Fourierovi redovi i primjene

Popravni kolokvij, 14. 9. 2017.

1. *(4+4+4=12 bodova)*
   (a) Razvijte u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi,\pi]$ funkciju $f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ zadanu formulom $f(x)=\begin{cases}0 & \text{za } x\in[-\pi,0\rangle,\\ 1-\cos 2x & \text{za } x\in[0,\pi].\end{cases}$
   (b) U kojim sve točkama intervala $[-\pi,\pi]$ Fourierov red funkcije f konvergira prema samoj funkciji f? Konvergira li Fourierov red of f uniformno na cijelom intervalu $[-\pi,\pi]$ prema funkciji f?
   (c) Izračunajte:
   $$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}-\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{5\cdot7\cdot9}-\frac{1}{7\cdot9\cdot11}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}.$$
2. *(12 bodova)* Nađite sve izmjerive funkcije $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ koje su istovremeno 1-periodične i 2π-periodične te integrabilne na svakom ograničenom intervalu.
3. *(6+6=12 bodova)* Fiksirajmo broj $p\in\langle 2,+\infty\rangle$.
   (a) Dokažite da za svaku funkciju $f\in\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ vrijedi nejednakost
   $$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^p\le\|f\|_p^p.$$
   (b) Nađite sve funkcije $f\in\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ za koje se postiže jednakost u gornjoj nejednakosti.
4. *(4+8=12 bodova)*
   (a) Za 1-periodični kompleksni trigonometrijski polinom f kažemo da je *idempotentan* ako vrijedi $f*f=f$. Dokažite da su svi takvi polinomi dani formulom $f(x)=\sum_{n\in S}e^{2\pi i n x}$ za neki konačni skup $S\subseteq\mathbb{Z}$. Reći ćemo da je S *spektar* polinoma f.
   (b) Uz identifikaciju $\mathbb{T}\equiv\left[-\frac12,\frac12\right\rangle$, za svaki $\delta\in\left\langle 0,\frac12\right\rangle$ i svaki idempotentni 1-periodični kompleksni trigonometrijski polinom f sa spektrom S dokažite nejednakost
   $$\int_{-\delta}^{\delta}|f(x)|^2dx\ge\delta\,\mathrm{card}(S).$$
5. *(6+6=12 bodova)* Neka su $a,b\in\mathbb{C}$ proizvoljni. Niz $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadan je sa $a_{2n-1}=a,\ a_{2n}=(-1)^n b$ za svaki $n\in\mathbb{N}$. Odredite nužne i dovoljne uvjete na a i b za koje red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergira
   (a) u smislu Cesára, (b) u smislu Abela.

6.* *(6 dodatnih bodova)* Funkcija f zadana je formulom $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{ch}(\pi x)}=\dfrac{2}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$. Dokažite da je ona sama svoj Fourierov transformat, tj. da vrijedi $\widehat{f}=f$.

Vjekoslav Kovač i *Mario Stipčić*

Fourierovi redovi i primjene

Rješenja popravnog kolokvija, 14. 9. 2017.

1. (a) Računamo Fourierove koeficijente. Za $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2$ imamo:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(\cos nx - \frac{1}{2}\cos(n+2)x - \frac{1}{2}\cos(n-2)x\Big)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{1}{2(n+2)}\sin(n+2)x\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{1}{2(n-2)}\sin(n-2)x\Big|_{x=0}^{x=\pi}\Big) = 0
\end{aligned}
$$

te

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(\sin nx - \frac{1}{2}\sin(n+2)x - \frac{1}{2}\sin(n-2)x\Big)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{1}{2(n+2)}\cos(n+2)x\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{1}{2(n-2)}\cos(n-2)x\Big|_{x=0}^{x=\pi}\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{1}{n}\big((-1)^n-1\big) + \frac{1}{2(n+2)}\big((-1)^{n+2}-1\big) + \frac{1}{2(n-2)}\big((-1)^{n-2}-1\big)\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n-2)}\Big)\big((-1)^n-1\big) = \frac{-4(1-(-1)^n)}{\pi(n-2)n(n+2)},
\end{aligned}
$$

dok laganim računom slijedi još

$$a_0 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = 0.$$

Zato je Fourierov razvoj od f dan sa

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{(2m-3)(2m-1)(2m+1)}.$$

(b) Obzirom da vrijedi

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{(2m-3)(2m-1)(2m+1)} \le \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{(2m-3)^3} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} < +\infty,$$

zaključujemo

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|) < +\infty$$

pa Fourierov red od f uniformno konvergira prema f na čitavom intervalu $[-\pi,\pi]$. Posebno, točkovna konvergencija vrijedi u svakoj točki tog intervala.

(c) Uvrštavanjem $x = \frac{\pi}{2}$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
2 = 1-\cos\pi = f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\pi + \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{3} - \frac{8}{\pi}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)\frac{\pi}{2}}{(2m-3)(2m-1)(2m+1)} \\
&= [m=k+2] = 1 + \frac{8}{3\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)},
\end{aligned}
$$

odakle slijedi

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} = \frac{3\pi-8}{24}.$$

2. *Odgovor*: To su samo konstantne funkcije, tj. $f(x)=c$ za neki $c\in\mathbb{C}$.

   Zapravo tražimo funkcije $f\in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ takve da je $f_{-2\pi}=f$. Uzimanjem Fourierovih koeficijenata obiju strana dobivamo
$$(e^{2\pi i n(2\pi)}-1)\widehat{f}(n)=0$$
   pa zbog iracionalnosti broja 2π slijedi $e^{2\pi i n(2\pi)}-1\neq 0$, $\widehat{f}(n)=0$ za svaki $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. (Naime, $e^{2\pi i n(2\pi)}=1$ bi značilo da je $n(2\pi)$ jednako nekom cijelom broju m, odakle bi proizašlo $2\pi=m/n$.) Konačno, tvrdnja slijedi po teoremu jedinstvenosti.

3. (a) Hölderova nejednakost daje
$$\|f\|_2^2=\int_{\mathbb{T}}|f(x)|^2dx=\int_{\mathbb{T}}|f(x)|^2\cdot 1\,dx\le\Big(\int_{\mathbb{T}}(|f(x)|^2)^{p/2}dx\Big)^{2/p}\Big(\int_{\mathbb{T}}1^{p/(p-2)}dx\Big)^{1-2/p}=\|f\|_p^2,$$
   tj.
$$\|f\|_2\le\|f\|_p. \tag{1}$$
   Usput vidimo i poznatu činjenicu $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})\subseteq \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$.

   Za svaki $n\in\mathbb{Z}$ iz Plancherelove formule očigledno slijedi $\dfrac{|\hat{f}(n)|}{\|f\|_2}\le 1$ pa zbog $p>2$ možemo pisati
$$\frac{1}{\|f\|_2^p}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^p=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\frac{|\hat{f}(n)|}{\|f\|_2}\Big)^p\le\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\frac{|\hat{f}(n)|}{\|f\|_2}\Big)^2=\frac{1}{\|f\|_2^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2=1, \tag{2}$$
   gdje smo još jednom iskoristili Plancherelovu formulu. Time smo pokazali
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^p\le\|f\|_2^p.$$
   Kombiniranje s (1) daje traženu nejednakost.

   (b) *Odgovor*: To su funkcije oblika $f(x)=\alpha e^{2\pi i m x}$ za neki $m\in\mathbb{Z}$ i neki $\alpha\in\mathbb{C}$.

   U slučaju jednakosti u nejednakosti iz zadatka, svakako moramo imati jednakost i u (2). Dakle, za svaki $n\in\mathbb{Z}$ mora vrijediti
$$\Big(\frac{|\hat{f}(n)|}{\|f\|_2}\Big)^p=\Big(\frac{|\hat{f}(n)|}{\|f\|_2}\Big)^2,\quad \text{tj. } \frac{|\hat{f}(n)|}{\|f\|_2}=0 \text{ ili } 1.$$
   To je moguće samo ako je najviše jedan Fourierov koeficijent $\hat{f}(n)$ različit od nule pa po teoremu jedinstvenosti f mora biti spomenutog oblika.
   Obratno, ako je $f(x)=\alpha e^{2\pi i m x}$, tada jednakost doista vrijedi jer su obje strane jednake $|\alpha|^p$.

4. (a) Iz $f*f=f$ slijedi $\widehat{f}(n)^2=\widehat{f}(n)$ za svaki $n\in\mathbb{Z}$, odakle zaključujemo da su svi Fourierovi koeficijenti $\widehat{f}(n)$ jednaki 0 ili 1. Ako označimo $S=\{n\in\mathbb{Z}:\widehat{f}(n)=1\}$ i sjetimo se da je riječ o trigonometrijskom polinomu pa je S konačan, po teoremu jedinstvenosti zaključujemo da doista mora biti $f(x)=\sum_{n\in S}e^{2\pi i n x}$.

   (b) Definirajmo funkciju $\varphi\colon\big[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big\rangle\to\mathbb{R}$ formulom
$$\varphi(x):=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{\delta} & \text{za } x\in[-\delta,\delta],\\ 0 & \text{inače.}\end{cases}$$

Potom ju proširimo po 1-periodičnosti na cijeli $\mathbb{R}$, tako da se zapravo može shvatiti kao funkcija na torusu $\mathbb{T}$. Lako se izračunaju njezini Fourierovi koeficijenti:

$$\widehat{\varphi}(0)=2\int_0^\delta\Big(1-\frac{x}{\delta}\Big)dx=\delta,\quad \widehat{\varphi}(n)=2\int_0^\delta\Big(1-\frac{x}{\delta}\Big)\cos 2\pi nx\,dx=\frac{\sin^2\pi n\delta}{\pi^2n^2\delta}\ \text{za } n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Posebno primijetimo da je $\widehat{\varphi}(n)\geq 0$ za svaki $n\in\mathbb{Z}$. Sada ocjenjujemo:

$$\int_{-\delta}^{\delta}|f(x)|^2dx\geq\int_{\mathbb{T}}\varphi(x)|f(x)|^2dx=\int_{\mathbb{T}}\varphi(x)\Big(\sum_{m,n\in S}e^{2\pi imx}\overline{e^{2\pi inx}}\Big)dx$$
$$=\sum_{m,n\in S}\int_{\mathbb{T}}\varphi(x)e^{-2\pi i(n-m)x}dx=\sum_{m,n\in S}\underbrace{\widehat{\varphi}(n-m)}_{\geq 0}\geq\sum_{n\in S}\widehat{\varphi}(0)=\delta\,\mathrm{card}(S).$$

5. (a) *Odgovor*: $a=0$.
Parcijalne sume su oblika

$$S_{4N-3}=(2N-1)a,\quad S_{4N-2}=(2N-1)a-b,\quad S_{4N-1}=2Na-b,\quad S_{4N}=2Na$$

za svaki $N\in\mathbb{N}$. Zatim,

$$\begin{aligned}\sigma_{4N-3}=&\frac{\sum_{n=1}^{N}S_{4n-3}+\sum_{n=1}^{N-1}S_{4n-2}+\sum_{n=1}^{N-1}S_{4n-1}+\sum_{n=1}^{N-1}S_{4n}}{4N-3}\\ =&\frac{(N(N+1)a-Na)+((N-1)Na-(N-1)a-(N-1)b)}{4N-3}\\ &\frac{+((N-1)Na-(N-1)b)+((N-1)Na)}{4N-3}\\ =&\frac{4N^2-4N+1}{4N-3}a-\frac{2N-2}{4N-3}b,\\ \sigma_{4N-2}=&\frac{4N^2-2N}{4N-2}a-\frac{2N-3}{4N-2}b,\\ \sigma_{4N-1}=&\frac{4N^2}{4N-1}a-\frac{2N-4}{4N-1}b,\\ \sigma_{4N}=&\frac{4N^2+2N}{4N-1}a-\frac{2N-4}{4N-1}b.\end{aligned}$$

Pustimo li $N\to\infty$ zaključujemo da svi limesi od σ_{4N-3}, σ_{4N-2}, σ_{4N-1}, σ_{4N} postoje i konačni su ako i samo ako je $a=0$. Štoviše, tada su svi oni jednaki $-\frac{b}{2}$ pa je u tom slučaju (C) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\frac{b}{2}$.

(b) *Odgovor*: $a=0$.
Vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n=\sum_{n=0}^{\infty}\big(ar^{4n+1}-br^{4n+2}+ar^{4n+3}+br^{4n+4}\big)=\frac{ar}{1-r^4}-\frac{br^2}{1-r^4}+\frac{ar^3}{1-r^4}+\frac{br^4}{1-r^4}$$
$$=\frac{ar\left(1+r^2\right)}{1-r^4}+\frac{br^2\left(r^2-1\right)}{1-r^4}=\frac{ar}{1-r^2}-\frac{br^2}{1+r^2}.$$

Preostaje ispitati postojanje konačnog limesa ovog izraza kada $r\nearrow 1$, a on će postojati ako i samo ako je $a=0$. U tom slučaju je (A) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\frac{b}{2}$.

6. Funkcija f se (istom formulom) proširuje do kompleksne meromorfne funkcije na $\mathbb{C}$. Polovi su joj rješenja jednadžbe $e^{\pi z}+e^{-\pi z}=0$, tj. $e^{2\pi z}=-1$, tj. $z=\frac{2k+1}{2}i$ za neki $k\in\mathbb{Z}$. Jednakost $\widehat{f}=f$, koju želimo dokazati, nakon dijeljenja s 2 i po definiciji Fourierove transformacije zapravo glasi

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}dx = \frac{1}{e^{\pi\xi}+e^{-\pi\xi}} \tag{3}$$

za svaki $\xi\in\mathbb{R}$. Mi ćemo najprije promatrati slučaj $\xi<0$. Označimo $g_\xi(z)=\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}$, tako da g_ξ još uvijek ima iste polove kao i f te su joj reziduumi u njima jednaki

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rez}\Big(g_\xi,\frac{2k+1}{2}i\Big) &= \lim_{z\to\frac{2k+1}{2}i}\frac{(z-\frac{2k+1}{2}i)e^{-2\pi i z\xi}}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}\\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{z\to\frac{2k+1}{2}i}\frac{e^{-2\pi i z\xi}+(z-\frac{2k+1}{2}i)(-2\pi i\xi)e^{-2\pi i z\xi}}{\pi e^{\pi z}-\pi e^{-\pi z}}\\
&= \frac{e^{(2k+1)\pi\xi}}{\pi(-1)^k i-\pi(-1)^k(-i)} = \frac{(-1)^k e^{(2k+1)\pi\xi}}{2\pi i}.
\end{aligned}$$

Za $n\in\mathbb{N}$ promotrimo konturu koja sa sastoji od segmenta $[-n,n]\subset\mathbb{R}$ i polukružnice $\Gamma_n\subset\mathbb{C}$ oko ishodišta radijusa n u gornjoj poluravnini. Po teoremu o reziduumima je

$$\oint_{[-n,n]\cup\Gamma_n} g_\xi(z)dz = 2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Rez}\Big(g_\xi,\frac{2k+1}{2}i\Big) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k e^{(2k+1)\pi\xi},$$

odakle slijedi

$$\int_{-n}^{n} g_\xi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k e^{(2k+1)\pi\xi} - \oint_{\Gamma_n} g_\xi(z)dz. \tag{4}$$

Parametrizirajmo Γ_n pomoću $\gamma\colon[0,\pi]\to\mathbb{C}$, $\gamma(t)=ne^{it}=n\cos t+in\sin t$. Primijetimo

$$|g_\xi(\gamma(t))| = \frac{e^{2\pi\xi n\sin t}}{|e^{\pi n\cos t+i\pi n\sin t}+e^{-\pi n\cos t-i\pi n\sin t}|}$$

te pokažimo da za svaki $t\in[0,\pi]$ vrijedi

$$|g_\xi(\gamma(t))| \le 24\big(1+\xi^{-2}\big)n^{-2}. \tag{5}$$

Naime, (5) se vidi razlikovanjem sljedeća dva slučaja. Pritom višestruko koristimo

$$\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x \quad \text{za } x\in\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big].$$

(1°) $t\in\Big[0,\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2\sqrt{n}}\Big]\cup\Big[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2\sqrt{n}},\pi\Big] \implies |\cos t| = \sin\Big|t-\frac{\pi}{2}\Big| \ge \sin\frac{1}{2\sqrt{n}} \ge \frac{1}{\pi\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned}
&\implies |e^{\pi n\cos t+i\pi n\sin t}+e^{-\pi n\cos t-i\pi n\sin t}| \ge \max\{e^{\pi n\cos t}-e^{-\pi n\cos t}, e^{-\pi n\cos t}-e^{\pi n\cos t}\}\\
&\qquad \ge e^{\sqrt{n}}-1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n})^k}{k!} \ge \frac{n^2}{24}\\
&\implies |g_\xi(\gamma(t))| \le \frac{24}{n^2}e^{2\pi\xi n\sin t} \le \frac{24}{n^2}
\end{aligned}$$

$$(2^\circ)\ \ t \in \left\langle \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n}}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \right\rangle \implies 1 - \sin t = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 2\sin^2 \frac{\pi/2 - t}{2} < \frac{1}{8n}$$

$$\implies |(-1)^n - \cos(\pi n \sin t)| = |\cos(\pi n) - \cos(\pi n \sin t)|$$

$$= 2\Big|\sin \frac{\pi n(1-\sin t)}{2}\Big| \underbrace{\Big|\sin \frac{\pi n(1+\sin t)}{2}\Big|}_{\leq 1} \leq \pi n(1-\sin t) \leq \frac{\pi}{8}$$

$$\implies |e^{\pi n \cos t + i\pi n \sin t} + e^{-\pi n \cos t - i\pi n \sin t}| \geq |\mathrm{Re}(e^{\pi n \cos t + i\pi n \sin t} + e^{-\pi n \cos t - i\pi n \sin t})|$$

$$= (\underbrace{e^{\pi n \cos t} + e^{-\pi n \cos t}}_{\geq 2})|\cos(\pi n \sin t)| \geq 2\Big(1 - \frac{\pi}{8}\Big) > 1$$

koristeći $\xi < 0$ i $\sin t \geq \frac{1}{2\pi}$

$$\implies |g_\xi(\gamma(t))| \leq e^{2\pi\xi n \sin t} \leq e^{\xi n}$$

koristeći $e^{|\xi| n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\xi| n)^k}{k!} \geq \frac{\xi^2 n^2}{2}$

$$\implies |g_\xi(\gamma(t))| \leq \frac{2}{\xi^2 n^2}$$

Sada iz (5) slijedi

$$\Big|\oint_{\Gamma_n} g_\xi(z)dz\Big| \leq \int_0^\pi |g_\xi(\gamma(t))| \underbrace{|\gamma'(t)|}_{=n} dt \leq 24\pi\big(1 + \xi^{-2}\big)n^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{6}$$

Pustimo li $n \to \infty$ u jednakosti (4) te na lijevoj strani iskoristimo teorem o dominiranoj konvergenciji (koji se može iskoristiti radi očigledne integrabilnosti od g_ξ), a na desnoj strani iskoristimo (6), dobit ćemo

$$\int_{\mathbb{R}} g_\xi(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{(2k+1)\pi\xi}.$$

Odavde sumiranjem geometrijskog reda konačno slijedi

$$\int_{\mathbb{R}} g_\xi(x)dx = \frac{e^{\pi\xi}}{1 + e^{2\pi\xi}} = \frac{1}{e^{-\pi\xi} + e^{\pi\xi}}$$

pa smo doista dobili (3) uz dodatnu pretpostavku $\xi < 0$. Drugim riječima, dokazali smo

$$\widehat{f}(\xi) = f(\xi) \tag{7}$$

za svaki $\xi < 0$. Zbog realnosti funkcije f imamo

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi i x\xi}dx} = \overline{\widehat{f}(-\xi)},$$

odakle (i kako je f parna) slijedi da (7) ostaje vrijediti i za $\xi > 0$. Konačno, koristimo da je Fourierova transformacija integrabilne funkcije uvijek neprekidna funkcija, što se lako vidi iz

$$\widehat{f}(\xi + \zeta) - \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\big(e^{-2\pi i x\zeta} - 1\big)dx$$

i jer po teoremu o dominiranoj konvergenciji (uz dominiranost s $2|f|$) posljednji izraz teži u 0 kada $\zeta \to 0$. Prelaskom na limes kada $\xi \to 0$ zaključujemo da (7) vrijedi i za $\xi = 0$.

Napomena: Tvrdnja $\widehat{f}(0) = 1 = f(0)$, tj. posebni slučaj $\xi = 0$, alternativno slijedi vrlo jednostavnim računom,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(0) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\operatorname{ch}(\pi x)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}(\pi x)} = 4\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\pi x}dx}{1+e^{-2\pi x}} \\ &= \begin{bmatrix} y = e^{-\pi x} \\ dy = -\pi e^{-\pi x}dx \end{bmatrix} = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = 1 = f(0).\end{aligned}$$