Fourierovi redovi i primjene

Drugi kolokvij, 20. 6. 2017.

1. *(3+3=6 bodova)* Za $\alpha \in \mathbb{C} \setminus (2\pi i\mathbb{Z}) = \mathbb{C} \setminus \{2\pi i n : n \in \mathbb{Z}\}$ dana je 1-periodična funkcija f_α takva da vrijedi $f_\alpha(t) = e^{\alpha t}$ za svaki $t \in [0, 1\rangle$.

   (a) Razvijte funkciju f_α u eksponencijalni Fourierov red.

   (b) Izračunajte $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(6n-1)^2}$.

2. *(3+3=6 bodova)* Neka su $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n$ i $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n$ apsolutno konvergentni redovi.

   (a) Dokažite da je red $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_{n-m}\beta_m$ konvergentan za sve $n \in \mathbb{Z}$. Nadalje, uz oznaku $\gamma_n := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_{n-m}\beta_m, n \in \mathbb{Z}$ dokažite da vrijedi
   $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma_n| \leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|\Big)\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\beta_n|\Big).$$

   (b) Označimo $f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{2\pi i n x}$, $g(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n e^{2\pi i n x}$, $h(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n e^{2\pi i n x}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dokažite da su f, g i h neprekidne funkcije te da vrijedi $h = fg$.

3. *(2+2+2=6 bodova)* Dana je 2π-periodična funkcija f takva da je $f(x) = \mathbb{1}_{[-\pi,0\rangle}(x) + 3\mathbb{1}_{[0,\pi\rangle}(x)$ za svaki $x \in [-\pi, \pi\rangle$.

   (a) Razvijte funkciju f u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$.

   (b) U kojim sve točkama $x \in [-\pi, \pi]$ Fourierov red od f konvergira prema samoj funkciji?

   (c) Odredite $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{6n+1} - \frac{1}{6n+5}\Big)$.

4. *(6 bodova)* Razvijte u eksponencijalni Fourierov red 1-periodičnu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ danu formulom $f(t) := e^{e^{2\pi i t}} = e^{(e^{2\pi i t})}$.

5. *(6 bodova)* Dokažite da za trigonometrijski polinom $f(t) := \sum_{n=0}^{N} c_n e^{2\pi i n t}$, pri čemu su $N \in \mathbb{N}$ i $c_0, c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$, vrijedi
   $$\max_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| \leq 100N \max_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

6.* *(6 dodatnih bodova)* Neka su $p \in [1, \infty\rangle$ i $q \in \langle 1, \infty\rangle$. Ako je $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ niz prirodnih brojeva takav da je $m_{j+1} \geq q m_j$ za svaki $j \in \mathbb{N}$ i ako je $(c_j)_{j=1}^{\infty}$ niz kompleksnih brojeva sa svojstvom $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < +\infty$, dokažite da (1-periodični eksponencijalni) trigonometrijski red $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{2\pi i m_j t}$ na torusu $\mathbb{T}$ konvergira po normi $\|\cdot\|_p$.

Vjekoslav Kovač i *Mario Stipčić*

Fourierovi redovi i primjene

Rješenja drugog kolokvija, 20. 6. 2017.

1. (a) Vrijedi
$$\widehat{f_\alpha}(n) = \int_0^1 e^{\alpha t} e^{-2\pi i n t} dt = \frac{e^{(\alpha-2\pi i n)t}}{\alpha - 2\pi i n}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{e^{\alpha - 2\pi i n} - 1}{\alpha - 2\pi i n} = \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha - 2\pi i n}$$
za $n \in \mathbb{Z}$. Stoga je traženi Fourierov razvoj
$$f_\alpha(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{\alpha}-1}{\alpha - 2\pi i n} e^{2\pi i n t}.$$

   (b) Za $\alpha = \frac{\pi}{3} i$ izvedeni Fourierov koeficijent je oblika
$$\widehat{f_{\frac{\pi}{3}i}}(n) = \frac{e^{\frac{\pi}{3}i} - 1}{\frac{\pi}{3}i - 2\pi i n} = \frac{3\big(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\big)}{\pi i - 6\pi i n} = \frac{3}{\pi i}\Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\Big)\frac{1}{6n-1}$$
pa po Plancherelovoj formuli imamo
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{9}{\pi^2}\frac{1}{(6n-1)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{f_{\frac{\pi}{3}i}}(n)\big|^2 = \big\|f_{\frac{\pi}{3}i}\big\|_2^2 = \int_0^1 \big|e^{\frac{\pi}{3}it}\big|^2 dt = \int_0^1 dt = 1$$
$$\Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(6n-1)^2} = \frac{\pi^2}{9}.$$

2. (a) Za $\epsilon > 0$ postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|\alpha_m| \leq \epsilon$ za sve $m \in \mathbb{Z}$ takve da je $|m| \geq m_0$. Uz $M := \max\{\epsilon, |\alpha_m| : m \in \mathbb{Z}, |m| < m_0\}$ slijedi
$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\alpha_{n-m}\beta_m| \leq M \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\beta_m| < +\infty,$$
što znači da je red $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_{n-m}\beta_m$ apsolutno konvergentan, a onda ujedno i konvergentan. Stoga ima smisla definirati $\gamma_n := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_{n-m}\beta_m$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Vrijedi
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\alpha_{n-m}\beta_m| = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_{n-m}|\Big)|\beta_m| = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|\Big)\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\beta_m|\Big).$$
Pritom smo zamijenili poredak sumacije jer je riječ o dvostrukom redu s nenegativnim sumandima (ili možemo iskoristiti Tonellijev teorem za produkt dviju brojećih mjera na $\mathbb{Z}$).

   (b) Redovi
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{2\pi i n x}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n e^{2\pi i n x}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n e^{2\pi i n x}$$
su redovi neprekidnih funkcija koji uniformno konvergiraju, po Weierstrassovom kriteriju i radi konvergencije od
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\beta_n|, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma_n|$$
(gdje koristimo i (a) dio zadatka), iz čega slijedi neprekidnost funkcija f, g, h. Nadalje,
$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n e^{2\pi i n x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_{n-m}\beta_m e^{2\pi i n x} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_{n-m} e^{2\pi i (n-m) x}\beta_m e^{2\pi i m x} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{2\pi i n x}\Big)\beta_m e^{2\pi i m x} = f(x)g(x). \end{aligned}$$
Pritom smo mogli napraviti zamjenu u poretku integracije jer je dvostruki red apsolutno konvergentan (ili primjenom Fubinijevog teorema na produktne brojeće mjere po $\mathbb{Z}$).

3. (a) Vrijedi $a_0 = 4$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}$ za $n \in \mathbb{N}$, a onda i $b_{2k} = 0$ i $b_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)}$ za $k \in \mathbb{N}$. Traženi trigonometrijski Fourierov razvoj je

$$f(x) \sim 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin(2n-1)x, \quad x \in [-\pi, \pi] .$$

(b) Funkcija f (proširena po 2π-periodičnosti) zadovoljava Dirichletove uvjete obzirom da je $f'(x+) = f'(x-) = 0$ za sve $x \in [-\pi, \pi]$. Stoga Fourierov red u svakoj točki $x \in [-\pi, \pi]$ konvergira prema $\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+))$, ali to je jednako $f(x)$ samo za $x \in \langle -\pi, 0\rangle \cup \langle 0, \pi\rangle$.

(c) Radi (b) dijela u Fourierov razvoj možemo uvrstiti $x = \frac{\pi}{3}$. U toj točki je funkcija f neprekidna pa slijedi

$$\begin{aligned} 3 = f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin \frac{(2n-1)\pi}{3} \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(6k-5)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{\pi(6k-3)} \cdot 0 + \frac{4}{\pi(6k-1)} \cdot \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \right) \\ &= 2 + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6n+1} - \frac{1}{6n+5} \right). \end{aligned}$$

Dobivamo da je tražena suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6n+1} - \frac{1}{6n+5} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

4. Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \int_0^1 e^{e^{2\pi i t}} e^{-2\pi i n t} dt \overset{\text{parc. int.}}{=} e^{e^{2\pi i t}} \frac{e^{-2\pi i n t}}{-2\pi i n} \Bigg|_{t=0}^{t=1} + \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 (2\pi i)\, e^{2\pi i t} e^{e^{2\pi i t}} e^{-2\pi i n t} dt \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 e^{e^{2\pi i t}} e^{-2\pi i (n-1) t} dt = \frac{\hat{f}(n-1)}{n}. \end{aligned}$$

Primijetimo da je $\hat{f}(-1) = \int_0^1 e^{e^{2\pi i t}} e^{2\pi i t} dt = \frac{1}{2\pi i} e^{e^{2\pi i t}} \big|_0^1 = 0$, odakle slijedi $\hat{f}(n) = 0$ za sve $n \leq -1$. Iz dobivene rekurzivne relacije po $n \geq 0$ slijedi $\hat{f}(n) = \frac{\hat{f}(0)}{n!}$. Time bismo dobili Fourierov red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(0)}{n!} e^{2\pi i n t}.$$

Zbog $\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\hat{f}(0)|}{n!} < +\infty$ vrijedi da on uniformno konvergira prema funkciji f. Uvrstimo li $t = 0$, dobivamo

$$e = f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(0)}{n!} e^{2\pi i n 0} = \hat{f}(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e\, \hat{f}(0),$$

iz čega slijedi $\hat{f}(0) = 1$. Prema tome, traženi Fourierov razvoj je

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{2\pi i n t}.$$

Mogli smo pristupiti i na drukčiji način. Ako u Taylorov razvoj eksponencijalne funkcije

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

uvrstimo $z = e^{2\pi it}$, dobivamo

$$e^{e^{2\pi it}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{2\pi int}.$$

Uočimo da ovaj red, po Weierstrassovom kriteriju i zbog $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < +\infty$, konvergira uniformno. Zato ga se smije pomnožiti s $e^{-2\pi it}$ i prointegrirati, iz čega slijedi da su Fourierovi koeficijenti od f doista $\hat{f}(n) = \frac{1}{n!}$ za $n \geq 0$, $\hat{f}(n) = 0$ za $n \geq 0$ pa je gore navedeni red uistinu eksponencijalni Fourierov razvoj funkcije f.

5. Prisjetimo se Fejérove jezgre za sistem $\mathbb{B}$:

$$F_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t) = \sum_{n=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|n|}{N}\Big) e^{2\pi int},$$

da je

$$|F_N(t)| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (2n+1) = N$$

i da za svaki $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ imamo

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \Big(\frac{\sin N\pi t}{\sin \pi t} \Big)^2.$$

Uspoređivanjem Fourierovih koeficijenata slijedi

$$(F_N * f)(t) = \sum_{n=0}^{N} \Big(1 - \frac{n}{N}\Big) c_n e^{2\pi int} = \sum_{n=0}^{N} c_n e^{2\pi int} - \frac{1}{2\pi iN} \sum_{n=0}^{N} c_n e^{2\pi int} 2\pi in = f(t) - \frac{1}{2\pi iN} f'(t)$$

pa za svaki $t \in T$ imamo

$$|f'(t)| \leq 2\pi N|f(t)| + 2\pi N|(F_N * f)(t)| \leq 2\pi N|f(t)| + 2\pi N \int_{\mathbb{T}} |F_N(u)||f(t-u)|du,$$

odakle je

$$\max_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| \leq 2\pi N \max_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| + 2\pi N \Big(\int_{\mathbb{T}} |F_N(u)|du \Big) \max_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

Preostaje ocijeniti

$$\int_{\mathbb{T}} |F_N(u)|du \leq 2\int_0^{1/2N} |F_N(u)|du + 2\int_{1/2N}^{1/2} |F_N(u)|du \leq 2\int_0^{1/2N} N du + \frac{2}{N} \int_{1/2N}^{1/2} \frac{du}{\sin^2 \pi u}$$

$$\text{korištenjem } \sin t \geq \frac{2}{\pi} t \text{ za } t \in [0, \pi/2]$$

$$\leq 2N \cdot \frac{1}{2N} + \frac{2}{N} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{-1}{u}\Big|_{u=1/2N}^{u=1/2} \leq 1 + 1 = 2$$

te primijetiti $2\pi N + 4\pi N < 100N$.

Napomena: Ovo je tzv. *Bernsteinova nejednakost*, premda navedena konstanta 100 nije optimalna.

6. Najprije pokazujemo da za dane $p \in [1, \infty\rangle$ i $q \in \langle 1, \infty\rangle$ postoji konstanta $C_{p,q}$ sa sljedećim svojstvom: ako je $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ niz prirodnih brojeva takav da je $m_{j+1} \geq q m_j$ za svaki $j \in \mathbb{N}$ i ako je $(c_j)_{j=1}^{\infty}$ niz kompleksnih brojeva, tada za svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big\|_p \leq C_{p,q} \Big(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \Big)^{1/2}. \tag{1}$$

(Pritom se podrazumijeva da se p-norma uzima u varijabli $t \in \mathbb{T}$.)

Za $p \in [1, 2]$ nejednakost (1) vrijedi čak uz $C_{p,q} = 1$, jer po Plancherelovom identitetu imamo:

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big\|_p \leq \Big\| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big\|_2 = \Big(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \Big)^{1/2}.$$

Nadalje, dovoljno je dokazati (1) kada je $p \geq 2$ paran cijeli broj. Naime, inače za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $2m \leq p < 2m + 2$ pa po monotonosti p-normi imamo:

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big\|_p \leq \Big\| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big\|_{2m+2} \leq C_{2m+2,q} \Big(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \Big)^{1/2}.$$

Dakle, pretpostavimo $p = 2m$ za neki $m \in \mathbb{N}$ i raspišimo p-tu potenciju norme na lijevoj strani od (1):

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big\|_{2m}^{2m} &= \int_{\mathbb{T}} \Big| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big|^{2m} dt = \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big)^m \Big(\sum_{j=1}^{N} \overline{c_j} e^{-2\pi i m_j t} \Big)^m dt \\
&= \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_N \in \mathbb{N}_0 \\ k_1+\cdots+k_N=m}} \frac{m!}{k_1! \cdots k_N!} (c_1 e^{2\pi i m_1 t})^{k_1} \cdots (c_N e^{2\pi i m_N t})^{k_N} \Big) \\
&\qquad \Big(\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_N \in \mathbb{N}_0 \\ l_1+\cdots+l_N=m}} \frac{m!}{l_1! \cdots l_N!} (\overline{c_1} e^{-2\pi i m_1 t})^{l_1} \cdots (\overline{c_N} e^{-2\pi i m_N t})^{l_N} \Big) dt \\
&= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_N,l_1,\ldots,l_N \in \mathbb{N}_0 \\ k_1+\cdots+k_N=l_1+\cdots+l_N=m \\ m_1k_1+\cdots+m_Nk_N=m_1l_1+\cdots+m_Nl_N}} \frac{m!}{k_1! \cdots k_N!} \, \frac{m!}{l_1! \cdots l_N!} \, c_1^{k_1} \cdots c_N^{k_N} \, \overline{c_1}^{l_1} \cdots \overline{c_N}^{l_N}.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo sada dodatno da je

$$q > m + 1. \tag{2}$$

U tom slučaju je uvjet $m_1k_1 + \cdots + m_Nk_N = m_1l_1 + \cdots + m_Nl_N$ ispunjen samo ako indeksi zadovoljavaju $k_1 = l_1, \ldots, k_N = l_N$. To se vidi indukcijom po $N \in \mathbb{N}$, pri čemu je baza $N = 1$ trivijalna, a za korak jedino treba pokazati $k_N = l_N$. Kada bi bilo $k_N \leq l_N - 1$, tada bismo radi $m_N \geq q m_{N-1} \geq q^2 m_{N-2} \geq \cdots$ imali

$$\begin{aligned}
0 &= (m_1l_1 + \cdots + m_Nl_N) - (m_1k_1 + \cdots + m_Nk_N) \geq m_N - m(m_{N-1} + \cdots + m_1) \\
&\geq m_N \Big(1 - m \Big(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots \Big) \Big) = m_N \Big(1 - \frac{m/q}{1 - 1/q} \Big) = m_N \Big(1 - \frac{m}{q - 1} \Big),
\end{aligned}$$

što vodi na kontradikciju s (2). Zato možemo pisati

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big\|_{2m}^{2m} = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_N\in\mathbb{N}_0 \\ k_1+\cdots+k_N=m}} \Big(\frac{m!}{k_1!\cdots k_N!}\Big)^2 |c_1|^{2k_1}\cdots|c_N|^{2k_N}$$

$$\leq m! \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_N\in\mathbb{N}_0 \\ k_1+\cdots+k_N=m}} \frac{m!}{k_1!\cdots k_N!} (|c_1|^2)^{k_1}\cdots(|c_N|^2)^{k_N} = m! \Big(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2\Big)^m,$$

tj.

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big\|_{2m} \leq (m!)^{1/2m} \Big(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2\Big)^{1/2}$$

pa željena nejednakost vrijedi s konstantom $(m!)^{1/2m}$.

Sada pokažimo nejednakost (1) bez ograničenja (2) na broj $q > 1$. Neka je $M \in \mathbb{N}$ dovoljno velik da vrijedi $q^M > m+1$. Rastavimo sumu na M dijelova, ovisno o ostatku kojeg indeks j daje pri dijeljenju s M, pa primijenimo prethodno dokazani slučaj na tih M pod-suma, kod kojih je omjer susjednih frekvencija $m_{i+M}/m_i \geq q^M > m+1$:

$$\Big\| \sum_{1\leq j\leq N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big\|_{2m} \leq \sum_{r=0}^{M-1} \Big\| \sum_{\substack{1\leq j\leq N \\ j\equiv r \,(\mathrm{mod}\, M)}} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big\|_{2m} \leq M(m!)^{1/2m} \Big(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2\Big)^{1/2}.$$

Ovog puta željena nejednakost vrijedi s konstantom $M(m!)^{1/2m}$, koja ovisi samo o $p = 2m$ i q.

Sada uzmimo niz kompleksnih brojeva $(c_j)_{j=1}^{\infty}$ za kojeg je $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < +\infty$ te za $N, N' \in \mathbb{N}$, $N < N'$ iskoristimo nejednakost (2):

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N'} c_j e^{2\pi i m_j t} - \sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big\|_p = \Big\| \sum_{N<j\leq N'} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big\|_p \leq C_{p,q} \Big(\sum_{N<j\leq N'} |c_j|^2\Big)^{1/2} \xrightarrow{N,N'\to\infty} 0.$$

Odavde vidimo da parcijalne sume $\sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t}$ čine Cauchyjev niz u prostoru $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ pa one konvergiraju po p-normi prema nekoj funkciji iz tog prostora.

Napomena: Trigonometrijski redovi ovog oblika nazivaju se *lakunarnima*, a nejednakost s početka dokaza je klasična ocjena A. Zygmunda.