Fourierovi redovi i primjene

Drugi kolokvij, 14. 6. 2017.

1. *(2+2+2=6 bodova)*
   (a) Razvijte funkciju $f(x) = \begin{cases} -x-\pi & \text{za } x \in [-\pi, 0\rangle, \\ 0 & \text{za } x = 0, \\ -x+\pi & \text{za } x \in \langle 0, \pi] \end{cases}$ u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$.
   (b) U kojim sve točkama $x \in [-\pi, \pi]$ Fourierov red od f konvergira prema samoj funkciji?
   (c) Izračunajte sumu reda $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}$.

2. *(6 bodova)* Neka je $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ niz realnih brojeva. Dokažite da red $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx$ konvergira uniformno na $\mathbb{R}$ prema nekoj funkciji klase C^{∞} ako i samo ako za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} n^m |\beta_n| = 0$.

3. *(2+2+2=6 bodova)*
   (a) Za svake $\gamma > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ dokažite indentitet: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma n} \sin nx = \frac{\sin x}{2(\operatorname{ch}\gamma - \cos x)}$.
   (b) Za $\gamma > 0$ izračunajte $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{ch}\gamma - \cos x}\, dx$.
   (c) Za $\gamma > 0$ izračunajte $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{(\operatorname{ch}\gamma - \cos x)^2}\, dx$.

4. *(2+2+2=6 bodova)* Za $n \in \mathbb{Z}$ standardno označavamo $e_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $e_n(x) := e^{2\pi i n x}$.
   (a) Pokažite da za svaki parametar $0 < \alpha < 1$ red $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e_{2^k}$ uniformno konvergira prema nekoj 1-periodičnoj neprekidnoj funkciji $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
   (b) Dokažite da za funkciju f iz (a) dijela zadatka i svake $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi
   $$|f(x) - f(y)| \le 2\pi |x-y| + 2^{-\alpha} |f(2x) - f(2y)|.$$
   (c) Dokažite da funkcija f iz (a) dijela zadatka u svakoj točki domene zadovoljava Hölderov uvjet reda α.

5. *(6 bodova)* Neka je $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ niz kompleksnih brojeva za kojeg vrijedi $a_n = o(1/n)$ kada $n \to \infty$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} n|a_n| = 0$. Ako red $\sum a_n$ konvergira u smislu Abela i vrijedi $(\mathrm{A})\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$, dokažite da taj red konvergira i klasično te da mu je suma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$.

6.* *(6 dodatnih bodova)* Pokažite da je za svaki $r \in \langle 0, +\infty\rangle$ i svaku $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ formulom
$$(T_r f)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{t}{t^2 + r^2}\, dt$$
definirana funkcija $T_r f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Nadalje, dokažite da je $(T_r)_{r \in \langle 0, +\infty\rangle}$ uniformno ograničena kolekcija operatora na Hilbertovom prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Vjekoslav Kovač i *Mario Stipčić*

Fourierovi redovi i primjene

Rješenja drugog kolokvija, 14. 6. 2017.

1. (a) Primijetimo da je funkcija f neparna pa je $a_0 = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, dok za $n \in \mathbb{N}$ račun (korištenjem parcijalne integracije) daje

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (-x+\pi)\sin nx\,dx = \frac{2}{n}.$$

Dakle,

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n}.$$

(b) Funkciju f proširujemo po 2π-periodičnosti na cijeli $\mathbb{R}$. Ona tada zadovoljava Dirichletove uvjete jer za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f'(x-) = -1 = f'(x+)$. Nadalje, f je neprekidna u točkama od $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, dok za svaki $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ imamo $\frac{1}{2}\big(f(x-)+f(x+)\big) = 0 = f(x)$. Po Dirichletovom teoremu Fourierov red od f u **svakoj** točki konvergira prema funkciji f.

(c) Zahvaljujući (b) dijelu zadatka u razvoj iz (a) dijela smijemo uvrstiti $x = 2\pi/3$ i dobiti

$$\frac{\pi}{3} = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n} = 2\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3k+1} + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{3k+2}\right) = \sqrt{3}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(3k+1)(3k+2)},$$

odakle slijedi

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2. $\boxed{\Longrightarrow}$ Ako navedeni red unifomno konvergira prema nekoj 2π-periodičnoj funkciji f, tada množenjem s $\cos nx$ i $\sin nx$ pa integriranjem po $[-\pi,\pi]$ član-po-član slijedi da su njezini Fourierovi koeficijenti

$$a_n = 0 \text{ za } n \in \mathbb{N}_0, \quad b_n = \beta_n \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Fiksirajmo neki prirodni broj m. Iz dodatne informacije da je f klase C^∞ parcijalnom integracijom za parni broj $k > m$ slijedi

$$b_n(f^{(k)}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f^{(k)}(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)(-1)^{k/2}n^k\sin nx\,dx = (-1)^{k/2}n^k b_n$$

pa imamo

$$n^{k-m}n^m|\beta_n| = n^k|b_n| \le \pi^{-1}\|f^{(k)}\|_{1,[-\pi,\pi]},$$

odakle je $\lim_{n\to\infty} n^m|\beta_n| = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tvrdimo da za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ red $\sum_{n=1}^\infty (\frac{d}{dx})^k(\beta_n \sin nx)$ uniformno konvergira prema nekoj funkciji f_k. Naime, obzirom da je $|\sin nx| \le 1$ i $|\cos nx| \le 1$, za to samo treba iskoristiti Weiestrassov kriterij uz brojeve $M_{k,n} := n^k|\beta_n|$. Red $\sum_{n=1}^\infty M_{k,n}$ ima konačnu sumu jer zbog ograničenosti niza $(n^{k+2}|\beta_n|)_{n=1}^\infty$ nekom konstantom $C_{k+2} \in [0,+\infty\rangle$ vrijedi $M_{k,n} \le C_{k+2}/n^2$. Zaključujemo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $f_0^{(k)} = f_k$ pa funkcija f_0 ima derivaciju svakog reda, tj. ona je klase C^∞.

3. (a) Računamo:

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-\gamma n}\sin nx = \mathrm{Im}\sum_{n=1}^\infty e^{-\gamma n}e^{inx} = \mathrm{Im}\sum_{n=1}^\infty (e^{-\gamma+ix})^n = \mathrm{Im}\,\frac{e^{-\gamma+ix}}{1-e^{-\gamma+ix}}$$

$$= \operatorname{Im} \frac{e^{-\gamma+ix}(1-e^{-\gamma-ix})}{(1-e^{-\gamma+ix})(1-e^{-\gamma-ix})} = \operatorname{Im} \frac{e^{-\gamma+ix}-e^{-2\gamma}}{1+e^{-2\gamma}-2e^{-\gamma}\cos x}$$
$$= \frac{e^{-\gamma}\sin x}{1+e^{-2\gamma}-2e^{-\gamma}\cos x} = \frac{\sin x}{2\operatorname{ch}\gamma - 2\cos x}.$$

(b) Iskoristimo li prethodni zadatak na niz $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ dan sa $\beta_n := e^{-\gamma n}$, zaključit ćemo da je formulom $f(x) = \frac{\sin x}{2(\operatorname{ch}\gamma - \cos x)}$ dana C^{∞} funkcija čiji Fourierov red uniformno konvergira i čiji Fourierovi koeficijenti su

$$a_n = 0 \text{ za } n \in \mathbb{N}_0, \quad b_n = e^{-\gamma n} \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Posebno imamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{ch}\gamma - \cos x}\, dx = 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\, dx = 2\pi b_1 = 2\pi e^{-\gamma}.$$

(c) Nastavljajući na (b) dio zadatka i koristeći Plancherelovu formulu dobivamo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{(\operatorname{ch}\gamma - \cos x)^2}\, dx = 4\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$
$$= 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\gamma n} = 4\pi \frac{e^{-2\gamma}}{1-e^{-2\gamma}} = \frac{4\pi}{e^{2\gamma}-1}.$$

4. (a) Uniformna konvergencija slijedi iz Weierstrassovog kriterija uz brojeve $M_k := 2^{-k\alpha}$ koji zadovoljavaju $\sum_{k=0}^{\infty} M_k = \frac{1}{1-2^{-\alpha}} < +\infty$. Obzirom da je svaka parcijalna suma 1-periodična neprekidna funkcija (kao trigonometrijski polinom), slijedi i da je suma reda f također 1-periodična neprekidna funkcija.

(b) Za svaki $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e_{2^k}(x) = e^{2\pi i x} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)\alpha} e_{2^{k+1}}(x)$$
$$= e^{2\pi i x} + 2^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e_{2^k}(2x) = e^{2\pi i x} + 2^{-\alpha} f(2x)$$

pa za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) - f(y) = \int_y^x 2\pi i e^{2\pi i t} dt + 2^{-\alpha}\big(f(2x) - f(2y)\big),$$

odakle je doista

$$|f(x) - f(y)| \le 2\pi|x-y| + 2^{-\alpha}|f(2x) - f(2y)|.$$

(c) Označimo $M := \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ te uzmimo proizvoljne $u, v \in \mathbb{R}$ takve da je $0 < |u-v| < 1$. Nadalje, uzmimo jedinstveni $m \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-m} \le |u-v| < 2^{-m+1}$ te m puta iskoristimo nejednakost iz (b) dijela:

$$|f(u) - f(v)| \le \sum_{j=0}^{m-1} 2\pi (2^{-\alpha})^j |2^j u - 2^j v| + (2^{-\alpha})^m |f(2^m x) - f(2^m y)|$$

$$
\begin{aligned}
&\le 2\pi|u-v|\sum_{j=0}^{m-1} 2^{(1-\alpha)j} + 2M2^{-\alpha m} \\
&\le 2\pi|u-v|\frac{2^{(1-\alpha)m}}{2^{1-\alpha}-1} + 2M2^{-\alpha m} \\
&= 2\pi|u-v|\frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}(2^{-m+1})^{\alpha-1} + 2M(2^{-m})^{\alpha} \\
&\qquad \text{koristeći } \alpha-1<0,\ \alpha>0 \\
&\le 2\pi|u-v|\frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}|u-v|^{\alpha-1} + 2M|u-v|^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Dakle, za neku konstantu $C_\alpha \in \langle 0, +\infty\rangle$ imamo

$$|f(u)-f(v)| \le C_\alpha |u-v|^\alpha$$

čim su $u, v \in \mathbb{R}$ takvi da je $0 < |u-v| < 1$, a to dokazuje Hölderov uvjet reda α u svakoj točki od $\mathbb{R}$.

5. Po pretpostavci znamo

$$\lim_{r\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = a.$$

Zato za dani $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $r \in \langle 1-\delta, 1\rangle$ vrijedi

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - a\Big| < \varepsilon. \tag{1}$$

Nadalje, iz $\lim\limits_{n\to\infty} n|a_n| = 0$ slijedi da postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \ge N_0$ imamo

$$n|a_n| < \varepsilon. \tag{2}$$

Osim toga, kao na predavanjima zaključujemo da niz $(n|a_n|)_{n=0}^{\infty}$ i u smislu Cesàra konvergira prema 0, tj. da vrijedi $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} n|a_n| = 0$. Dakle, postoji $N_1 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $N \ge N_1$ imamo

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} n|a_n| < \varepsilon. \tag{3}$$

Uzmimo sada neki $N \in \mathbb{N}$, $N \ge \max\{N_0, N_1, \delta^{-1}\}$. Uvrstit ćemo $r = 1 - \frac{1}{N+1}$ u (1), što smijemo jer je $r > 1-\delta$. Osim toga, radi (2) možemo ocijeniti

$$\Big|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n\Big| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\varepsilon r^n}{n} \le \frac{\varepsilon}{N+1}\sum_{n=N+1}^{\infty} r^n < \frac{\varepsilon}{(N+1)(1-r)} = \varepsilon. \tag{4}$$

Nadalje, iz (3) proizlazi

$$\Big|\sum_{n=0}^{N} a_n(1-r^n)\Big| \le \sum_{n=0}^{N} |a_n||1-r||1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}| \le \underbrace{(1-r)}_{1/(N+1)}\sum_{n=0}^{N} n|a_n| < \varepsilon. \tag{5}$$

Kombiniranje (5), (4) i (1) konačno daje

$$\Big|\sum_{n=0}^{N} a_n - a\Big| \le \Big|\sum_{n=0}^{N} a_n(1-r^n)\Big| + \Big|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n\Big| + \Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - a\Big| < 3\varepsilon.$$

Napomena: Ovo je teorem A. Taubera iz 1897.

6. U daljnjem fiksirajmo $r \in \langle 0, +\infty\rangle$. Cilj je dobiti ograničenost operatora T_r na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ i gornju među na njegovu normu koja ne ovisi o broju r.

   Neka je najprije $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Označimo li $g(x) := \frac{x}{x^2+r^2}$, definiciju operatora možemo zapisati $T_r f = f * g$. Kako je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ i $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, lako je zaključiti $f * g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |(f*g)(x)|^2 dx &\le \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)| dy \Big)^2 dx \\ &\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \int_{\mathbb{R}} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| dy}_{\|f\|_{1,\mathbb{R}}} \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^2 dy \Big) dx \\ &= \|f\|_{1,\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(y)|^2 \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| dx \Big) dy = \|f\|_{1,\mathbb{R}}^2 \|g\|_{2,\mathbb{R}}^2 < +\infty.\end{aligned}$$

   Nadalje, imamo formulu $(T_r f)\widehat{\ } = (f*g)\widehat{\ } = \hat{f}\hat{g}$, pri čemu je ovdje Fourierova transformacija proširena do jedinstvenog unitarnog operatora na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. U svrhu računanja $\hat{g}$ označimo $h(\xi) := -i\pi \operatorname{sgn} \xi e^{-2\pi r|\xi|}$. Iz računa

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi &= i\pi \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi(r+ix)\xi} d\xi - i\pi \int_{0}^{+\infty} e^{2\pi(-r+ix)\xi} d\xi \\ &= \frac{i\pi}{2\pi(r+ix)} - \frac{i\pi}{2\pi(r-ix)} = \frac{x}{r^2+x^2}\end{aligned}$$

   slijedi $\check{h} = g$ te je posljedično $\hat{g} = h$. Prema tome, Plancherelov teorem i $|\hat{g}(\xi)| = |h(\xi)| \le \pi$ daju

$$\|T_r f\|_{2,\mathbb{R}} = \|(T_r f)\widehat{\ }\|_{2,\mathbb{R}} = \|\hat{f}\hat{g}\|_{2,\mathbb{R}} \le \pi \|\hat{f}\|_{2,\mathbb{R}} = \pi \|f\|_{2,\mathbb{R}}.$$

   Uzmimo sada općenitu $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ i neka je $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ niz u $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ koji po L^2 normi konvergira prema f. Radi neprekidnosti skalarnog produkta na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$(T_r f)(x) = \langle f(x-\cdot), g\rangle_{\mathbb{R}} = \lim_{n\to\infty} \langle f_n(x-\cdot), g\rangle_{\mathbb{R}} = \lim_{n\to\infty} (T_r f_n)(x).$$

   Zato Fatouova lema i prethodni dio dokaza (primijenjen na funkcije f_n) daju

$$\|T_r f\|_{2,\mathbb{R}} \le \liminf_{n\to\infty} \|T_r f_n\|_{2,\mathbb{R}} \le \pi \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{2,\mathbb{R}} = \pi \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{2,\mathbb{R}} = \pi \|f\|_{2,\mathbb{R}}.$$

   Dakle, T_r je ograničen na prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ i operatorska norma mu je najviše jednaka π.

   Napomena: Granični operator $f \mapsto \frac{1}{\pi} \lim_{r\to 0+} T_r f$ naziva se *Hilbertova transformacija*, pri čemu bi za njezinu definiciju tek trebalo argumentirati postojanje limesa u odgovarajućem smislu.