Fourierovi redovi i primjene

Popravni kolokvij, 9. 7. 2019.

1. *(4+4+4=12 bodova)* Ispitajte konvergira li niz funkcija $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ zadan sa

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \cos^n x + \sin^n x$$

   (a) g.s. na $\mathbb{R}$, (b) uniformno na $\big[0, \frac{\pi}{2}\big]$, (c) u $\mathrm{L}^1\big(\big[0, \frac{\pi}{2}\big]\big)$.

2. *(4+4+4=12 bodova)* Dana je 2π-periodična funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $f(x) = |\operatorname{sh} x|$ za svaki $x \in [-\pi, \pi]$.

   (a) Dokažite da je trigonometrijski Fourierov razvoj funkcije f na intervalu $[-\pi, \pi]$ dan sa:

$$f(x) \sim \frac{\operatorname{ch}\pi - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch}\pi - 1}{n^2+1} \cos nx.$$

   (b) U kojim sve točkama $x \in [-\pi, \pi]$ Fourierov red od f konvergira prema samoj funkciji?

   (c) Konvergira li Fourierov red od f uniformno na $[-\pi, \pi]$?

3. *(12 bodova)* Izračunajte $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

4. *(12 bodova)* Nađite (s dokazom) sve izmjerive 1-periodične funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu $f(x+y) = f(x)f(y)$ za svake $x, y \in \mathbb{R}$.

5. *(12 bodova)* Izračunajte Fourierove koeficijente 1-periodične funkcije $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ klase C^1 koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\big(e^{2\pi i x} - 1\big)u'(x) - 4\pi i\, u(x) + \pi i e^{2\pi i x} = 0$$

   i uvjet $\int_0^1 u(x)dx = 0$.

6.* *(12 dodatnih bodova)* Neka su $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodične funkcije takve da su $f|_{[-\pi,\pi]}, g|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. Neka su još dani brojevi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takvi da je $-\pi \le a < c < d < b \le \pi$. Ako je $f = g$ g.s. na intervalu $\langle a, b\rangle$, dokažite da tada vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} \big((S_N^{\mathbb{R}} f)(t) - (S_N^{\mathbb{R}} g)(t)\big) = 0$$

   <u>uniformno</u> po $t \in [c, d]$.

   Napomena: Smijete (bez dokaza) koristiti sve rezultate s predavanja. Ovaj zadatak može se shvatiti kao uniformna varijanta Riemannovog principa lokalizacije.

Vjekoslav Kovač

Fourierovi redovi i primjene

Rješenja popravnog kolokvija, 9. 7. 2019.

1. (a) DA. Naime, za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ imamo $|\cos x| < 1$ i $|\sin x| < 1$ pa je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

(b) NE. Primijetimo da za $x = 0, \frac{\pi}{2}$ imamo $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Dakle, limes po točkama na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in \langle 0, \pi/2\rangle, \\ 1 & \text{za } x = 0, \pi/2, \end{cases}$$

a ona nije neprekidna. Kada bi bila riječ o uniformnoj konvergenciji i funkcija f bi trebala biti neprekidna, jer su funkcije f_n očigledno neprekidne.

(c) DA. Koristimo Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji (dominiranost konstantom 2) i g.s. konvergenciju iz (a) dijela.

2. (a) Lako je izračunati Fourierove koeficijente:

$$a_0 = \frac{\operatorname{ch}\pi - 1}{\pi}, \quad a_n = \frac{2((-1)^n \operatorname{ch}\pi - 1)}{\pi(n^2+1)} \text{ za } n \geq 1, \quad b_n = 0 \text{ za } n \geq 1.$$

(b) *Odgovor*: u svim točkama $x \in [-\pi, \pi]$.

Funkcija f zadovoljava Dirichletove uvjete obzirom da je klase C^1 na $\langle -\pi, 0\rangle$ i $\langle 0, \pi\rangle$ te vrijedi $f'(0+) = \operatorname{ch} 0 = 1$, $f'(\pi-) = \operatorname{ch}\pi$, $f'(0-) = -1$, $f'(-\pi+) = -\operatorname{ch}\pi$. Osim toga primijetimo da je f neprekidna u svakoj točki.

(c) DA. Možemo primijeniti Weierstrassov kriterij uz brojeve

$$M_n = \frac{2(\operatorname{ch}\pi + 1)}{\pi(n^2+1)},$$

koristeći

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \frac{2(\operatorname{ch}\pi + 1)}{\pi} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}}_{\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}} < +\infty.$$

3. Označimo:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Kako funkcija iz prethodnog zadatka zadovoljava Dirichletove uvjete, znamo da u njezin razvoj možemo uvrstiti $x = 0$ i $x = \pi$ te redom dobiti

$$0 = \operatorname{sh} 0 = \frac{\operatorname{ch}\pi - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch}\pi - 1}{n^2+1} = \frac{\operatorname{ch}\pi - 1}{\pi} + \frac{2\operatorname{ch}\pi}{\pi} B - \frac{2}{\pi} A,$$

$$\operatorname{sh}\pi = \frac{\operatorname{ch}\pi - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\pi - (-1)^n}{n^2+1} = \frac{\operatorname{ch}\pi - 1}{\pi} + \frac{2\operatorname{ch}\pi}{\pi} A - \frac{2}{\pi} B.$$

Rješavanje sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice slijedi

$$A = \frac{\pi \operatorname{ch}\pi - \operatorname{sh}\pi}{2\operatorname{sh}\pi}, \quad B = \frac{\pi - \operatorname{sh}\pi}{2\operatorname{sh}\pi}.$$

4. *Odgovor*: $f(x) \equiv e^{2\pi inx}$ za neki $n \in \mathbb{Z}$.

   Očigledno je f ograničena pa je posebno $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. Moguća rješenja su svakako $f = e_n$ za neki $n \in \mathbb{Z}$ (zahvaljujući svojstvima eksponencijalne funkcije) pa pretpostavimo da f nije neko od tih rješenja.

   Za svaki $n \in \mathbb{Z}$ množenjem funkcijske jednadžbe s $e^{-2\pi inx}$ te integriranjem po x dobivamo

$$\begin{aligned} f(y)\widehat{f}(n) &= \int_{\mathbb{T}} f(y)f(x)e^{-2\pi inx}dx = \int_{\mathbb{T}} f(x+y)e^{-2\pi inx}dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi in(x-y)}dx = e^{2\pi iny}\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi inx}dx = e^{2\pi iny}\widehat{f}(n), \end{aligned}$$

   tj.

$$\widehat{f}(n)\big(f(y) - e^{2\pi iny}\big) = 0.$$

   Po pretpostavci $f \neq e_n$ postoji $y \in \mathbb{T}$ takav da je $f(y) \neq e^{2\pi iny}$, ali tada iz gornje jednakosti zaključujemo $\widehat{f}(n) = 0$. Slijedi da f ima sve Fourierove koeficijente jednake 0 pa je g.s. jednaka nul-funkciji, a to nije moguće jer poprima vrijednosti u $\mathbb{S}^1$.

5. *Rezultat*: $\hat{u}(n) = \begin{cases} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} & \text{za } n \geq 1, \\ 0 & \text{za } n \leq 0. \end{cases}$

   Rješenje. Funkcije u i u' su integrabilne pa imaju smisla njihovi Fourierovi koeficijenti. Korištenjem formula $\widehat{u'}(n) = 2\pi in\hat{u}(n)$ i $\big(e^{2\pi ix}v(x)\big)\widehat{\ }(n) = \hat{v}(n-1)$ dobivamo da je n-ti Fourierov koeficijent lijeve strane jednadžbe jednak

$$2\pi i(n-1)\hat{u}(n-1) - 2\pi in\hat{u}(n) - 4\pi i\hat{u}(n) + \pi i \cdot \begin{cases} 1 & \text{za } n = 1, \\ 0 & \text{za } n \neq 1. \end{cases}$$

   Izjednačavanjem s nulom za $n = 1$ dobivamo

$$-6\pi i\hat{u}(1) + \pi i = 0 \implies \hat{u}(1) = \frac{1}{6},$$

   za $n \geq 2$ dobivamo

$$\hat{u}(n) = \frac{n-1}{n+2}\,\hat{u}(n-1), \tag{$\diamondsuit$}$$

   a za $n \leq 0$ dobivamo

$$\hat{u}(n-1) = \frac{n+2}{n-1}\,\hat{u}(n). \tag{$\heartsuit$}$$

   Iz rekurzivne relacije ($\diamondsuit$) sada lako računamo $\hat{u}(2) = \frac{1}{24}$, $\hat{u}(3) = \frac{1}{60}$, itd., odakle možemo naslutiti $\hat{u}(n) = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ za $n \geq 1$, a potom to i dokazati indukcijom. Po uvjetu iz zadatka imamo $\hat{u}(0) = \int_0^1 u(x)dx = 0$ pa iz rekurzivne relacije ($\heartsuit$) trivijalnom indukcijom dobivamo $\hat{u}(n) = 0$ za $n \leq 0$.

6. Možemo pretpostaviti da je $g \equiv 0$, jer u protivnom promatramo funkciju $f - g$ zahvaljujući linearnosti Fourierovih koeficijenata: $S_N^{\mathbb{R}}f - S_N^{\mathbb{R}}g = S_N^{\mathbb{R}}(f-g)$. Dakle, $f = 0$ g.s. na intervalu $\langle a, b\rangle$. Označimo $\eta := \min\{c-a, b-d, \pi\}$.

   Zadajmo $\varepsilon > 0$. Iz 2π-periodične modifikacije Leme 1.4.3 (neprekidnost translacije) imamo

$$\lim_{y\to 0}\|f_y - f\|_{1,[-\pi,\pi]} = 0$$

   pa postoji $\delta > 0$ takav da

$$|y| < \delta \implies \|f_y - f\|_{1,[-\pi,\pi]} < \pi\varepsilon\sin\eta/2.$$

Neka su $c = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m = d$ brojevi takvi da je $\max_{1\leq j\leq m} |t_j - t_{j-1}| < \delta$. Po Riemannovom principu lokalizacije znamo

$$\lim_{N\to\infty} (S_N^{\mathbb{R}} f)(t_j) = 0$$

za svaki j pa postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$N \geq N_0 \implies \big|(S_N^{\mathbb{R}} f)(t_j)\big| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ za } j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Za proizvoljni $t \in [c, d]$ sada postoji indeks $j \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ takav da je $|t - t_j| < \delta$. Imamo

$$(S_N^{\mathbb{R}} f)(t) - (S_N^{\mathbb{R}} f)(t_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \frac{\sin(N + 1/2)x}{\sin x/2} \big(f(t - x) - f(t_j - x)\big) dx,$$

a možemo primijetiti i da je $f(t - x) - f(t_j - x) = 0$ za g.s. $x \in \langle -\eta, \eta\rangle$, jer tada imamo $t - x, t_j - x \in \langle a, b\rangle$. Dakle,

$$(S_N^{\mathbb{R}} f)(t) - (S_N^{\mathbb{R}} f)(t_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\eta]\cup[\eta,\pi]} \frac{\sin(N + 1/2)x}{\sin x/2} \big(f(t - x) - f(t_j - x)\big) dx$$

pa je

$$\begin{aligned}\big|(S_N^{\mathbb{R}} f)(t) - (S_N^{\mathbb{R}} f)(t_j)\big| &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sin \eta/2} \int_{[-\pi,\pi]} \big|f(t - x) - f(t_j - x)\big| dx \\ = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sin \eta/2} \|f_{t-t_j} - f\|_{1,[-\pi,\pi]} &< \frac{1}{2\pi \sin \eta/2} \pi\varepsilon \sin \eta/2 = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Posljednja ocjena je uniformna po $N \in \mathbb{N}$.

Sve u svemu,

$$N \geq N_0 \implies \big|(S_N^{\mathbb{R}} f)(t)\big| < \varepsilon \text{ za svaki } t \in [c, d].$$