Fourierovi redovi i primjene

Popravni kolokvij, 8. 9. 2021.

1. *(6+7+7=20 bodova)* Ispitajte konvergira li niz funkcija $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ zadan sa

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n,$$

   (a) g.s. na $\mathbb{R}$, (b) u $\mathrm{L}^1\big([-1,1]\big)$, (c) u $\mathrm{L}^1\big(\langle -\infty, 0]\big)$.

2. *(10+10=20 bodova)*

   (a) Razvijte 1-periodičnu funkciju $f(x) = \dfrac{1}{(e^{2\pi ix}+2)(e^{2\pi ix}+3)}$ u kompleksni eksponencijalni Fourierov red.

   (b) Izračunajte $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{|e^{2\pi ix}+2|^2|e^{2\pi ix}+3|^2}$.

3. *(20 bodova)* Nađite (s dokazom) sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koje su periodične s periodom 2 i postoje konstante $A, B \in \mathbb{C}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x+\pi) = f(x) + A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x).$$

4. *(15+5=20 bodova)*

   (a) Reći ćemo da funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava *Zygmundov uvjet* reda $\nu > 0$ u točki $t \in \mathbb{R}$ ako postoje $C \in [0, +\infty\rangle$ i $a > 0$ takvi da za svaki $h \in [-a, a]$ vrijedi

$$\big|f(t-h) - 2f(t) + f(t+h)\big| \leq C|h|^{\nu}.$$

   Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Ako u točki $t \in \mathbb{R}$ funkcija f zadovoljava Zygmundov uvjet nekog reda $\nu > 0$, dokažite da tada Fourierov red funkcije f konvergira u točki t prema $f(t)$.

   (b) Ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ i ako u nekoj točki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi slabiji uvjet

$$\lim_{h\to 0^+} \big|f(t-h) - 2f(t) + f(t+h)\big| = 0,$$

   mora li Fourierov red funkcije f konvergirati u točki t prema $f(t)$? Obrazložite odgovor.

   Napomena: Smijete (bez dokaza) koristiti sve rezultate s predavanja.

5. *(20 bodova)* Dokažite da postoji niz kompleksnih brojeva $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ takav da red $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ne konvergira u smislu Abela, ni prema kompleksnom broju ni prema ∞.

6.* *(20 dodatnih bodova)* Neka je $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija. Dokažite da je ekvivalentno:

   (1) Postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} e^{\varepsilon|f(x)|}dx < +\infty$.

   (2) Postoji $C \in [0, +\infty\rangle$ takav da za svaki $p \in \mathbb{N}$ vrijedi $\|f\|_p \leq Cp$.

Vjekoslav Kovač

Fourierovi redovi i primjene

Rješenja popravnog kolokvija, 8. 9. 2021.

1. (a) DA. Naime, za svaki $x \in \mathbb{R}$ imamo poznatu formulu

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = e^x.$$

Dakle, točkovni limes je $f(x) = e^x$.

(b) DA. Naime, za $x \in [-1, 1]$ imamo

$$\big|f_n(x)\big| \leq \Big(1 + \frac{|x|}{n}\Big)^n \leq \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \leq e$$

te

$$|f(x)| = e^x \leq e.$$

Obzirom da po (a) dijelu imamo g.s. konvergenciju,

$$\lim_{n\to\infty} \big|f_n(x) - f(x)\big| = 0,$$

a po netom pokazanom i

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \leq 2e,$$

Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji uz dominiranost konstantom $g(x) = 2e$ daje

$$\int_{[-1,1]} \big|f_n(x) - f(x)\big|\, dx = 0.$$

(c) NE. Premda limes $f(x) = e^x$ jest u prostoru $\mathrm{L}^1\big(\langle -\infty, 0]\big)$, za svaki fiksirani n funkcija f_n je polinom, koji nema konačni integral pa čak ni ne leži u $\mathrm{L}^1\big(\langle -\infty, 0]\big)$. Drugim riječima,

$$\int_{\langle -\infty,0]} \big|f_n(x) - f(x)\big|\, dx = +\infty$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Označimo li $z = e^{2\pi i x}$, formula za $f(x)$ postaje $\frac{1}{(z+2)(z+3)}$, a rastavom na parcijalne razlomke i korištenjem formule za sumu geometrijskog reda za $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+2)(z+3)} &= \frac{1}{2+z} - \frac{1}{3+z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (-z/2)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - (-z/3)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{z}{2}\Big)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{z}{3}\Big)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \big(2^{-n-1} - 3^{-n-1}\big) z^n.\end{aligned}$$

Zato je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \big(2^{-n-1} - 3^{-n-1}\big) e^{2\pi i n x}.$$

(b) Red iz (a) dijela konvergira uniformno radi $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n-1}+3^{-n-1}) < +\infty$. Integracijom član-po-član sada odmah slijedi i da su mu koeficijenti upravo $\widehat{f}(n)$. Plancherelova formula daje traženi integral:

$$\begin{aligned}\|f\|_{2,[0,1]}^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{f}(n)\big|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n-1}-3^{-n-1})^2 = \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{9}\Big)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{6}\Big)^n \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{8} - \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5} = \frac{7}{120}.\end{aligned}$$

3. *Odgovor*: $f(x) = ae^{-\pi ix} + b + ce^{\pi ix}$ za neke $a, b, c \in \mathbb{C}$.
Ekvivalentno: $f(x) = A + B\cos(\pi x) + C\sin(\pi x)$ za neke $A, B, C \in \mathbb{C}$.

Definiramo li $g(x) := f(2x)$, vidimo da je g sada 1-periodična:

$$g(x+1) = f(2x+2) = f(2x) = g(x).$$

Radi neprekidnosti se ona svakako nalazi u $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ pa ima Fourierove koeficijente $\widehat{g}(n)$. Jednadžba iz zadatka u terminima g glasi:

$$g\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big) = g(x) + A\cos(2\pi x) + B\sin(2\pi x),$$

tj.

$$g\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big) = g(x) + A\Big(\frac{1}{2}e^{2\pi ix} + \frac{1}{2}e^{-2\pi ix}\Big) + B\Big(\frac{1}{2i}e^{2\pi ix} - \frac{1}{2i}e^{-2\pi ix}\Big),$$

što je ekvivalentno s

$$e^{i\pi^2 n}\widehat{g}(n) = \widehat{g}(n) + \begin{cases}(A-iB)/2 & \text{if } n = 1,\\ (A+iB)/2 & \text{if } n = -1,\\ 0 & \text{inače}\end{cases}$$

za neke konstante A, B. Odmah se vidi da je za $n = 0$ posljednja jednakost trivijalno zadovoljena, dok ju je za $n = \pm 1$ moguće zadovoljiti odgovarajućim izborom od A, B. Nadalje, za $|n| \geq 2$ mora biti $\widehat{g}(n) = 0$ jer iz iracionalnosti od $\pi^2 n/\pi$ slijedi $e^{i\pi^2 n} \neq 1$. Jedino $\widehat{g}(-1)$, $\widehat{g}(0)$, $\widehat{g}(1)$ mogu biti ne-nul Fourierovi koeficijenti od g pa ona mora biti oblika $g(x) = ae^{-2\pi ix} + b + ce^{2\pi ix}$ za neke $a, b, c \in \mathbb{C}$. Sada se još sjetimo da je $f(x) = g(x/2)$.

4. (a) Imamo

$$\int_{[0,a]} \frac{|f(t-x) - 2f(t) + f(t+x)|}{x}dx \leq \int_{[0,a]} \frac{Cx^\nu}{x}dx = \int_{[0,a]} Cx^{\nu-1}dx = \frac{Ca^\nu}{\nu} < +\infty.$$

Zato je $x \mapsto \frac{f(t-x)-2f(t)+f(t+x)}{x}$ u $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([0,a])$ pa možemo primijeniti Dinijev kriterij.

(b) *Odgovor*: Ne mora.
S predavanja znamo da postoji neprekidna 2π-periodična funkcija f takva da u nekoj točki t njezin Fourierov ne konvergira prema $f(t)$. S druge strane, već radi same neprekidnosti vrijedi

$$\lim_{h\to 0^+}\big|f(t-h) - 2f(t) + f(t+h)\big| = |f(t) - 2f(t) + f(t)| = 0.$$

5. Promotrimo funkciju $f(z) = \sin\frac{1}{1-z}$. Limes $\lim_{r\to 1^-} f(r) = \lim_{s\to+\infty} \sin s$ ne postoji, ni kao kompleksan broj ni kao ∞. Funkcija f je holomorfna na standardnom jediničnom krugu i na njemu ima Taylorov razvoj:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1$$

za neke kompleksne brojeve $a_0, a_1, \ldots$. Po konstrukciji slijedi da ne postoji limes

$$\text{(A)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \lim_{r\to 1^-} f(r).$$

6. (1) $\Longrightarrow$ (2): Vrijedi $e^t \geq \frac{t^p}{p!}$ za svaki $t \in [0, +\infty\rangle$. Odatle je

$$\frac{\varepsilon^p \|f\|_p^p}{p!} = \int_{\mathbb{T}} \frac{(\varepsilon|f(x)|)^p}{p!} dx \leq \int_{\mathbb{T}} e^{\varepsilon|f(x)|} dx = M \in [1, +\infty\rangle$$

pa slijedi

$$\|f\|_p \leq \frac{M^{1/p}}{\varepsilon} (p!)^{1/p} \leq \frac{M}{\varepsilon} p,$$

radi trivijalne ocjene $p! \leq p^p$. Dakle, možemo uzeti $C = M/\varepsilon$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Indukcijom se lako dokaže $p! \geq (p/4)^p$. Zato možemo uzeti neki $0 < \varepsilon < \frac{1}{4C}$ i pisati:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} e^{\varepsilon|f(x)|} dx &= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varepsilon|f(x)|)^p}{p!} dx = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon^p \|f\|_p^p}{p!} \\
&\leq 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(4\varepsilon)^p \|f\|_p^p}{p^p} \leq 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(4\varepsilon)^p (Cp)^p}{p^p} \\
&= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} (4\varepsilon C)^p < +\infty.
\end{aligned}$$