Fourierovi redovi i primjene

Drugi kolokvij, 14. 6. 2019.

1. *(2+2+2=6 bodova)* Dana je $\underline{\pi\text{-periodična}}$ funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $f(x) = x$ za svaki $x \in [0, \pi\rangle$.

   (a) Razvijte funkciju f u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$.

   (b) U kojim sve točkama $x \in [-\pi, \pi]$ Fourierov red od f konvergira prema samoj funkciji?

   (c) Odredite $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$, tj. $\sum_{m=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{3m+1} - \frac{1}{3m+2}\Big)$.

2. *(6 bodova)* Reći ćemo da funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava *Zygmundov uvjet* reda $\nu > 0$ u točki $t \in \mathbb{R}$ ako postoje $C \in [0, +\infty\rangle$ i $a > 0$ takvi da za svaki $h \in [-a, a]$ vrijedi

$$\big|f(t-h) - 2f(t) + f(t+h)\big| \leq C|h|^{\nu}. \tag{1}$$

   Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. Ako u točki $t \in \mathbb{R}$ funkcija f zadovoljava Zygmundov uvjet nekog reda $\nu > 0$, dokažite da tada Fourierov red funkcije f konvergira u točki t prema $f(t)$.

   Napomena: Smijete (bez dokaza) koristiti sve rezultate s predavanja.

3. *(3+3=6 bodova)*

   (a) Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{5/2}}$ i da njegova suma definira funkciju klase C^1 na cijelom $\mathbb{R}$.

   (b) Dokažite da funkcija iz (a) dijela zadatka nije klase C^2 na $\mathbb{R}$.

4. *(6 bodova)* Dokažite da za svaku neprekidnu funkciju $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoje $N \in \mathbb{N}$ i brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ takvi da za svaki $x \in [0, \pi]$ vrijedi:

$$\Big|f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \cos nx\Big| \leq \varepsilon.$$

5. *(6 bodova)* Za svaki $x \in \mathbb{R}$ izračunajte sumu reda u smislu Cesàra: $(\mathrm{C}) \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$.

6.* *(6 dodatnih bodova)* Reći ćemo da funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava *uniformni Zygmundov uvjet* reda $\nu > 0$ ako postoji $C \in [0, +\infty\rangle$ takva da za svake $t, h \in \mathbb{R}$ vrijedi formula (1) iz zadatka 2.

   Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f\big|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. Ako funkcija f zadovoljava uniformni Zygmundov uvjet nekog reda $\nu > 2$, dokažite da ona mora biti konstanta.

Vjekoslav Kovač

Fourierovi redovi i primjene

Rješenja drugog kolokvija, 14. 6. 2019.

1. (a) Traženi trigonometrijski Fourierov razvoj je

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ paran}}} \frac{2}{n} \sin nx = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin 2kx.$$

Premda f nije neparna funkcija, u računu nam može pomoći da $f - \frac{\pi}{2}$ ipak jest neparna.

(b) Odgovor: $x \in \langle -\pi, 0\rangle \cup \langle 0, \pi\rangle$.

Funkcija f zadovoljava Dirichletove uvjete obzirom da je $f'(n\pi-) = 1 = f'(n\pi+)$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$, a u svim točkama $x \notin \pi\mathbb{Z}$ je f' čak neprekidna. Osim toga primijetimo da je $f(n\pi-) = \pi$, $f(n\pi+) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$, dok je $f(n\pi) = 0$. Stoga Fourierov red u točkama oblika $n\pi$ konvergira prema $\frac{1}{2}(f(n\pi-) + f(n\pi+)) = \frac{\pi}{2} \neq f(n\pi)$. S druge strane, u točkama $x \notin \pi\mathbb{Z}$ je f neprekidna i u njima Fourierov red konvergira prema $f(x)$.

(c) Radi (b) dijela u Fourierov razvoj možemo uvrstiti $x = \frac{\pi}{3}$. Primijetimo da je

$$\sin\frac{2k\pi}{3} = \begin{cases} 0 & \text{za } k = 3m, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{za } k = 3m+1, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{za } k = 3m+2, \end{cases}$$

pri čemu je $m \in \mathbb{Z}$. U točki $x = \frac{\pi}{3}$ je funkcija f neprekidna pa slijedi

$$\frac{\pi}{3} = f\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{3m+1} - \frac{1}{3m+2}\Big).$$

Dobivamo da je tražena suma

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2. Imamo

$$\int_{[0,a]} \frac{|f(t-x) - 2f(t) + f(t+x)|}{x} dx \leq \int_{[0,a]} \frac{Cx^{\nu}}{x} dx = \int_{[0,a]} Cx^{\nu-1} dx = \frac{Ca^{\nu}}{\nu} < +\infty.$$

Zato je $x \mapsto \frac{f(t-x)-2f(t)+f(t+x)}{x}$ u $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([0,a])$ pa možemo primijeniti Dinijev kriterij.

3. (a) Uočimo da i polazni red i red derivacija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos nx}{n^{5/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{3/2}}$$

konvergiraju uniformno po Weierstrassovom kriteriju jer je

$$\Big|\frac{\sin nx}{n^{5/2}}\Big| \leq \frac{1}{n^{5/2}}, \quad \Big|\frac{\cos nx}{n^{3/2}}\Big| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

i jer znamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty.$$

Sada znamo da su formulama

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{5/2}}, \quad g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{3/2}}$$

definirane neprekidne funkcije takve da je $f' = g$, odakle zaključujemo da je f klase C^1.

(b) Pretpostavimo da f ipak jest klase C^2. Tada je druga derivacija $f^{(2)}$ neprekidna (i posebno integrabilna) te dvostruka primjena parcijalne integracije daje

$$a_n^{f^{(2)}} = -n^2 a_n^f, \quad b_n^{f^{(2)}} = -n^2 b_n^f.$$

Kako je red iz (a) dijela zadatka zapravo Fourierov red funkcije f (što opet slijedi iz uniformne konvergencije), možemo eksplicitno očitati njezine Fourierove koeficijente:

$$a_n^f = 0 \text{ za } n \geq 0, \quad b_n^f = \frac{1}{n^{5/2}} \text{ za } n \geq 1.$$

Kako je $f^{(2)}$ i kvadratno-integrabilna, Plancherelova formula daje

$$\begin{aligned} +\infty > \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f^{(2)}(x)\big)^2 dx &= \frac{(a_0^{f^{(2)}})^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big((a_n^{f^{(2)}})^2 + (b_n^{f^{(2)}})^2\big) \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(0 + \Big(-n^2 \frac{1}{n^{5/2}}\Big)^2\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

što je u kontradikciji s divergencijom harmonijskog reda.

4. Proširimo f po parnosti do funkcije $\tilde{f}\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Kako je $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$, funkciju $\tilde{f}$ možemo po 2π-periodičnosti proširiti do funkcije $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i ta će funkcija biti neprekidna. Po *Fejérovom teoremu o uniformnoj konvergenciji* niz usrednjenih parcijalnih suma Fourierovog reda $(\sigma_N^{\mathbb{R}} g)_{N=1}^{\infty}$ uniformno konvergira prema funkciji g. To znači da za zadani $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - (\sigma_N^{\mathbb{R}} g)(x)| \leq \varepsilon,$$

tj. specijalno

$$\sup_{x \in [0,\pi]} |f(x) - (\sigma_N^{\mathbb{R}} g)(x)| \leq \varepsilon.$$

Kako je g parna funkcija, njezin Fourierov red nema članove sa $\sin nx$. Zato je i trigonometrijski polinom $\sigma_N^{\mathbb{R}} g$ oblika

$$(\sigma_N^{\mathbb{R}} g)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx$$

za neke koeficijente $a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$.

5. Za svaki $N \in \mathbb{N}$ korištenjem $\cos nx = \mathrm{Re}(e^{inx})$ dobivamo:

$$S_m := \sum_{n=1}^{m} \cos nx = \mathrm{Re}\Big(\sum_{n=1}^{m} e^{inx}\Big) = \mathrm{Re}\Big(e^{ix} \frac{e^{imx} - 1}{e^{ix} - 1}\Big),$$

čim je $e^{ix} \neq 1$, tj. $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Nadalje,

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} S_m = \mathrm{Re}\Big(e^{ix}\Big(\frac{\sum_{m=1}^{N} e^{imx}}{N(e^{ix} - 1)} - \frac{1}{e^{ix} - 1}\Big)\Big) = \mathrm{Re}\Big(e^{2ix} \frac{e^{iNx} - 1}{N(e^{ix} - 1)^2} - e^{ix} \frac{1}{e^{ix} - 1}\Big).$$

Pušanjem na limes uz korištenje teorema o sendviču dobivamo

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}S_m = \mathrm{Re}\frac{-e^{ix}}{e^{ix}-1} = \mathrm{Re}\frac{-e^{ix/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} = \mathrm{Re}\frac{i\cos(x/2)-\sin(x/2)}{2\sin(x/2)} = -\frac{1}{2}.$$

S druge strane, za $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ imamo $S_m = m$ pa je

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}S_m = \lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{2} = +\infty.$$

Dakle,

$$(\mathrm{C})\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx = \begin{cases}-\frac{1}{2} & \text{za } x \notin 2\pi\mathbb{Z},\\ +\infty & \text{za } x \in 2\pi\mathbb{Z}.\end{cases}$$

6. Fiksirajmo $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ te definirajmo $h = y/n$. Vrijedi identitet

$$\sum_{k=-n+1}^{n-1}(n-|k|)\big(f(x+(k-1)h)-2f(x+kh)+f(x+(k+1)h)\big) = f(x-y)-2f(x)+f(x+y). \quad (2)$$

Za dokaz od (2) označimo $z^+ := \max\{z, 0\}$ te lijevu stranu zapišimo kao

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big((n-|k+1|)^+ - 2(n-|k|)^+ + (n-|k-1|)^+\big)\ f(x+kh).$$

Diskutiranje slučajeva lako daje

$$(n-|k+1|)^+ - 2(n-|k|)^+ + (n-|k-1|)^+ = \begin{cases}-2 & \text{za } k=0,\\ 1 & \text{za } k=-n \text{ ili } k=n,\\ 0 & \text{inače,}\end{cases}$$

što znači da je cijeli izraz upravo $f(x-nh)-2f(x)+f(x+nh)$, a to smo i trebali.

Sada korištenjem uvjeta (1) lijevu stranu od (2) ocjenjujemo po apsolutnoj vrijednosti sa

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(n-|k|)Ch^\nu = Cn^2h^\nu = Cn^2(y/n)^\nu = Cn^{2-\nu}y^\nu.$$

Puštanjem na limes kada $n\to\infty$ taj izraz, radi $\nu > 2$, konvergira u 0 pa iz (2) slijedi

$$f(x-y)-2f(x)+f(x+y) = 0$$

za svake $x \in \mathbb{R}$ i $y > 0$.

Definiramo li $g(x) := f(2\pi x)$, dobit ćemo funkciju iz $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ takvu da i dalje vrijedi

$$g(x-y)-2g(x)+g(x+y) = 0$$

za svake $x, y \in \mathbb{T}$. Za bilo koji $m \in \mathbb{Z}$ pomnožimo posljednju jednakost s $e^{-2\pi imx}$ te integrirajmo po $x \in \mathbb{T}$. Dobit ćemo

$$e^{-2\pi imy}\underbrace{\int_{\mathbb{T}}g(x-y)e^{-2\pi im(x-y)}dx}_{\widehat{g}(m)} - 2\underbrace{\int_{\mathbb{T}}g(x)e^{-2\pi imx}dx}_{\widehat{g}(m)} + e^{2\pi imy}\underbrace{\int_{\mathbb{T}}g(x+y)e^{-2\pi im(x+y)}dx}_{\widehat{g}(m)} = 0,$$

tj.

$$2(1-\cos(2\pi my))\,\widehat{g}(m) = 0.$$

Za svaki $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ možemo odabrati $y \in \mathbb{T}$ takav da je $\cos(2\pi my) \neq 1$ i zaključiti $\widehat{g}(m) = 0$. Po teoremu jedinstvenosti g mora biti identički jednaka konstanti $\widehat{g}(0)e_0$ pa je i f konstantna funkcija.