Fourierovi redovi i primjene

Prvi kolokvij, 10. 5. 2023.

1. *(3+3+4=10 bodova)* Ispitajte konvergira li niz funkcija $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ zadan sa

$$f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = (1-x^2)^n$$

   (a) g.s. na $[-1,1]$, (b) uniformno na $[-1,1]$, (c) u $\mathrm{L}^2([-1,1])$.

2. *(5+5=10 bodova)*

   (a) Razvijte funkciju zadanu formulom $f(x) = x\sin x$ u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi,\pi]$.

   (b) Izračunajte $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)^2}$.

3. *(5+5=10 bodova)*

   (a) Ako je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ takva da je $f * f$ g.s. jednaka nekoj konstantnoj funkciji, dokažite da je f također g.s. jednaka nekoj konstantnoj funkciji.

   (b) Ako je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ takva da je $\int_{\mathbb{T}} (f*f)(x)dx = 0$, dokažite da je tada $\int_{\mathbb{T}} f(x)dx = 0$.

4. *(10 bodova)* Za svaki $N \in \mathbb{N}$ izračunajte $\displaystyle\int_0^{\pi} \Big(\frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}\Big)^3 dx$.

   Napomena. Rezultat treba biti iskazan kao elementarna funkcija u varijabli N, bez znakova sume ili integrala.

5. *(10 bodova)* Neka je $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ 1-periodični trigonometrijski polinom čiji Fourierovi koeficijenti su nenegativni, tj. $\hat{f}(n) \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Pokažite da za svaku $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{T}} f(x)\,(g^\star * g)(x)\,dx \;\geq\; 0,$$

   pri čemu je $g^\star \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ funkcija definirana sa $g^\star(x) := \overline{g(-x)}$.

6.* *(10 dodatnih bodova)* Neka $D_N\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, $D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n x}$ označava 1-periodičnu Dirichletovu jezgru. Dokažite da postoje konstante $c, C \in \langle 0,\infty\rangle$ takve da za svaki $p \in [2,\infty\rangle$ i svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$cN^{1-\frac{1}{p}} \leq \|D_N\|_p \leq CN^{1-\frac{1}{p}}.$$

Vjekoslav Kovač

Fourierovi redovi i primjene

Rješenja prvog kolokvija, 10. 5. 2023.

1. (a) DA. Zapravo konvergira u svakoj točki iz $[-1,1]$. Naime, za $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ zbog $0 \leq 1-x^2 < 1$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} (1-x^2)^n = 0,$$

dok za $x = 0$ taj limes iznosi

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1.$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{za } x = 0. \end{cases}$$

(b) NE. Primijetimo da su funkcije f_n neprekidne. Iz (a) dijela zadatka znamo da je kandidat za limes funkcija $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{za } x = 0, \end{cases}$$

ali ona nije neprekidna pa konvergencija ne može biti uniformna.

(c) DA. Koristimo Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji, uz dominiranost konstantom 1, koja je integrabilna funkcija na $[-1,1]$, i g.s. konvergenciju iz (a) dijela,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{2,[-1,1]}^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |f_n - f|^2 \, \mathrm{d}\lambda = \int_{-1}^{1} 0 \, \mathrm{d}\lambda = 0.$$

2. (a) Fourierovi koeficijenti se izračunaju kao:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_n = (-1)^{n-1} \frac{2}{n^2-1} \text{ za } n \geq 2, \quad b_n = 0 \text{ za } n \in \mathbb{N}$$

pa razvoj u Fourierov red glasi

$$f(x) \sim 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1} \cos nx.$$

(b) Imamo

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}$$

pa Plancherelova formula

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

daje

$$2 + \frac{1}{4} + 4\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2},$$

odakle proizlazi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{11}{16}.$$

3. (a) Fourierovi koeficijenti od $f * f$ su $\widehat{f}(n)^2$; $n \in \mathbb{Z}$. Ako pretpostavimo da je $f * f$ g.s. jednaka konstanti, tada su svi njezini Fourierovi koeficijenti osim nultog jednaki 0, tj. $\widehat{f}(n)^2 = 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Slijedi $\widehat{f}(n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ pa po teoremu jedinstvenosti imamo $f = \widehat{f}(0)$ g.s.

   (b) Ako pak imamo $\int_{\mathbb{T}} (f * f)(x) dx = 0$, tada zapravo znamo da je nulti Fourierov koeficijent od $f * f$ jednak 0, tj. $\widehat{f}(0)^2 = 0$. Odatle je $\widehat{f}(0) = 0$, što je upravo $\int_{\mathbb{T}} f(x) dx = 0$.

4. Ako $D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n x}$ označava 1-periodičnu Dirichletovu jezgru, tada možemo pisati:

$$\begin{aligned} I_N &:= \int_0^{\pi} \Big(\frac{\sin(2N+1)t}{\sin t}\Big)^3 dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\frac{\sin(2N+1)t}{\sin t}\Big)^3 dt \\ &= \begin{bmatrix} t = \pi x \\ dt = \pi dx \end{bmatrix} = \pi \int_{-1/2}^{1/2} \Big(\frac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin \pi x}\Big)^3 dx = \pi \int_{-1/2}^{1/2} D_N(x)^3 dx. \end{aligned}$$

   Sada je

$$D_N(x)^3 = \Big(\sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n x}\Big)^3 = \sum_{-N \le n_1, n_2, n_3 \le N} e^{2\pi i (n_1 + n_2 + n_3) x}$$

   i odmah očitavamo da je koeficijent uz $e^{2\pi i 0 x}$ jednak broju parova $(n_1, n_2) \in \{-N, \ldots, N\}$ takvih da je $n_1 + n_2 = -n_3$ također u $\{-N, \ldots, N\}$. Spomenuti broj je

$$(N+1) + (N+2) + \cdots + 2N + (2N+1) + 2N + \cdots + (N+2) + (N+1) = 3N^2 + 3N + 1$$

   pa je rezultat zadatka

$$I_N = (3N^2 + 3N + 1)\pi.$$

5. Raspisivanjem konvolucije $g^\star * g$ po definiciji i korištenjem Fubinijevog teorema dobije se da je integral na lijevoj strani

$$\int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(x) g(y) \overline{g(y-x)} dx dy = [z = y - x] = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(y-z) g(y) \overline{g(z)} dy dz.$$

   Napomenimo da se Fubinijev teorem smio višestruko koristiti radi

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(x)||g(y)||g(y-x)| dx dy = [z = y - x] \\ &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(y-z)||g(y)||g(z)| dy dz \le \|f\|_\infty \|g\|_1^2 < +\infty. \end{aligned}$$

   Sada raspisujemo f po koeficijentima

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

   te uvrštavamo u gornji izraz:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n y} \overline{e^{2\pi i n z}}\Big) g(y) \overline{g(z)} dy dz \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i n y} \overline{e^{2\pi i n z}} g(y) \overline{g(z)} dy dz \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\widehat{f}(n)}_{\ge 0} \Big| \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i n y} g(y) dy \Big|^2 \ge 0. \end{aligned}$$

6. Najprije riješimo posebne slučajeve zadatka za $p=2$ i $p=4$, jer će se svi ostali slučajevi svesti na njih.

Za $p=2$ po Plancherelovoj formuli imamo jednakost

$$\|D_N\|_2 = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{D_N}(n)|^2\Big)^{1/2} = (2N+1)^{1/2},$$

odakle je

$$N^{1/2} \le \|D_N\|_2 \le 2N^{1/2}. \tag{1}$$

Za $p=4$ najprije računamo

$$\begin{aligned} D_N(x)^2 = 1\cdot e^{2\pi i(-2N)x} + 2\cdot e^{2\pi i(-2N+1)x} + \cdots + (2N)\cdot e^{2\pi i(-1)x} + (2N+1)\cdot e^{2\pi i 0x} \\ + (2N)\cdot e^{2\pi i 1x} + \cdots + 1\cdot e^{2\pi i(2N)x} \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} \|D_N\|_4 = \|D_N^2\|_2^{1/2} &= \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{D_N^2}(n)|^2\Big)^{1/4} \\ &= \Big(1^2+2^2+\cdots+(2N)^2+(2N+1)^2+(2N)^2+\cdots+1^2\Big)^{1/4} \\ &= \Big(\frac{1}{3}(2N+1)(8N^2+8N+3)\Big)^{1/4}, \end{aligned}$$

odakle imamo

$$N^{3/4} \le \|D_N\|_4 \le 3N^{3/4}. \tag{2}$$

Neka je sada $p\in\langle 2,4\rangle$. Gornju ogradu dobijemo iz Hölderove nejednakosti (za konjugirane eksponente $\frac{2}{4-p}$ i $\frac{2}{p-2}$) te (1) i (2):

$$\begin{aligned} \|D_N\|_p &= \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^p dx\Big)^{1/p} = \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^{4-p}|D_N(x)|^{2p-4} dx\Big)^{1/p} \\ &\le \Big(\int_{\mathbb{T}} (|D_N(x)|^{4-p})^{\frac{2}{4-p}} dx\Big)^{\frac{1}{p}\frac{4-p}{2}} \Big(\int_{\mathbb{T}} (|D_N(x)|^{2p-4})^{\frac{2}{p-2}} dx\Big)^{\frac{1}{p}\frac{p-2}{2}} \\ &= \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^2 dx\Big)^{\frac{4-p}{2p}} \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^4 dx\Big)^{\frac{p-2}{2p}} \\ &= \|D_N\|_2^{\frac{4}{p}-1}\|D_N\|_4^{2-\frac{4}{p}} \overset{(1),(2)}{\le} (2N^{1/2})^{\frac{4}{p}-1}(3N^{3/4})^{2-\frac{4}{p}} \le 3N^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Za donju ogradu koristimo trivijalnu ogradu $|D_N(x)|\le 2N+1\le 3N$ u računu:

$$N^3 \le \|D_N\|_4^4 = \int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^4 dx \le (3N)^{4-p}\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^p dx = 9N^{4-p}\|D_N\|_p^p,$$

koji povlači

$$\|D_N\|_p \ge \frac{1}{3}N^{1-\frac{1}{p}}.$$

Neka je konačno $p\in\langle 4,\infty\rangle$. Za donju ogradu koristimo Hölderovu nejednakost (za konjugirane eksponente $\frac{p-2}{p-4}$ i $\frac{p-2}{2}$) te (2) i (1):

$$\begin{aligned} N^{3/4} \overset{(2)}{\le} \|D_N\|_4 &= \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^4 dx\Big)^{1/4} = \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^{\frac{2(p-4)}{p-2}}|D_N(x)|^{\frac{2p}{p-2}} dx\Big)^{1/4} \\ &\le \Big(\int_{\mathbb{T}} (|D_N(x)|^{\frac{2(p-4)}{p-2}})^{\frac{p-2}{p-4}} dx\Big)^{\frac{1}{4}\frac{p-4}{p-2}} \Big(\int_{\mathbb{T}} (|D_N(x)|^{\frac{2p}{p-2}})^{\frac{p-2}{2}} dx\Big)^{\frac{1}{4}\frac{2}{p-2}} \\ &= \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^2 dx\Big)^{\frac{p-4}{4(p-2)}} \Big(\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{2(p-2)}} \\ &= \|D_N\|_2^{\frac{p-4}{2(p-2)}}\|D_N\|_p^{\frac{p}{2(p-2)}} \overset{(1)}{\le} 2^{\frac{p-4}{2(p-2)}}N^{\frac{p-4}{4(p-2)}}\|D_N\|_p^{\frac{p}{2(p-2)}} \le N^{\frac{p-4}{4(p-2)}}\big(2\|D_N\|_p\big)^{\frac{p}{2(p-2)}}, \end{aligned}$$

što implicira

$$\|D_N\|_p \geq \frac{1}{2} N^{1-\frac{1}{p}}.$$

Za gornju ogradu treba jedino zapisati, korištenjem $|D_N(x)| \leq 2N+1 \leq 3N$,

$$\|D_N\|_p^p = \int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^p dx \leq (3N)^{p-4} \int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|^4 dx = (3N)^{p-4} \|D_N\|_4^4 \overset{(2)}{\leq} (3N)^{p-4} 3^4 N^3 = 3^p N^{p-1},$$

odakle je

$$\|D_N\|_p \leq 3N^{1-\frac{1}{p}}.$$

Sve u svemu, jednakosti iz zadatka vrijede za sve navedene vrijednosti od p i to uz $c = \frac{1}{3}$ i $C = 3$.