Fourierovi redovi i primjene

Drugi kolokvij, 5. 7. 2023.

1. *(10 bodova)* Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ konvergira red $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^n}$ i da njegova suma definira funkciju f klase C^{∞} na cijelom $\mathbb{R}$.

2. *(5+2+1+2=10 bodova)*

   (a) Razvijte u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$ funkciju zadanu formulom $f(x) = (\cos x)_+ = \max\{\cos x, 0\}$.

   (b) U kojim sve točkama intervala $[-\pi, \pi]$ Fourierov red funkcije f konvergira prema samoj funkciji f?

   (c) Je li 2π-periodično proširenje funkcije f klase C^1 na cijelom $\mathbb{R}$?

   (d) Konvergira li Fourierov red od f uniformno na cijelom intervalu $[-\pi, \pi]$?

3. *(10 bodova)* Reći ćemo da funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava *Zygmundov uvjet* reda $\nu > 0$ u točki $t \in \mathbb{R}$ ako postoje $C \in [0, +\infty\rangle$ i $a > 0$ takvi da za svaki $h \in [-a, a]$ vrijedi

$$\big|f(t-h) - 2f(t) + f(t+h)\big| \leq C|h|^{\nu}. \tag{1}$$

   Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. Ako u točki $t \in \mathbb{R}$ funkcija f zadovoljava Zygmundov uvjet nekog reda $\nu > 0$, dokažite da tada Fourierov red funkcije f konvergira u točki t prema $f(t)$.

   Napomena: Smijete (bez dokaza) koristiti sve rezultate s predavanja.

4. *(10 bodova)* Razvijte u eksponencijalni Fourierov red 1-periodičnu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ danu formulom $f(t) := e^{e^{2\pi i t}} = e^{(e^{2\pi i t})}$.

5. *(5+5=10 bodova)*

   (a) Izračunajte sumu reda u smislu Cesàra: (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$.

   (b) Izračunajte sumu reda u smislu Abela: (A) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

6.* *(10 dodatnih bodova)* Fourierova transformacija konačne mjere μ na $(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}^3))$ je funkcija $\widehat{\mu}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ definirana sa

$$\widehat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, d\mu(x)$$

   za svaki $\xi \in \mathbb{R}^3$. *Sferična mjera* je mjera σ na $(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}^3))$ takva da za svaku neprekidnu funkciju $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^3} f\, d\sigma = \text{plošni integral od } f \text{ po standardnoj jediničnoj sferi } \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3.$$

   Dokažite da vrijedi

$$\widehat{\sigma}(\xi) = \frac{2\sin(2\pi|\xi|)}{|\xi|}$$

   za svaki $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, pri čemu je $|\xi| = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}$.

Vjekoslav Kovač

Fourierovi redovi i primjene

Rješenja drugog kolokvija, 5. 7. 2023.

1. Uočimo da za svaki $j \in \mathbb{N}_0$ red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^j \Big(\frac{\sin(nx)}{n^n}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx + j\pi/2)}{n^{n-j}}$$

konvergira uniformno po Weierstrassovom kriteriju jer je

$$\Big|\frac{\sin(nx + j\pi/2)}{n^{n-j}}\Big| \leq \frac{1}{n^{n-j}}$$

i

$$\sum_{n=j+2}^{\infty} \frac{1}{n^{n-j}} \leq \sum_{n=j+2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Sada znamo da su formulama

$$f_j(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^j \Big(\frac{\sin(nx)}{n^n}\Big), \quad \text{za } j \in \mathbb{N}_0,$$

definirane neprekidne funkcije takve da je $f_0^{(j)} = f_j$, odakle zaključujemo da je $f = f_0$ funkcija klase C^{∞}.

2. (a) Lako izračunamo Fourierove koeficijente od f:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = \frac{2}{\pi}, \\
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos nx \, dx = \begin{cases} (-1)^{n/2-1}\frac{2}{(n^2-1)\pi} & \text{za } n \geq 2 \text{ paran}, \\ 0 & \text{za } n \geq 2 \text{ neparan}, \end{cases} \\
b_n &= [\text{zbog neparnosti}] = 0 \text{ za } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Zato je Fourierov razvoj od f dan sa

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{\cos x}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\cos 2kx}{4k^2 - 1}.$$

(b)&(d) Primijetimo da je 2π-periodično proširenje od f neprekidno:

$$f(-\pi-) = f(-\pi) = f(-\pi+) = 0, \quad f(\pi-) = f(\pi) = f(\pi+) = 0.$$

Obzirom da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty,$$

zaključujemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty$$

pa Fourierov red od f uniformno konvergira prema f na čitavom intervalu $[-\pi, \pi]$. Posebno, točkovna konvergencija vrijedi u svakoj točki tog intervala.

(c) Nije. Naime, već funkcija f uopće nije derivabilna u točki $\pi/2$:

$$\lim_{x\to\pi/2-}\frac{f(x)-f(\pi/2)}{x-\pi/2}=\lim_{x\to\pi/2-}\frac{\cos x}{x-\pi/2}=-1,$$
$$\lim_{x\to\pi/2+}\frac{f(x)-f(\pi/2)}{x-\pi/2}=\lim_{x\to\pi/2+}\frac{0}{x-\pi/2}=0.$$

3. Imamo

$$\int_{[0,a]}\frac{|f(t-x)-2f(t)+f(t+x)|}{x}dx\le\int_{[0,a]}\frac{Cx^{\nu}}{x}dx=\int_{[0,a]}Cx^{\nu-1}dx=\frac{Ca^{\nu}}{\nu}<+\infty.$$

Zato je $x\mapsto\frac{f(t-x)-2f(t)+f(t+x)}{x}$ u $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([0,a])$ pa možemo primijeniti Dinijev kriterij.

4. Za $n\in\mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}\hat{f}(n)&=\int_0^1 e^{e^{2\pi it}}e^{-2\pi int}dt\overset{\text{parc. int.}}{=}e^{e^{2\pi it}}\frac{e^{-2\pi int}}{-2\pi in}\Big|_{t=0}^{t=1}+\frac{1}{2\pi in}\int_0^1(2\pi i)\,e^{2\pi it}e^{e^{2\pi it}}e^{-2\pi int}dt\\&=\frac{1}{n}\int_0^1 e^{e^{2\pi it}}e^{-2\pi i(n-1)t}dt=\frac{\hat{f}(n-1)}{n}.\end{aligned}$$

Primijetimo da je $\hat{f}(-1)=\int_0^1 e^{e^{2\pi it}}e^{2\pi it}dt=\frac{1}{2\pi i}e^{e^{2\pi it}}\Big|_0^1=0$, odakle slijedi $\hat{f}(n)=0$ za sve $n\le-1$. Iz dobivene rekurzivne relacije po $n\ge0$ slijedi $\hat{f}(n)=\frac{\hat{f}(0)}{n!}$. Time bismo dobili Fourierov red

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{f}(0)}{n!}e^{2\pi int}.$$

Zbog $\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\hat{f}(0)|}{n!}<+\infty$ vrijedi da on uniformno konvergira prema funkciji f. Uvrstimo li $t=0$, dobivamo

$$e=f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{f}(0)}{n!}e^{2\pi in0}=\hat{f}(0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e\,\hat{f}(0),$$

iz čega slijedi $\hat{f}(0)=1$. Prema tome, traženi Fourierov razvoj je

$$f(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{2\pi int}.$$

Mogli smo pristupiti i na drukčiji način. Ako u Taylorov razvoj eksponencijalne funkcije

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad z\in\mathbb{C}$$

uvrstimo $z=e^{2\pi it}$, dobivamo

$$e^{e^{2\pi it}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{2\pi int}.$$

Uočimo da ovaj red, po Weierstrassovom kriteriju i zbog $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}<+\infty$, konvergira uniformno. Zato ga se smije pomnožiti s $e^{-2\pi it}$ i prointegrirati, iz čega slijedi da su Fourierovi koeficijenti od f doista $\hat{f}(n)=\frac{1}{n!}$ za $n\ge0$, $\hat{f}(n)=0$ za $n\ge0$ pa je gore navedeni red uistinu eksponencijalni Fourierov razvoj funkcije f.

5. (a) *Rezultat*: 1.
Uputa: Uočite da su članovi zapravo $1,1,-1,-1,\dots$ i ponavljaju se s periodom 4 pa su parcijalne sume $1,2,1,0,\dots$ te se i one ponavljaju s periodom 4.

(b) *Rezultat*: 1.
Uputa:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\lfloor n/2\rfloor}r^n = \text{rastavite na 4 sume} = \frac{1+r}{1+r^2}$$

za $r \in [0,1\rangle$.
Alternativno, smije se iskoristiti (a) zadatak i činjenica da sumabilnost u smislu Cesàra povlači sumabilnost u smislu Abela.

6. Neka je R proizvoljna rotacija oko ishodišta u $\mathbb{R}^3$. Koristeći unitarnost linearnog operatora R, tj. $R^* = R^{-1}$, i očiglednu invarijantnost mjere σ na rotacije, imamo

$$\widehat{\sigma}(R\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i x\cdot R\xi}\, d\sigma(x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i R^{-1}x\cdot\xi}\, d\sigma(x) = \widehat{\sigma}(\xi).$$

Dakle, $\widehat{\sigma}(\xi)$ je radijalna funkcija, tj. ovisi samo o $|\xi|$. Prema tome, dovoljno je izračunati $\widehat{\sigma}(\xi)$ samo u točkama oblika

$$\xi = (0,0,t)$$

za neki $t > 0$.

Prelaskom na sferične koordinate na $\mathbb{S}^2$,

$$x = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

možemo pisati

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}(0,0,t) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-2\pi i t\cos\theta}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi} e^{-2\pi i t\cos\theta}\sin\theta\, d\theta \\ &\quad [\text{supstitucija } s = t\cos\theta] \\ &= \frac{2\pi}{t}\int_{-t}^{t} e^{-2\pi i s}\, ds = -\frac{2\pi}{t}\frac{1}{2\pi i}\Big(e^{-2\pi i t} - e^{2\pi i t}\Big) = \frac{2\sin(2\pi t)}{t}.\end{aligned}$$

Dakle, doista imamo

$$\widehat{\sigma}(\xi) = \widehat{\sigma}(0,0,|\xi|) = \frac{2\sin(2\pi|\xi|)}{|\xi|}.$$