0$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} (x^2+1)^n = +\infty$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{za } x = 0. \end{cases}$$

(b) NE. Primijetimo da su funkcije f_n neprekidne. Iz (a) dijela zadatka znamo da je kandidat za limes funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{za } x = 0, \end{cases}$$

ali ona nije neprekidna pa konvergencija ne može biti uniformna.

(c) DA. Koristimo Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji, uz dominiranost integrabilnom funkcijom f_1,

$$\int_{\mathbb{R}} f_1 \, d\lambda = \lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} \frac{dx}{x^2+1} = \pi < +\infty,$$

i g.s. konvergenciju iz (a) dijela.

2. (a) Fourierovi koeficijenti se izračunaju kao:

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{2(\cos na - (-1)^n)}{n^2(\pi^2 - a^2)} \text{ za } n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{2 \sin na}{n^2(\pi^2 - a^2)} \text{ za } n \in \mathbb{N}$$

pa razvoj u Fourierov red glasi

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2 - a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos na - (-1)^n) \cos nx + \sin na \sin nx}{n^2}.$$

(b) Uzmimo $a = 0$. Fourierovi koeficijenti se sada pojednostavne: $a_0 = 1$,

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{za } n \text{ paran}, \\ 4/n^2\pi^2 & \text{za } n \text{ neparan} \end{cases}$$

i $b_n = 0$ za $n \geq 1$ pa je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{16}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

S druge strane je

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Zato Plancherelova formula

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

daje

$$\frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{2}{3},$$

odakle proizlazi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Napomena (dodana 7. 5. 2021.). Bilo je komentara da su Fourierovi koeficijenti funkcije iz zadatka prezahtjevni za računanje. U principu je riječ o rastavu domene integracije na dva podintervala i parcijalnoj integraciji na svakom od njih. Kao zanimljivost navedimo formulu kojom se u praksi može integrirati produkte sa šatorastim funkcijama gotovo bez ikakvog računanja.

Šatorasta formula. *Definirajmo* $\tau(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{c-a} & \text{za } a \le x \le c, \\ \dfrac{b-x}{b-c} & \text{za } c < x \le b \end{cases}$ *za neke* $a < c < b$*. Dakle,* τ *je "šator" nad intervalom* $[a,b]$ *s vrhom u točki* $(c,1)$*. Tada za svaku funkciju* $\varphi \in \mathrm{C}^2([a,b])$ *vrijedi formula*

$$\int_a^b \tau(x)\varphi''(x)\,dx = \frac{\varphi(b)-\varphi(c)}{b-c} - \frac{\varphi(c)-\varphi(a)}{c-a}.$$

Za dokaz te tvrdnje treba naprosto zbrojiti jednakosti

$$\int_a^c \frac{x-a}{c-a}\,\varphi''(x)\,dx = \varphi'(c) - \frac{\varphi(c)-\varphi(a)}{c-a},$$
$$\int_c^b \frac{b-x}{b-c}\,\varphi''(x)\,dx = -\varphi'(c) + \frac{\varphi(b)-\varphi(c)}{b-c},$$

dobivene parcijalnom integracijom i Leibniz-Newtonovom formulom.

U našem zadatku (tj. za f kao u iskazu zadatka) za svaku 2π-periodičnu funkciju $\varphi \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ imamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi''(x)\,dx = \frac{2\pi(\varphi(\pi)-\varphi(a))}{\pi^2-a^2}.$$

Ako za $n \in \mathbb{N}$ uzmemo

$$\varphi(x) = -\frac{1}{n^2}\cos nx \quad \Longrightarrow \quad \varphi''(x) = \cos nx,$$

tada šatorasta formula odmah daje

$$a_n = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi(-\cos n\pi + \cos na)}{n^2(\pi^2-a^2)} = \frac{2(\cos na - (-1)^n)}{n^2(\pi^2-a^2)}.$$

Ako pak uzmemo

$$\varphi(x) = -\frac{1}{n^2}\sin nx \quad \Longrightarrow \quad \varphi''(x) = \sin nx,$$

tada šatorasta formula odmah daje

$$b_n = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi(-\sin n\pi + \sin na)}{n^2(\pi^2-a^2)} = \frac{2\sin na}{n^2(\pi^2-a^2)}.$$

3. Ako $D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n x}$ označava 1-periodičnu Dirichletovu jezgru, tada možemo pisati:

$$I_N := \int_0^{\pi} \Big(\frac{\sin(2N+1)t}{\sin t}\Big)^3 dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\frac{\sin(2N+1)t}{\sin t}\Big)^3 dt$$
$$= \begin{bmatrix} t = \pi x \\ dt = \pi dx \end{bmatrix} = \pi \int_{-1/2}^{1/2} \Big(\frac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin \pi x}\Big)^3 dx = \pi \int_{-1/2}^{1/2} D_N(x)^3 dx.$$

Sada je

$$D_N(x)^3 = \Big(\sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi inx}\Big)^3 = \sum_{-N\le n_1,n_2,n_3\le N} e^{2\pi i(n_1+n_2+n_3)x}$$

i odmah očitavamo da je koeficijent uz $e^{2\pi i0x}$ jednak broju parova $(n_1, n_2) \in \{-N, \dots, N\}$ takvih da je $n_1 + n_2 = -n_3$ također u $\{-N, \dots, N\}$. Spomenuti broj je

$$(N+1) + (N+2) + \cdots + 2N + (2N+1) + 2N + \cdots + (N+2) + (N+1) = 3N^2 + 3N + 1$$

pa je rezultat zadatka

$$I_N = (3N^2 + 3N + 1)\pi.$$

4. S predavanja znamo

$$\widehat{f_k}(n) = \widehat{f}(n)^k$$

za svake $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$. Ako je $f_j = f_{j+1}$ g.s. za neki $j \in \mathbb{N}$, tada za svaki $n \in \mathbb{Z}$ mora vrijediti

$$\widehat{f}(n)^j = \widehat{f}(n)^{j+1} \quad\Longrightarrow\quad \widehat{f}(n) = 0 \text{ ili } \widehat{f}(n) = 1.$$

Odavde je

$$\widehat{f_k}(n) = \widehat{f}(n)^k = \widehat{f}(n)^{k+1} = \widehat{f_{k+1}}(n)$$

za $n \in \mathbb{Z}$ i za svaki $k \in \mathbb{N}$, a teorem jedinstvenosti konačno jamči $f_k = f_{k+1}$ g.s.

5. *Odgovor*: To su $f(x) = 0$ g.s. i funkcije oblika $f(x) = e^{2\pi inx}$ g.s. za neki $n \in \mathbb{Z}$.

Funkcijska jednadžba iz zadatka vrijedi za sve $(x, y) \in \mathbb{R} \setminus E$, pri čemu je $E \subseteq \mathbb{R}^2$ neki skup mjere 0. Po Tonelli-Fubinijevom teoremu je

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_E(x, y)\, d\lambda(x) \Big)\, d\lambda(y)$$

pa postoji skup $F \subseteq \mathbb{R}$ mjere 0 takav da za svaki $y \in \mathbb{R} \setminus F$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_E(x, y)\, d\lambda(x) = 0.$$

Posljedično, za svaki $y \in \mathbb{R} \setminus F$ vrijedi

$$f(x + y) = f(x)f(y) \quad \text{za g.s. } x \in \mathbb{T}.$$

Fiksirajmo $y \in \mathbb{R} \setminus F$. Pretpostavke na f garantiraju $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ pa su i funkcije

$$x \mapsto f(x + y) \quad \text{i} \quad x \mapsto f(y)f(x)$$

također u $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ i njihovi Fourierovi koeficijenti su redom

$$e^{2\pi iny}\widehat{f}(n) \quad \text{i} \quad f(y)\widehat{f}(n).$$

Zaključujemo da za svaki $y \in \mathbb{R} \setminus F$ i svaki $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$e^{2\pi iny}\widehat{f}(n) = f(y)\widehat{f}(n).$$

Razlikujemo dva slučaja.

1° Ako je $\widehat{f}(n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$, tada po teoremu jedinstvenosti dobivamo $f(x) = 0$ g.s.

2° Ako je $\widehat{f}(n) \neq 0$ za neki $n \in \mathbb{Z}$, tada dijeljenje s $\widehat{f}(n)$ daje $e^{2\pi iny} = f(y)$ za g.s. $y \in \mathbb{T}$.

Očigledno sva dobivena rješenja doista g.s. zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu iz zadatka.

6. Najprije, koristeći elementarnu nejednakost $|ab| \leq \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2$ za $a, b \in \mathbb{C}$, dobivamo

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \big| f(x) f(x+y) f(x+z) f(x+y+z) \big| \, dx \, dy \, dz \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 |f(x+y)|^2 \, dx \, dy \, dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(x+z)|^2 |f(x+y+z)|^2 \, dx \, dy \, dz,
\end{aligned}$$

a supstitucijom $x' = x + z$ posljednji izraz postaje

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 |f(x+y)|^2 \, dx \, dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(x')|^2 |f(x'+y)|^2 \, dx' \, dy \\
&= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 |f(x+y)|^2 \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

Konačno još supstituiramo $u = x + y$, što vodi na

$$= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 |f(u)|^2 \, dx \, du = \Big(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 \, dx \Big) \Big(\int_{\mathbb{T}} |f(u)|^2 \, du \Big) = \|f\|_2^4.$$

Zaključujemo

$$\int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \big| f(x) f(x+y) f(x+z) f(x+y+z) \big| \, dx \, dy \, dz \leq \|f\|_2^4 < +\infty$$

za svaku $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$.

Koristeći Toneli–Fubinijev teorem (što možemo zahvaljujući gornjem) i supstituciju $x' = x + z$, trostruki integral iz definicije od $\|f\|_{\mathrm{U}^2}$ možemo zapisati

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{f(x+y) f(x+z)} f(x+y+z) \, dx \, dy \, dz \\
&= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{f(x+y) f(x')} f(x'+y) \, dx \, dx' \, dy \\
&= \int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{f(x+y)} \, dx \Big) \Big(\int_{\mathbb{T}} \overline{f(x')} f(x'+y) \, dx' \Big) \, dy \\
&= \int_{\mathbb{T}} \underbrace{\Big| \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{f(x+y)} \, dx \Big|^2}_{\geq 0} \, dy.
\end{aligned}$$

Dakle, $\|f\|_{\mathrm{U}^2}$ je dobro definirano za svaku izmjerivu kvadratno-integrabilnu funkciju. Neovisnost o g.s. predstavniku iz $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ će slijediti iz dolje dokazane formule za $\|f\|_{\mathrm{U}^2}$ pomoću Fourierovih koeficijenata. Račun s početka usput daje i

$$\|f\|_{\mathrm{U}^2} \leq \|f\|_2.$$

Označimo li $g(x) := \overline{f(-x)}$, tada vidimo da je

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{f(x+y)} \, dx = \int_{\mathbb{T}} f(x) g(-x-y) \, dx = (f * g)(-y)$$

pa imamo

$$\|f\|_{\mathrm{U}^2} = \Big(\int_{\mathbb{T}} |(f * g)(-y)|^2 \, dy \Big)^{1/4} = \|f * g\|_2^{1/2}.$$

Nadalje, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ implicira $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ pa je za početak $f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. Svojstva Fourierovih koeficijenata daju

$$(\widehat{f * g})(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n) = \widehat{f}(n) \overline{\widehat{f}(n)} = |\widehat{f}(n)|^2$$

pa je svakako, po Plancherelovom teoremu za f,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{(f*g)}(n)\big|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^4 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f\|_1^2 |\widehat{f}(n)|^2 = \|f\|_1^2 \|f\|_2^2 \leq \|f\|_2^4 < +\infty,$$

odakle slijedi $f*g \in \mathrm{L}^2(\mathrm{T})$. Nadalje, prethodni račun i Plancherelova formula za $f*g$ daju

$$\|f\|_{\mathrm{U}^2} = \|f*g\|_2^{1/2} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{(f*g)}(n)\big|^2\Big)^{1/4} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^4\Big)^{1/4}.$$

Preostaje još provjeriti definicijska svojstva norme (za $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$, $c \in \mathbb{C}$):

- $\|f\|_{\mathrm{U}^2} \geq 0$;
- $\|f\|_{\mathrm{U}^2} = 0 \Longleftrightarrow \widehat{f}(n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow f = 0$ g.s. (po teoremu jedinstvenosti);
- $\|cf\|_{\mathrm{U}^2} = \Big(\int\limits_{\mathbb{T}}\int\limits_{\mathbb{T}}\int\limits_{\mathbb{T}} c^2\overline{c}^2 f(x)\overline{f(x+y)f(x+z)}f(x+y+z)\,dx\,dy\,dz\Big)^{1/4} = |c|\|f\|_{\mathrm{U}^2}$;
- $\|f+g\|_{\mathrm{U}^2} = \Big(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)+\widehat{g}(n)|^4\Big)^{1/4} \leq \Big(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^4\Big)^{1/4} + \Big(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(n)|^4\Big)^{1/4} = \|f\|_{\mathrm{U}^2} + \|g\|_{\mathrm{U}^2}$.

Napomena. Norma $\|\cdot\|_{\mathrm{U}^2}$ se zove *Gowersova U^2-norma* i jedna je od tzv. *Gowersovih normi uniformnosti.*