Fourierovi redovi i primjene

Drugi kolokvij, 8. 7. 2021.

1. *(5+5=10 bodova)* Neka je zadan $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ konvergira red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^{k+3/2}}$ i da njegova suma definira funkciju klase C^k na cijelom $\mathbb{R}$.

   (b) Dokažite da funkcija iz (a) dijela zadatka nije klase C^{k+1} na $\mathbb{R}$.

2. *(4+3+3=10 bodova)*

   (a) Razvijte u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$ funkciju zadanu formulom $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in [-\pi, 0\rangle, \\ \sin x & \text{za } x \in [0, \pi]. \end{cases}$

   (b) U kojim sve točkama intervala $[-\pi, \pi]$ Fourierov red funkcije f konvergira prema samoj funkciji f? Konvergira li Fourierov red od f uniformno na cijelom intervalu $[-\pi, \pi]$ prema funkciji f?

   (c) Izračunajte $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2 - 1}$.

3. *(10 bodova)* Dokažite da za svaku neparnu 2π-periodičnu neprekidnu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoje $N \in \mathbb{N}$ i brojevi $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \Big| f(x) - \sum_{n=0}^{N} b_n \sin nx \Big| \le \varepsilon.$$

4. *(5+5=10 bodova)* Prisjetimo se Fejérove jezgre za sistem $\mathbb{B}$:

$$F_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t) = \sum_{n=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|n|}{N}\Big) e^{2\pi i n t}.$$

   Neka su $N \in \mathbb{N}$ i $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{T})$ funkcija takva da je $\widehat{f}(n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z} \setminus [0, N]$.

   (a) Dokažite: $F_N * f = f - \dfrac{f'}{2\pi i N}$.

   (b) Dokažite: $\max\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| \le 4\pi N \max\limits_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$.

5. *(10 bodova)* Neka je dan $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Izračunajte sumu reda u smislu Cesàra: $(\mathrm{C}) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta$.

6.* *(10 dodatnih bodova)* Fourierova transformacija konačne mjere σ na $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ je funkcija $\widehat{\sigma}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definirana sa

$$\widehat{\sigma}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i (x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} \, d\sigma(x_1, x_2)$$

   za svaki $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. *Kružna mjera* (eng. *circle measure*) je mjera σ na $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ takva da za svaku Borel-izmjerivu funkciju $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos\varphi, \sin\varphi) \, d\varphi$$

   kad god postoji desni integral. Dokažite da postoji konstanta $C \in [0, \infty\rangle$ takva da za svaki $\xi \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$\big|\widehat{\sigma}(\xi)\big| \le C(1 + |\xi|)^{-1/2},$$

   pri čemu je $|\xi| = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$.

Vjekoslav Kovač

Fourierovi redovi i primjene

Rješenja drugog kolokvija, 8. 7. 2021.

1. (a) Uočimo da za svaki $j \in \mathbb{N}_0$, $0 \le j \le k$, red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^j \frac{e^{2\pi inx}}{n^{k+3/2}} = (2\pi i)^j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi inx}}{n^{k-j+3/2}}$$

konvergira uniformno po Weierstrassovom kriteriju jer je

$$\Big|\frac{e^{2\pi inx}}{n^{k-j+3/2}}\Big| \le \frac{1}{n^{k-j+3/2}} \le \frac{1}{n^{3/2}}$$

i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$. Sada znamo da su formulama

$$f_j(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^j \frac{e^{2\pi inx}}{n^{k+3/2}}, \quad \text{za } j = 0, 1, \ldots, k$$

definirane neprekidne funkcije takve da je $f_0^{(j)} = f_j$, $j = 0, 1, \ldots, k$, odakle zaključujemo da je f_0 funkcija klase C^k.

(b) Pretpostavimo da $f = f_0$ ipak jest klase C^{k+1}. Tada je njezina $(k+1)$-va derivacija $f^{(k+1)}$ neprekidna (te posebno integrabilna i kvadratno-integrabilna) te višestruka primjena parcijalne integracije daje

$$\widehat{f^{(k+1)}}(n) = (2\pi in)^{k+1}\widehat{f}(n).$$

Kako je red iz (a) dijela zadatka zapravo Fourierov red funkcije f (što opet slijedi iz uniformne konvergencije), možemo eksplicitno očitati njezine Fourierove koeficijente:

$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} \frac{1}{n^{k+3/2}} & \text{za } n \ge 1, \\ 0 & \text{za } n \le 0. \end{cases}$$

Plancherelova formula daje

$$\big\|f^{(k+1)}\big\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |2\pi n|^{2k+2}\big|\widehat{f}(n)\big|^2 = (2\pi)^{2k+2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

pa je divergencija harmonijskog reda u kontradikciji s pretpostavkom $f \in \mathrm{C}^{k+1}$.

2. (a) Lako izračunamo Fourierove koeficijente od f:

$$a_n = \frac{-2}{(n^2-1)\pi} \text{ za } n \ge 0 \text{ paran}, \quad a_n = 0 \text{ za } n \ge 1 \text{ neparan},$$
$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_n = 0 \text{ za } n \ge 2.$$

Zato je Fourierov razvoj od f dan sa

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

(b) Primijetimo da je 2π-periodično proširenje od f neprekidno:

$$f(0-) = f(0) = f(0+) = 0, \quad f(\pi-) = f(\pi) = f(\pi+) = 0.$$

Obzirom da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty,$$

zaključujemo

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)<+\infty$$

pa Fourierov red od f uniformno konvergira prema f na čitavom intervalu $[-\pi,\pi]$. Posebno, točkovna konvergencija vrijedi u svakoj točki tog intervala.

(c) Uvrštavanjem $x=\pi/2$ dobivamo

$$1=f\Big(\frac{\pi}{2}\Big)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1},$$

odakle slijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1}=\frac{\pi-2}{4}.$$

3. S vježbi znamo da su parcijalne sume Fourierovog reda $(S_N^{\mathbb{R}}f)_{N=0}^{\infty}$ neparne funkcije f konačne linearne kombinacije od $\sin kx$, $k=1,2,3,\ldots$. Radi

$$\sigma_N^{\mathbb{R}}f:=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}S_k^{\mathbb{R}}f$$

su i Fejérove sume istog oblika. Po Fejérovom teoremu o uniformnoj konvergenciji niz $(\sigma_N^{\mathbb{R}}f)_{N=0}^{\infty}$ uniformno konvergira prema funkciji f, odakle slijedi tražena tvrdnja.

4. (a) Po teoremu o uniformnoj konvergenciji Fourierovog reda naša funkcija mora biti trigonometrijski polinom oblika:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{N}\widehat{f}(n)e^{2\pi int},$$

odakle je i

$$f'(t)=\sum_{n=0}^{N}\widehat{f}(n)2\pi ine^{2\pi int}.$$

Prisjetimo se da Fejérova jezgra zadovoljava $F_N\geq 0$, a očigledno je i

$$\int_{\mathbb{T}}F_N(t)dt=1.$$

Iz oblika funkcije f slijedi

$$\begin{aligned}(F_N*f)(t)&=\sum_{n=0}^{N}\Big(1-\frac{n}{N}\Big)\widehat{f}(n)e^{2\pi int}\\&=\sum_{n=0}^{N}\widehat{f}(n)e^{2\pi int}-\frac{1}{2\pi iN}\sum_{n=0}^{N}\widehat{f}(n)2\pi ine^{2\pi int}\\&=f(t)-\frac{1}{2\pi iN}f'(t).\end{aligned}$$

(b) Za svaki $t\in\mathbb{T}$ sada imamo

$$|f'(t)|\leq 2\pi N|f(t)|+2\pi N|(F_N*f)(t)|\leq 2\pi N|f(t)|+2\pi N\int_{\mathbb{T}}F_N(u)|f(t-u)|du,$$

odakle je

$$\max_{t\in\mathbb{R}}|f'(t)|\leq 2\pi N\max_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|+2\pi N\underbrace{\Big(\int_{\mathbb{T}}F_N(u)du\Big)}_{=1}\max_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|.$$

Napomena: Ovo je tzv. *Bernsteinova nejednakost*, premda navedena konstanta 4π nije optimalna, već je to 2π i postiže se za $f(t)=e^{2\pi iNt}$.

5. Imamo

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\sin k\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k-\frac{1}{2})\theta - \cos(k+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

pa računamo

$$\begin{aligned}\sigma_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k &= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2n\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n}\cos\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\theta \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4n\sin^2\frac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\theta \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4n\sin^2\frac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n}\big(\sin(k+1)\theta - \sin k\theta\big) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta - \sin(n+1)\theta}{4n\sin^2\frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

Korištenjem teorema o sendviču dobijemo:

$$(\mathrm{C})\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\theta = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

Napomena. Rezultat se ekvivalentno može zapisati $\dfrac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$.

6. Po definiciji mjere σ i prelaskom na polarne koordinate

$$\xi = |\xi|(\cos\theta, \sin\theta)$$

za svaki $\xi \in \mathbb{R}^2$ imamo

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)}\,d\sigma(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2\pi i|\xi|(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta)}\,d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2\pi i|\xi|\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\pi i|\xi|\cos\varphi}\,d\varphi.\end{aligned}$$

Očigledno je $|\widehat{\sigma}(\xi)| \le 1$ pa je zapravo dovoljno pokazati

$$\big|\widehat{\sigma}(\xi)\big| \le 3|\xi|^{-1/2}$$

za svaki ξ takav da je $|\xi| \ge 1$. Iz parnosti kosinusa te sustituirajući $t = \cos\varphi$ odmah dobivamo

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}(\xi) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(2\pi|\xi|\cos\varphi)\,d\varphi - \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2\pi|\xi|\cos\varphi)\,d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\cos(2\pi|\xi|t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt - \frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{1}\frac{\cos(2\pi|\xi|t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.\end{aligned}$$

U posljednjem integralu rastavljamo područje integracije na $0 \le t \le 1 - |\xi|^{-1}$ i $1 - |\xi|^{-1} \le t \le 1$. U integral po prvom području uvrstimo

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \int_0^t \frac{u}{(1-u^2)^{3/2}}\,du,$$

tako da zamjena poretka integracije lako daje

$$\int_0^{1-|\xi|^{-1}}\frac{\cos(2\pi|\xi|t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\Big|_{t=0}^{t=1-|\xi|^{-1}} + \int_0^{1-|\xi|^{-1}}\frac{u}{(1-u^2)^{3/2}}\Big(\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\Big|_{t=u}^{t=1-|\xi|^{-1}}\Big)\,du.$$

Posljednji izraz je po apsolutnoj vrijednosti najviše

$$\frac{1}{|\xi|}\Big(1+\int_0^{1-|\xi|^{-1}}\frac{u}{(1-u^2)^{3/2}}\,du\Big)=\frac{1}{\sqrt{2|\xi|-1}}\leq|\xi|^{-1/2}.$$

Integral po drugom području se ocijeni

$$\Big|\int_{1-|\xi|^{-1}}^{1}\frac{\cos(2\pi|\xi|t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\Big|\leq\int_{1-|\xi|^{-1}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{(1+t)(1-t)}}\leq\int_{1-|\xi|^{-1}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t}}=2|\xi|^{-1/2}.$$

Time je dokazana željena ocjena.